

## CURSUL VII

### METODE ȘI TEHNICI EVOLUATE DE ANALIZĂ A TENDINTELOR PREVIZIONALE

- 7.1 Serii cronologice. Prezentare generală.
- 7.2 Indicatorii dinamicii
- 7.3 Metode statistice folosite în analiza tendinței evolutive
- 7.4. Determinarea tendințelor evolutive sezoniere
- 7.5 Estimarea tendințelor evolutive

#### 7.1 Serii cronologice. Prezentare generală.

O **serie cronologică** (SCR) se prezintă sub forma unui șir sistematizat de valori, ale unei caracteristici, realizate la momente sau intervale de timp succesive. Exemple de serii cronologice pot fi: evoluția anuală a exporturilor sau importurilor unei țări; evoluția lunară a ratei inflației; evoluția anuală produsului intern brut; evoluția dobânzilor bancare sau a cursului valutar etc.

Definiția și exemplele de mai sus impun unele observații cum ar fi:

- Curgerea timpului se măsoară în succesiune cu ajutorul unei scale de interval. Unitățile de timp, frecvent utilizate, sunt: anul, trimestrul, luna, săptămâna, ziua.

- O serie cronologică poate fi privită ca o variabilă aleatoare, deoarece valorile individuale se formează ca urmare a acțiunii (la momente sau intervale de timp diferite) unui ansamblu diferit de factori comuni sau specifici, esențiali sau neesențiali etc.

- Caracterizarea evoluției în timp a unui fenomen, cu ajutorul seriilor cronologice specifice, presupune ca timpul să fie variabil, iar spațiul și structura organizatorică să fie constante. Prin urmare, într-o serie cronologică variabila  $y$  este legată funcțional de variabila "timp" (fiecare moment sau interval de timp corespunde unei valori individuale a caracteristicii  $y$ ), dar nu și invers (aceeași valoare individuală poate fi înregistrată în mai multe momente sau intervale de timp).

Deci, o serie cronologică poate fi scrisă astfel:

$$y=f(t)$$

unde

- variabila "timp"  $t$ , ia valorile  $t_i$  (cu  $i = 1, \dots, r_i$ ) și nu trebuie interpretată ca factor de influență al variabilei  $y$ .

- variabila "y" ia valorile individuale  $y_i$ .

O SCR este formată din două șiruri de date paralele, un șir arătând variația caracteristicii de timp, iar cel de-al doilea - variația fenomenului sau a caracteristicii de la o perioadă la alta. Seriiile cronologice se mai numesc și **serii de timp** sau **serii dinamice**. Deci, se poate spune că seriile cronologice apar ca rezultat al unor măsurători ce se efectuează la anumite momente sau intervale de timp, care pot fi egale sau neegale, asupra unei colectivități în ansamblul său sau a unei părți dintr-o colectivitate.

La construirea și la analiza seriilor cronologice trebuie avute în vedere proprietățile acestora: variabilitatea termenilor; omogenizarea termenilor; periodicitatea termenilor; interdependența termenilor.

Variabilitatea termenilor unei serii cronologice rezultă din faptul că fiecare termen este obținut prin centralizarea unor date individuale. Acest lucru face să existe anumite diferențieri între termenii seriei, fie ca urmare a acțiunii factorilor aleatori, fie ca urmare a faptului că în

viața economică-socială legile se manifestă ca tendință generală, imprimând fenomenelor și proceselor diferite forme de variație.

Omogenitatea termenilor este înțeleasă în sensul că o anumită în sensul că o anumită serie nu cuprinde decât fenomene și procese de același gen, care sunt efecte ale aceluiași tip de cauze. Pentru a asigura omogenitatea termenilor trebuie utilizată aceeași metodologie de evaluare și calcul al indicatorilor, precum și aceleași criterii de clasificare privind mărimea intervalului de timp și a unității statistice etc. Cu alte cuvinte, prelucrarea unei serii cronologice trebuie să se facă după ce s-a verificat dacă datele provin din aceeași sursă, dacă au același grad de cuprindere a unităților, aceleași metode de prelucrare: deci, trebuie asigurată comparabilitatea datelor.

Periodicitatea termenilor înseamnă asigurarea continuității datelor din punctul de vedere al timpului. Variabila timp poate cunoaște periodicității diferite.

Interdependența termenilor unei serii cronologice este rezultatul respectării principiului unității de timp, spațiu și a structurii organizatorice. Având în vedere relațiile de cauzalitate, fiecare indicator depinde într-o anumită măsură de valoarea indicatorului precedent.

În evoluția fenomenelor și proceselor economico-sociale se pot întâlni mai multe **tipuri** de serii cronologice.

1) după **modul** de exprimare a indicatorilor, seriile cronologice pot fi:

- serii cronologice formate din *indicatori absoluți*, care reprezintă forma de bază a seriilor de timp;

- serii cronologice formate din *indicatori relativi* reprezintă un mod de prezentare procentuală a datelor (în acest caz trebuie să se precizeze baza de raportare);

- serii cronologice formate din *indicatori medii*, care reprezintă evoluția unor caracteristici calitative, de exemplu: salariul mediu, productivitatea muncii etc;

2) după **timpul** la care se referă datele, seriile cronologice pot fi:

- *serii cronologice de intervale de timp*: sunt seriile în care fiecare indicator reprezintă rezultatul unui proces sau fenomen la fiecare perioadă de timp. De exemplu: evoluția cifrei de afaceri, a profitului etc. Aceste serii se mai numesc și serii de fluxuri;

- *serii cronologice de momente*: sunt seriile în care fiecare indicator caracterizează mărimea la care a ajuns caracteristica studiată la momentul calculului. De exemplu: populația la 1 iulie, valoarea capitalului fix la sfârșitul anului etc. Aceste serii se mai numesc și serii de stocuri.

Componentele unei serii cronologice sunt generate de factorii care interacționează cu variabila rezultativă (Y) analizată, rezultând:

- trendul sau tendința generală (T), care poate fi: seculară; de durată medie (10-20 ani); de scurtă durată (3-10 ani).

- sezonabilitatea (S);

- ciclicitatea (C);

- variația reziduală (R).

Prin **trend** sau **tendință generală** se înțelege mișcarea relativ regulată a unui fenomen sau proces în decursul unei perioade reprezentând o creștere sau o descreștere.

Sezonabilitatea reprezintă existența unor oscilații (fluctuații) în funcție de anotimpuri, luni sau zile, în desfășurarea unui fenomen sau proces pe o anumită durată.

Ciclicitatea se manifestă mai ales în cazul fenomenelor și proceselor economice în cadrul economiei de piață și se identifică, de cele mai multe ori, cu ciclul economic.

Atât sezonabilitatea, cât și ciclicitatea nu sunt întotdeauna prezente într-o serie cronologică.

Variația reziduală poate fi de natură aleatoare, gaussiană sau accidentală și reprezintă fluctuații în funcție de factorii aleatori. Variația reziduală se mai numește și componenta neregulată. Ea reprezintă variația unei serii de timp care nu poate fi explicată prin trend, ciclicitatea sau sezonabilitate. Deoarece componenta reziduală este aleatoare, efectele ei într-o serie de timp sunt foarte greu de prognozat.

Analiza seriilor cronologice prezintă unele elemente specifice: există două tipuri de serii cronologice, de intervale de timp și de momente iar pentru calculul nivelului mediu al unei serii cronologice de momente se folosește, în exclusivitate, media cronologică, dar în același scop - pentru seria cronologică de intervale se poate folosi una dintre mediile aritmetică, pătratică sau geometrică, în funcție de tendința evolutivă evidențiată de seria respectivă. De asemenea, alegerea funcțiilor statistico-matematice pentru determinarea tendințelor evolutive este condiționată de evoluția reală, sugerată de seria cronologică supusă analizei, pentru că numai astfel se poate estima corect perspectiva evolutivă a seriei respective.

În cadrul acestui subcapitol vor fi prezentate majoritatea problemelor de ordin metodologic și aplicativ legate de analiza seriilor cronologice, fără a considera că am epuizat întreaga paletă de metode.

## 7.2 Indicatorii dinamicii

Se deosebesc trei grupe de indicatori:

- a) Indicatori absoluți
- b) Indicatori relativi
- c) Indicatori medii

a) Din prima grupă fac parte:

**a<sub>1</sub>) Nivelul absolut.** Este dat de șirul nivelurilor fenomenului a cărui evoluție se urmărește. Dacă seria este **simplă**, atunci nivelurile absolute pentru variabila X sunt  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ; dacă seria este **complexă**, formată – spre exemplu - din trei serii simple, pentru variabilele X, Y, Z, nivelurile absolute vor fi  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ;  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ ;  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ .

**a<sub>2</sub>) Sporul (deficitul) absolut.** Se determină ca diferență între nivelurile absolute ale uneia dintre variabilele seriei, luate succesiv și un nivel oarecare considerat bază de comparație.

Se deosebesc două variante ale acestui indicator:

**a<sub>2.1</sub>) Cu baza fixă.** Se calculează ca diferență între nivelurile absolute și un nivel oarecare menținut constant. Ca nivel referențial este folosit de obicei, nivelul inițial al seriei, simbolizat cu  $y_1$ . Relația de calcul este:

$$\Delta_{n/1} = y_n - y_1$$

Deci:

$$\Delta_{2/1} = y_2 - y_1; \Delta_{3/1} = y_3 - y_1; \Delta_{4/1} = y_4 - y_1; \dots$$

**Semnificație:** sporul (deficitul) absolut cu baza fixă evidențiază creșterea (+); sau descreșterea (-) nivelurilor absolute ale seriei față de nivelul folosit ca bază de comparație.

**a<sub>2.2</sub>) Cu baza în lanț.** Se determină ca diferență între fiecare nivel luat succesiv și precedentul său, folosind relația:

$$\Delta_{n/n-1} = y_n - y_{n-1}$$

Deci:

$$\Delta_{2/1} = y_2 - y_1; \Delta_{3/2} = y_3 - y_2; \Delta_{4/3} = y_4 - y_3; \dots$$

**Semnificație:** sporul (deficitul) absolut cu baza în lanț evidențiază creșterea sau descreșterea nivelurilor seriei de la o perioadă la alta sau de la un moment la altul în funcție de tipul seriei.

Comparând rețatiile de calcul ale celor două variante, rezultă că:

$$\Delta_{n/1} = \sum \Delta_{n/n-1}$$

Cea de a doua grupă cuprinde:

**b<sub>1</sub>) Indicele dinamicii.** Se calculează ca raport între nivelurile absolute, luate succesiv, și un nivel oarecare folosit ca bază de comparație. Se deosebesc două variante:

**b<sub>1.1</sub>) Cu baza fixă.** Se calculează ca raport între nivelurile absolute și un nivel oarecare menținut constant, folosind relația:

$$I_{n/1} = \frac{y_n}{y_1}$$

Deci:

$$I_{2/1} = \frac{y_2}{y_1}; I_{3/1} = \frac{y_3}{y_1}; I_{4/1} = \frac{y_4}{y_1}; \dots\dots\dots$$

**b<sub>1.2</sub>) Cu baza în lanț.** Se determină ca raport între fiecare nivel, luat succesiv și precedentul său, folosind relația:

$$I_{n/n-1} = \frac{y_n}{y_{n-1}}$$

Deci:

$$I_{2/1} = \frac{y_2}{y_1}; I_{3/2} = \frac{y_3}{y_2}; I_{4/3} = \frac{y_4}{y_3}; \dots\dots\dots$$

Comparând relațiile celor două variante de indici, rezultă că:

$$I_{n/1} = \prod I_{n/n-1}$$

Indicii dinamicii se exprimă și în procente.

**b<sub>2</sub>) Ritmul dinamicii.** Se deosebesc două variante:

**b<sub>2.1</sub>) Cu bază fixă.** Se calculează cu ajutorul uneia dintre relațiile:

$$R_{n/1} = \frac{\Delta_{n/1}}{y_1} \cdot 100 \text{ sau } R_{n/1} = (I_{n/1} - 1) \cdot 100$$

Cea de a doua relație derivă din prima:

$$R_{n/1} = \frac{\Delta_{n/1}}{y_1} \cdot 100 = \frac{y_n - y_1}{y_1} \cdot 100 = \left( \frac{y_n}{y_1} - \frac{y_1}{y_1} \right) \cdot 100 = (I_{n/1} - 1) \cdot 100$$

**b<sub>2.2</sub>) Cu baza în lanț.** Are în principiu aceeași metodologie, cu deosebirea că, în calculul său se folosesc indicatorii cu baza în lanț.

Deci:

$$R_{n/n-1} = \frac{\Delta_{n/n-1}}{y_{n-1}} \cdot 100 \text{ sau } R_{n/n-1} = (I_{n/n-1} - 1) \cdot 100$$

Ritmul dinamicii se exprimă **numai** în procente.

**Semnificație:** evidențiază creșterea (+) sau descreșterea (-) nivelurilor unui fenomen, în procente. El este expresia relativă a sporului (deficitului) absolut, cu care formează următoarele cupluri:

- > **sporul cu baza fixă** se cuplează cu **ritmul cu baza fixă**;
- > **sporul cu baza în lanț** se cuplează cu **ritmul cu baza în lanț**.

c) Cea de a treia grupă se împarte în două subgrupe:

**c<sub>1</sub>) Indicatorii medii absoluți.** Această subgrupă cuprinde:

**c<sub>1.1</sub>) Media nivelurilor absolute.** Dacă seria cronologică este de **momente**, nivelul mediu se calculează ca o **medie cronologică**; în cazul în care intervalele dintre momente sunt egale, se folosește **media cronologică simplă**; în cazul în care intervalele dintre momente nu sunt egale, se folosește **media cronologică ponderată**.

Dacă seria cronologică este de **intervale**, nivelul mediu se calculează folosind una dintre mediile: aritmetică, pătratică sau geometrică. Astfel:

- dacă  $\Delta_{n/n-1}$  sunt mai mici la începutul seriei și din ce în ce mai mari spre sfârșitul acesteia, se recomandă folosirea **mediei pătratice**;

- dacă  $\Delta_{n/n-1}$  sunt mai mari la începutul seriei și din ce în ce mai mici spre sfârșitul ei, se recomandă folosirea **mediei geometice**;

- dacă  $\Delta_{n/n-1}$  sunt aproximativ constante, se recomandă folosirea **mediei aritmetice**.

**c1.2) Sporul mediu.** Se determină, de obicei, ca o medie **aritmetică simplă** a sporurilor cu baza în lanț, folosind una dintre relațiile:

$$\bar{\Delta} = \frac{\sum \Delta_{n/n-1}}{m} \text{ sau } \bar{\Delta} = \frac{\sum \Delta_{n/1}}{m}$$

în care:  $m =$  numărul sporurilor cu baza în lanț ( $m = n - 1$ ).

Cea de a doua formulă de calcul are la bază relația dintre  $\Delta_{n/1}$  și  $\Delta_{n/n-1}$ , prezentată la **a2**.

Dacă s-ar ține seama de criteriile expuse la calculul nivelului mediu al seriei cronologice, ar trebui ca sporul mediu să se determine ca o medie aritmetică, pătratică sau geometrică a sporurilor cu baza în lanț, în funcție de tendința evolutivă a acestora; practic însă, s-a constatat, că între mediile respective, folosite concomitent în calculul sporului mediu sunt diferențe mici, care pot fi neglijate. Din acest motiv, sporul mediu se calculează, în mod obișnuit, ca o medie aritmetică.

**c2) Indicatorii medii relativi.** Această subgrupă cuprinde:

**c2.1) Indicele mediu al dinamicii.** Se calculează ca o medie geometrică a indicilor cu baza în lanț, folosind una dintre relațiile:

$$\bar{I} = \sqrt[m]{\prod I_{n/n-1}} \text{ sau } \bar{I} = \sqrt[m]{\prod I_{n/1}}$$

în care :  $m =$  numărul indicilor cu baza în lanț ( $m = n - 1$ ).

Cea de a doua formulă are la bază relația dintre  $I_{n/1}$  și  $I_{n/n-1}$  prezentată la b1.

**c2.2) Ritmul mediu al dinamicii.** Se determină cu ajutorul relației:

$$\bar{R} = \left( \bar{I} - 1 \right) \cdot 100$$

Ritmul mediu se exprimă numai în procente. El se cuplează cu sporul mediu.

În analiza statistică a seriilor cronologice se folosește, pe scară largă și indicatorul "**valoarea absolută a unui procent de creștere( reducere)**", care se determină ca raport între sporurile (deficitele) absolute și ritmurile corespunzătoare. Astfel, pentru indicatorii:

> cu baza fixă :

$$V_{a(1\%)} = \frac{\Delta_{n/1}}{R_{n/1}}$$

> cu baza în lanț:

$$V_{a(1\%)} = \frac{\Delta_{n/n-1}}{R_{n/n-1}}$$

> medii:

$$V_{a(1\%)} = \frac{\bar{\Delta}}{R}$$

Acest indicator este folosit, în mod deosebit, pentru asigurarea comparabilității datelor, atât în statistica națională cât și în statistica internațională.

### 7.3 Metode statistice folosite în analiza tendinței evolutive

Aplicarea unor metode statistico-matematice adecvate asupra unei serii de timp în dorința de a extrage ceea ce este esențial și tipic în evoluția fenomenului sau procesului analizat și care are caracter de legitate se numește **ajustarea seriei cronologice**. Prin ajustarea termenilor unei serii cronologice, se înțelege operația de înlocuire a termenilor reali cu termeni teoretici ce exprimă legitatea specifică de dezvoltare obiectivă a fenomenelor la care se referă datele.

În teoria și practica statistică sunt utilizate următoarele metode de ajustare:

**A. Ajustarea grafică** a seriei cronologice. Acest procedeu presupune trasarea liberă și aproximativă a unei drepte sau curbe asupra unei serii cronologice empirice. O asemenea ajustare are caracter orientativ și oferă informații asupra tendinței generale a evoluției fenomenului sau procesului supus cercetării. Dar, ajustarea grafică este subiectivă și poate duce la determinări diferite.

**B. Ajustarea mecanică** a seriei cronologice. Acest procedeu constă în aplicarea succesivă, în mod mecanic, a unor formule de calcul stabilite dinainte, pentru toți termenii seriei.

Dintre aceste metode, amintim:

• **Metoda mediilor eșalonate**. Constă în calculul mediilor eșalonate, ca medii aritmetice simple din câte doi, trei sau mai mulți termeni (în cadrul cărora nu se repetă nici un termen) și aprecierea tendinței evolutive cu ajutorul seriei formată din aceste medii.

Considerând  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$  nivelurile absolute dintr-o serie dată, mediile eșalonate, calculate din câte doi termeni, sunt:

$$\bar{y}_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}; \bar{y}_2 = \frac{y_3 + y_4}{2}; \bar{y}_3 = \frac{y_5 + y_6}{2}; \dots$$

Seria mediilor eșalonate fiind:

$$\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \dots, \bar{y}_{n/2}$$

În cazul în care seria cronologică are un număr relativ mare de termeni, pentru aprecierea cât mai exactă a tendinței evolutive se poate continua calculul mediilor eșalonate, folosindu-se însă ca bază de calcul mediile deja calculate; cele folosite ca bază de calcul, sunt cunoscute sub numele de medii de rang inferior; cele calculate pe baza lor - medii de rang superior. Astfel:

$$\bar{\bar{y}}_1 = \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2}{2}; \bar{\bar{y}}_2 = \frac{\bar{y}_3 + \bar{y}_4}{2}$$

Seria constituită din aceste medii:

$$\bar{\bar{y}}_1, \bar{\bar{y}}_2, \bar{\bar{y}}_3, \dots, \bar{\bar{y}}_{n/4}$$

Evident, cu ajutorul mediilor eșalonate obținute după treapta a doua de prelucrare, sunt atenuate într-o măsură mai mare fluctuațiile evolutive generate de acțiunea factorilor întâmplători; nu este posibilă însă eliminarea totală a acestor fluctuații.

• **Metoda mediilor mobile**. Se mai numesc și medii glisante sau alunecătoare și constă în folosirea mediilor mobile în aprecierea tendinței evolutive, după procedeul prezentat la metoda mediilor eșalonate, cu deosebirea că în calculul mediilor mobile, unul, doi sau mai mulți termeni se repetă.

Considerând seria  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ , mediile mobile calculate din câte doi termeni vor fi:

$$\bar{y}_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}; \bar{y}_2 = \frac{y_2 + y_3}{2}; \bar{y}_3 = \frac{y_3 + y_4}{2}; \dots$$

Seria mediilor mobile de rangul I:

$$\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \dots, \bar{y}_{n-1}$$

Mediile mobile de rangul II:

$$\bar{y}_1 = \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2}{2}; \bar{y}_2 = \frac{\bar{y}_2 + \bar{y}_3}{2}$$

Seria mediilor mobile de rangul II:

$$\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \dots, \bar{y}_{n-2}$$

Nici prin această metodă nu se elimină în totalitate fluctuațiile evolutive întâmplătoare.

• **Metoda sporului mediu.** Are la bază relația dintre un termen oarecare al seriei, termenul inițial și sporul mediu, adică:

$$Y_i = y_1 + m\bar{\Delta} \quad (3.2)$$

unde

$$i = 1, 2, 3, \dots, n; m = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Deci:

$$Y_1 = y_1 + 0 \cdot \bar{\Delta} = y_1$$

$$Y_2 = y_1 + 1 \cdot \bar{\Delta}$$

$$Y_3 = y_1 + 2 \cdot \bar{\Delta}$$

.....

$$Y_n = y_1 + (n-1) \cdot \bar{\Delta} = y_n$$

În cadrul acestei metode, primul și ultimul termen ai seriei valorilor teoretice, respectiv  $Y_1$  și  $Y_n$  sunt identici cu primul și ultimul termen ai seriei empirice, adică cu  $y_1$  și  $y_n$ ; această proprietate este folosită ca mijloc de control ( $Y_n = y_1$ ).

Cu ajutorul acestei metode sunt eliminate în totalitate fluctuațiile evolutive întâmplătoare, valorile teoretice  $Y_i$  înscriindu-se pe o linie dreaptă.

Metoda este recomandată pentru analiza tendințelor evolutive lineare.

• **Metoda indicelui mediu.** Are la bază relația dintre un termen oarecare al seriei, termenul inițial și indicele mediu, adică:

$$Y_i = y_1 \times \bar{I}^m \quad (3.3)$$

unde

$$i = 1, 2, 3, \dots, n; m = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Deci:

$$Y_1 = y_1 \times \bar{I}^0 = y_1$$

$$Y_2 = y_1 \times \bar{I}$$

$$Y_3 = y_1 \times \bar{I}^2$$

.....

$$Y_n = y_1 \times \bar{I}^{(n-1)} = y_n$$

Se observă că și în cadrul acestei metode termenii de la începutul și sfârșitul celor două șiruri de valori ale variabilei  $Y$  sunt identici, respectiv:  $Y_1 = y_1$ ;  $Y_n = y_n$ , proprietatea fiind folosită -și aici- ca test de control.

Și cu ajutorul acestei metode sunt eliminate în întregime fluctuațiile evolutive întâmplătoare, valorile teoretice înscriindu-se pe o linie curbă.

Metoda este recomandată pentru analiza tendințelor nelineare.

**C. Metode analitice.** Acestea sunt bazate în special pe folosirea unei game largi de funcții statistico-matematice, din care, funcția lineară, funcția hiperbolică, funcția parabolică de ordin superior și funcția exponențială sunt utilizate foarte frecvent, atât ca element al evidențierii tendințelor evolutive, cât și ca model matematic pentru alte funcții, cum sunt cele logaritmice, semilogaritmice, logistice, etc.

**Metoda ajustării exponențiale.** Într-o formă simplă, relația de bază care se utilizează în cadrul netezirii exponențiale, este dată de expresia:

$$S_t = wy_1 + (1 - w)S_{t-1} \quad (\text{pentru } t \geq 2) \quad (3.4)$$

unde

$S_t$  - valorile ajustate ale seriei dinamice;

$y_t$  - nivelurile seriei empirice;

$S_{t-1}$  - valoarea ajustată a termenului  $t - 1$ ;

$w$  - o constantă de ajustare, cu valori cuprinse în intervalul  $0 \leq w \leq 1$ .

Pentru primii termeni ai seriei cronologice, valorile ajustate se determină astfel:

$S_1 = y_1$ , adică termenul inițial al seriei empirice.

$S_2 = wy_2 + (1 - w)S_1 = wy_2 + (1 - w)y_1$

$S_3 = wy_3 + (1 - w)S_2 = wy_3 + (1 - w)[wy_2 + (1 - w)y_1] = wy_3 + w(1 - w)y_2 + (1 - w)^2y_1$

și așa mai departe.

Generalizând, relația pentru netezirea seriilor cronologice are următoarea formă:

$$S_t = wy_t + w(1+w)y_{t-1} + w(1-w)^2y_{t-2} + \dots + (1-w)^{t-1}y_1 \quad (3.5)$$

Constanta  $w$  este aleasă arbitrar, cu o valoare între 0 și 1. Pentru valorile mici (mai apropiate de 0) se obține o netezire foarte pronunțată, iar pentru valorile mari (mai apropiate de 1) o netezire foarte slabă.

Din analiza tendințelor evidențiate de seriile dinamice, se conturează două tipuri fundamentale de trenduri: tipul **linear** și tipul **nelinear**.

Pentru tipul **linear** de trend pe termen lung, se folosește modelul linear de forma:

Are expresia:

$$Y_i = a + bx_i$$

în care:

$Y_i$  = valorile teoretice ale uneia dintre variabilele seriei cronologice;

$a$  = sintetizează valoarea acestei variabile determinată în afara variației factorului timp din interiorul intervalului delimitat de seria cronologică supusă analizei;

$b$  = are rol de spor mediu și reprezintă creșterea (când are semnul +) sau descreșterea (când are semnul -) a nivelurilor  $Y_i$  ca urmare a variației factorului timp;

$x_i$  = reprezintă factorul timp, care este exprimat, de regulă, prin rangul termenilor seriei cronologice (locul pe care acești termeni îl ocupă în cadrul șirului respectiv).

Pentru aprecierea gradului de semnificație a funcției lineare, precum și pentru calculul parametrilor  $a$  și  $b$ , se folosește metoda celor mai mici pătrate, care este sintetizată de următoarea expresie:  $\sum (y_i - Y_i)^2 \Rightarrow \min$

Condiția de minim este îndeplinită dacă derivatele parțiale în raport cu parametrii  $a$  și  $b$  tind către zero sau sunt nule.

Introducând funcția lineară în expresia celor mai mici pătrate, derivând parțial această expresie în raport cu cei doi parametri și înmulțind succesiv expresia cu derivatele respective, se obține sistemul de ecuații:



$$2\sum y_i - 2\sum a - 2\sum bx_i = 0$$

$$2\sum x_i y_i - 2\sum ax_i - 2\sum bx_i^2 = 0$$

care, în final, are următoarea formă:

$$\sum y_i = na + b\sum x_i$$

$$\sum x_i y_i = a\sum x_i + b\sum x_i^2$$

Pentru simplificarea calculului parametrilor a și b, se poate considera că dreapta intersectează seria cronologică prin centrul său; dacă seria are un număr impar de termeni atunci dreapta va trece prin termenul cu rangul  $(n + 1)/2$ , caz în care  $x_j$  ia următoarele valori:

- zero - pentru termenul central;
- -1, -2, -3,... pentru termenii care preced termenul central;
- 1, 2, 3,... pentru termenii care urmează după termenul central.

Procedeeul seamănă cu cel prezentat la calculul simplificat al mediei aritmetice ponderate.

Dacă seria are un număr par de termeni, atunci dreapta trece printre termenii centrali, caz în care  $x_j$  ia valorile:

- -1, -2, -3 , ... pentru termenii care preced punctul de intersecție
- 1, 2, 3 , ... pentru cei care urmează.

În ambele cazuri:  $\sum x_i = 0$ , ceea ce face ca din sistemul de ecuații prezentat să se ajungă la:

$$\sum y_i = na \Rightarrow a = \frac{\sum y_i}{n}$$

$$\sum x_i y_i = b\sum x_i^2 \Rightarrow b = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

De fapt  $\sum x_i = 0$  nu este altceva decât  $\sum(x_i - x_c) = 0$  în care  $x_c$  este rangul termenului central. Cunoscând valorile celor doi parametri, se trece la calculul valorilor teoretice  $Y_j$  pentru fiecare  $x_j$  corespunzător.

Valorile teoretice  $Y_j$  se înscriu pe o linie dreaptă. Deci, prin aplicarea funcției lineare, se elimină în totalitate fluctuațiile evolutive întâmplătoare, metoda fiind recomandată pentru determinarea și analiza tendințelor lineare. În cadrul metodei se evidențiază următoarea proprietate:

$$\sum y_i = \sum Y_i ; \bar{y} = \bar{Y}$$

Această proprietate este folosită ca test de control.

**Pentru tipul nelinear de trend pe termen lung, se folosește cel mai des funcția parabolică de ordinul 2.**

Are expresia:

$$Y_i = a + bx + cx^2$$

Elementele componente au aceeași semnificație; parametrul c are același rol ca parametrul b; el provoacă însă inflexiunea parabolei. Structura funcției, evidențiază faptul că partea de început ( $a + bx$ ), este lineară; pe măsură ce crește valoarea lui  $x_j$ , influența parametrului c este din ce în ce mai pronunțată, determinând curbura parabolei, cu orientarea

în sens crescător - dacă c este pozitiv, sau cu orientarea în sens descrescător - dacă c este negativ.

Calculul parametrilor a, b, c, este similar cu cel de la funcția lineară, putându-se folosi și procedeul de calcul simplificat.

Sistemul de ecuații - în formă finală - este:

$$\begin{aligned}\sum y_i &= na + b \sum x_i + c \sum x_i^2 \\ \sum x_i y_i &= a \sum x_i + b \sum x_i^2 + c \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 y_i &= a \sum x_i^2 + b \sum x_i^3 + c \sum x_i^4\end{aligned}$$

În cazul folosirii calculului simplificat, caz în care:

$$\sum x_i = \sum x_i^3 = 0$$

se ajunge la:

$$\begin{aligned}\sum y_i &= na + c \sum x_i^2 \\ \sum x_i y_i &= b \sum x_i^2 \\ \sum x_i^2 y_i &= a \sum x_i^2 + c \sum x_i^4\end{aligned}$$

Din ecuația a doua, se calculează direct parametrul b, care - după cum se observă - are aceeași valoare de la funcția lineară. Deci:

$$b = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

Parametrii a și c pot fi determinați prin metoda considerată ca fiind cea mai operativă. De exemplu, în cazul folosirii determinanților:

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= \begin{vmatrix} n & \sum x_i^2 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^4 \end{vmatrix} & \Delta_1 &= \begin{vmatrix} \sum y_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i y_i & \sum x_i^4 \end{vmatrix} \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} n & \sum y_i \\ \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \end{vmatrix} & a &= \frac{\Delta_1}{\Delta_0} & c &= \frac{\Delta_2}{\Delta_0}\end{aligned}$$

După calculul acestor parametri, valorile parabolei se determină pentru fiecare  $x_i$  corespunzător, în același mod în care a fost prezentată determinarea valorilor funcției lineare, prin procedeul simplificat.

Funcția parabolică verifică proprietatea :

$$\sum y_i = \sum Y_i ; \bar{y} = \bar{Y}$$

Este recomandată pentru tendințe nelineare.

#### 7.4 Determinarea tendințelor evolutive sezoniere

Într-o serie cronologică de lungime suficient de mare, față de tendința centrală, se întâlnesc oscilații sau variații periodice sistematic repetabile. În funcție de natura factorilor de influență care determină aceste oscilații, de mărimea perioadelor la care se manifestă repetabilitatea acestora, se identifică variații *ciclice* sau *sezoniere*.

Oscilațiile ciclice sunt fluctuații în jurul trendului (de tip sinusoidal) repetabile la perioade mai mari de un an. Un ciclu cuprinde mai multe faze: expansiune, criză, recesiune, relansare.

Ciclicitatea este determinată de factori de natură diversă care acționează asupra fenomenului analizat. În teoria economică unii cercetători nu sunt de acord cu existența ciclurilor, iar alții le aprofundează din punct de vedere metodologic și le clasifică în: cicluri lungi de tip Kondratiev (cu periodicitate la 50 ani); cicluri de tip jugular (cu periodicitate de aproximativ 9 ani); cicluri Kitchin și cicluri politico-economice etc.

O caracteristică a oscilațiilor sezoniere o reprezintă faptul că se produc cu o periodicitate constantă: anual, trimestrial, lunar, decadal etc.

Pentru unele serii cronologice este ușor de semnalat dacă tendința evolutivă are sau nu caracter sezonier sau ciclic. De exemplu, producția de becuri pentru iluminatul casnic sau public nu are nici o legătură cu anotimpurile anului sau cu o anumită perioadă a acestuia; ea este strict legată de nevoia socială și de capacitatea productivă a firmelor specializate. În consecință, pentru analiza tendinței evolutive se pot aplica direct metodele analitice adecvate, separându-se în final, dacă este cazul, tendința propriu-zisă (tendința explicată prin metoda sau funcția statistico-matematică) și tendința reziduală.

Pentru fenomenele și procesele a căror evoluție este dependentă de anotimpurile anului sau de o anumită perioadă a acestuia, se folosesc funcții statistico-matematice complexe, care includ, de regulă, toate componentele.

Astfel, dacă analizăm producția marfă a unei firme industriale pe o perioadă de cinci ani (evidențiată trimestrial) și constatăm că într-un anumit trimestru (de exemplu trimestru 4) al fiecărui an există valori mult mai mari decât în celelalte trimestre, putem afirma că am identificat caracterul sezonier al unor produse.

În acest caz componentele tendinței evolutive vor fi evidențiate mai întâi separat și apoi sintetizate prin intermediul unei funcții complexe.

**A. Tendința propriu-zisă (trendul).** Pentru a evidenția separat tendința propriu-zisă este necesară eliminarea componentei sezoniere; în acest scop se pot utiliza mai multe metode. Vom prezenta în continuare o metodă care pentru a elimina sezonalitatea va utiliza *indicii de sezonalitate*.

Datele necesare sunt prezentate în tabelul 7.1.

Indicii sezonality prezentati în tabelul 7.1 s-au determinat ca raport între mediile trimestrelor 2, 3 și 4, luate succesiv și media trimestrelor 1.

Exemplu: indicele sezonality aferent trimestrelor 2 din toți anii este rezultatul raportului dintre media trimestrelor 2 și media trimestrelor 1, adică:  $1,183 = 71/60$ . În mod similar, indicele corespunzător trimestrelor 3 este:  $1,233 = 74/60$  etc.

Tab. 7.1 Date necesare determinării trendului propriu-zis

Specificatia	Trim	1	2	3	4
	Anul				
Valorile initiale $y_x$	2001	54	66	68	159
	2002	57	69	71	168
	2003	63	74	72	177
	2004	66	75	85	184
Valorile trimestriale	Totale	240	284	296	688
	Medii	60	71	74	172
Indicii sezonality		1,00	1,183	1,233	2,867
Valorile ajustate (desezonalizate) $y_x^T$	2001	54	56	55	56
	2002	57	58	58	59
	2003	63	62	58	62
	2004	66	63	69	64

Pentru calculul acestor indicatori se poate folosi și următoarea metodologie:

> se determină media generală a tuturor trimestrelor:

$$94,25 = (60 + 71 + 74 + 172)/4$$

> se calculează indicii sezonality în raport cu media generală, astfel:

- pentru trim. 1  $60/94,25 = 0,637$
- pentru trim. 2  $71/94,25 = 0,753$
- pentru trim. 3  $74/94,25 = 0,785$
- pentru trim. 4  $172/94,25 = 1,826$

> se calculează indicii sezonality în raport cu trim. 1:

- pentru trim. 2  $0,753/0,637 = 1,183$
- pentru trim. 3  $0,785/0,637 = 1,233$
- pentru trim. 4  $1,826/0,637 = 2,867$

Evident, s-au obținut aceleași rezultate. Recomandăm metoda directă, în cadrul căreia indicii sezonality, determinați în raport cu trim.1, se obțin prin raportarea mediilor trim. 2, 3 și 4 la media trim. 1.

Valorile ajustate ( $y_x^T$ ) desezonalizate se determină ca raport între valorile inițiale ( $y_x$ ) și indicii de sezonality corespunzători trimestrelor respective.

Facem observația că pentru trimestrele 1 ale fiecărui an, valorile ajustate sunt identice cu cele inițiale, corespunzătoare trimestrelor 1 din fiecare an.

Pentru trimestrele 2, valorile ajustate sunt:

- trim.2 din 2001:  $66/1,183=56$
- trim.2 din 2002:  $69/1,183=58$
- trim.2 din 2003:  $74/1,183=62$
- trim.2 din 2004:  $75/1,183=63$

În mod similar au fost determinate și celelalte valori.

Dacă, din analiza valorilor ajustate ( $y_x^T$ ), se observă faptul că tendința evolutivă este de tip linear, atunci pentru evidențierea trendului propriu-zis se poate folosi funcția lineară  $Y_x^T = \beta_0 + \beta_1 t$  ai cărei parametri  $\beta_0$  și  $\beta_1$  se pot calcula conform metodologiei prezentată la funcția lineară.

**B. Tendința sezonieră.** Ca alternativă la calculul și utilizarea indicilor de sezonality în măsurarea variațiilor sezoniere, se poate folosi o mulțime de **variabilele indicatoare**.

De exemplu, dacă sezoanele sunt trimestrele unui an, se utilizează următoarea funcție complexă:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 Q_1 + \beta_3 Q_2 + \beta_4 Q_3 + \varepsilon$$

unde

$t$  = factorul timp (perioada din cadrul seriei cronologice);

$Q_1 = 1$  pentru trimestrul 1 și  $Q_1 = 0$  pentru celelalte trimestre;

$Q_2 = 1$  pentru trimestrul 2 și  $Q_2 = 0$  pentru celelalte trimestre;

$Q_3 = 1$  pentru trimestrul 3 și  $Q_3 = 0$  pentru celelalte trimestre.

Astfel, pentru fiecare perioadă de timp, variabilele indicatoare  $Q_1$ ,  $Q_2$  și  $Q_3$  sunt utilizate pentru a reprezenta trimestrele. Coeficienții  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_3$  și  $\beta_4$  se pot determina cu un program de analiză statistică, iar ecuația regresiei se va utiliza pentru determinarea previziunilor.

În funcția complexă de mai sus,  $\beta_0 + \beta_1 t$  reprezintă trendul propriu-zis, iar  $\beta_2 Q_1 + \beta_3 Q_2 + \beta_4 Q_3$  tendința sezonieră.

## 7.5 Estimarea tendințelor evolutive

Extrapolarea presupune determinarea nivelurilor estimative pentru perioadele viitoare, folosind ca bază de calcul parametrii funcției statistico-matematice la care - după utilizarea ei în analiza retrospectivă a fenomenului studiat - expresia  $\sum (y - Y)^2$  a avut nivelul cel mai mic.

De pildă, dacă în cadrul analizei tendinței evolutive a unei variabile dintr-o serie cronologică dată, parabola de ordinul 2 a dat rezultatele cele mai bune, îndeplinind cel mai bine condiția de minim impusă de metoda celor mai mici pătrate, atunci nivelurile estimative ale acestei variabile pentru perioadele viitoare se vor stabili astfel: se preiau valorile parametrilor  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  și se dau valori în continuare variabilei ce reprezintă timpul; cu noile valori se determină nivelurile estimative ale lui  $Y$ .

Pentru creșterea gradului de precizie a estimărilor respective, se poate folosi "orizontul previzional", care se determină cu ajutorul uneia dintre relațiile:

$$\pm \Delta_y = \pm \xi \quad \text{sau} \quad \pm \Delta_y = \pm \frac{Y_i \cdot v}{100} \quad 3.9$$

Intervalul de încredere stabilit cu ajutorul acestui indicator:

$$(Y_i - \Delta_y) \leq Y_i \leq (Y_i + \Delta_y) \quad 3.10$$

$Y_i$  = nivelurile funcției folosite atât în cadrul analizei tendinței retrospective, cât și în determinarea nivelurilor estimative pentru perioadele viitoare;

$i$  = numărul de ordine al valorilor  $Y_i$  din seria completă a acestor valori;

$\xi$  = eroarea medie a estimației, determinată cu ajutorul relației:

$$\xi = \sqrt{\frac{\sum (y_i - Y_i)^2}{n}} \quad 3.11$$

$v$  = coeficientul de variație, determinat cu ajutorul relației:

$$v = \frac{\xi}{Y} \cdot 100 \quad 3.12$$

Prima relație a orizontului previzional se folosește în cadrul tendințelor lineare, iar cea de-a doua în cazul tendințelor nelineare. Limitele primului interval, adică :  $Y_i - \xi$  și  $Y_i + \xi$  se înscriu pe linii drepte paralele.

Limitele celui de-al doilea interval:  $Y_i - (Y_i \cdot v) / 100$  și  $Y_i + (Y_i \cdot v) / 100$ , se înscriu pe linii curbe, ce se îndepărtează treptat una de cealaltă, dacă  $Y_i$  crește pe măsură ce se înaintează cu previziunea în viitor.

S-a observat faptul că, în cadrul extrapolării sunt destul de frecvente cazurile în care unele funcții statistico-matematice dau rezultate mai slabe în comparație cu rezultatele obținute cu aceleași funcții, utilizate însă în analiza retrospectivă a trendului empiric. Altfel spus, valorile finale ale acestor funcții - din cadrul estimației perspectivei tendinței evolutive - sunt de multe ori exagerat de mari sau exagerat de mici. Din acest motiv, se impune testarea unor game largi de funcții, alegându-le pe cele care oferă posibilitatea corectării liniei de tendință și, în plus, oferă și posibilitatea reactualizării tendințelor determinate cu ajutorul lor, fără să fie necesară refacerea calculului precedent.

Având în vedere unele rezultate experimentale, verificate în diverse situații, se poate aprecia că, funcțiile complexe sau funcțiile logistice rezolvă într-o foarte mare măsură această problemă.