

# 1

## SERII STATISTICE ȘI REPREZENTĂRI GRAFICE

### 1.1. Scurt istoric

Rădăcinile statisticii sunt fixate în antichitate odată cu primele însemnări cantitative legate de populație<sup>1</sup>.

Originea termenului statistică se regăsește în cuvântul italian *stato* (stat). Mai târziu, pornind de la acesta a apărut un nou termen *statista* care semnifica persoană ce desfășura afaceri cu statul. Astfel, cuvântul statistică, semnifica la început colecție de fapte utile unui *statista*. Cu acest înțeles Statistica a fost utilizată în Italia în secolul 16, apoi a fost preluată în Franța, Olanda și Germania. Astăzi acest termen semnifică mult mai mult decât date referitoare la stat, extinzându-se la aproape oricare domeniu.

### 1.2. Noțiuni fundamentale

În domeniul Statisticii se operează cu o serie de noțiuni specifice, cum ar fi: date, statistice, variabile de grupare, unitate statistică, populație, eșantion.

*Definiție:*

- Populație statistică** - mulțime de elemente supusă studiului, bine delimitată spațial și temporal, caracterizată printr-un anumit volum și o structură proprie;
- Unitate statistică** - element fundamental al populației de bază care poate fi caracterizat printr-un set de trăsături specifice ce fac obiectul unei cercetări;
- Eșantion** - reprezintă numărul de unități statistice ce urmează a fi extrase și cercetate, dintr-un populație statistică.
- Variabilă de grupare** - caracteristică ce permite gruparea în clase omogene a unităților statistice dintr-o colectivitate dată sau permite urmărirea în timp sau în spațiu a modificării unei alte variabile.
- Date statistice** - valori aferente variabilelor de grupare, prin care se studiază unitățile statistice dintr-o populație, determinate pe baza unei scale de măsurare.

Orice demers statistic, înainte de a trece efectiv la calculul indicatorilor utilizați în analiza datelor, conține un set de metode pentru o prelucrarea și organizare primară a datelor brute culese.

Una dintre acestea este organizarea datelor în serii statistice.

---

<sup>1</sup> Vezi A. Hald – *A history of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*, New York, Wiley, 1990.

Pentru a putea construi o serie statistică trebuie mai întâi clarificate tipurile variabilelor urmărite în studiul statistic.

### 1.3. Variabila de grupare

**Tipuri:** Variabilele de grupare pot fi clasificate în mai multe categorii după următoarele criterii:

**a) După conținut:**

- **variabile atributive** - sunt atribute, însușiri ale unităților statistice dintr-o colectivitate dată, în funcție de care se face gruparea în clase omogene.  
*Exemplu:* sexul, vârsta, profesia, productivitatea, vechimea în muncă, salariul etc.
- **variabile de timp** - acestea permit cunoașterea tendințelor evolutive ale unui fenomen oarecare.  
*Exemplu:* ziua, luna, trimestrul, semestrul, anul etc.

Variabilele de timp, dat fiind modalitatea în care sunt folosite în domeniul economic, mai pot fi împărțite convențional în două categorii: variabile de *momente* de timp și variabile de *intervale* de timp.

*Variabilele de momente* de timp vizează durate de timp *mai mici sau egale cu ziua*, iar cele de *intervale de timp*, vizează durate de timp *mai mari* decât o zi.

- **variabile de spațiu** - oferă posibilitatea cunoașterii variabilității unui fenomen în profil teritorial (în spațiu).  
*Exemplu:* secția, întreprinderea, localitatea, județul, țara etc.

**b) După forma de exprimare:**

- **variabile cantitative** - au variantele exprimate prin cifre, sunt variabile *numerice*.

**Pentru acest tip de variabile operațiile aritmetice trebuie să aibă sens.**

*Exemplu:* nota la un examen, greutatea, înălțimea, salariul, vârsta etc.

Variabilele cantitative pot fi grupate în două categorii, dacă ținem cont de valorile pe care le pot lua:

- *discrete* - pot lua decât anumite valori, de obicei întregi.  
*Exemplu:* populația unei localități, nota la examen, numărul de muncitori, productivitatea muncii exprimată în bucăți etc.
- *continue* - pot lua orice valoare dintr-un anumit interval.  
*Exemplu:* media anilor de studiu, greutatea, salariul, productivitatea muncii exprimată valoric etc.
- **variabile calitative** - au variantele exprimate numai prin cuvinte. Sunt folosite pentru a realiza distincția între mai multe categorii.  
*Exemplu:* sexul, profesia, culoarea ochilor, nivelul de instruire, naționalitatea etc.

Pentru o variabilă calitativă se poate utiliza și o codificare numerică, dar aceasta nu înseamnă că variabila a devenit cantitativă deoarece în continuare operațiile aritmetice nu au sens pentru valorile atribuite.

**Exemplu 1.1:** Modul de codificare al variabilei *sex* în prima cifră a codului numeric personal.

Tabelul 1.1.

Variabila inițială	Variabila după codificare
Bărbătesc	1
Femeiesc	2

Se poate, în schimb, realiza trecerea de la o variabilă de tip cantitativ la una de tip calitativ tot printr-o operație de codificare:

**Exemplu 1.2:** Modul de codificare al greutateii unei persoane adulte:

Tabelul 1.2.

Variabila inițială	Variabila după codificare
→50	Mică
50-75	Medie
75-90	Mare
90 →	Foarte mare

În Statistică, pentru orice variabile studiate, se înregistrează valori care pot fi cantitative sau calitative, în funcție de tipul acestora.

Fiecare dintre aceste valori pot fi determinate utilizând diferite scale de măsurare. Există patru astfel de tipuri de scale de măsurare care sunt descrise în continuare pornind de la cea simplă către cea mai complexă.

a) **Scala nominală** – valorile determinate cu ajutorul aceste scale permit doar încadrarea elementele unei populații în categorii. Cu ajutorul valorilor astfel determinate nu se pot realiza ierarhii între elementele populației studiate.

**Exemplu 1.3:** În cazul variabilei culoarea ochilor studenții dintr-un an pot fi grupați în următoarele categorii:

Tabelul 1.3

Culoarea ochilor	Albaștri	Verzi	Negri	Căprui	Total
Număr de persoane	30	21	15	294	360

Pe baza acestor valori nu putem spune decât că studenții se pot distribui în cele patru categorii, fără a putea face vreo apreciere de genul studenții dintr-o categorie sunt primii în ierarhie. Culoarele enumerate mai sus nu fac parte dintr-o mulțime în care operația de ordonare să aibă sens.

b) **Scala ordinală** – valorile determinate cu ajutorul său permit realizarea de ierarhii.

**Exemplu 1.4:** Putem determina preferința consumatorilor pentru un anumit produs prin atribuirea unui calificativ de genul: cel mai bun, bun, normal, mai puțin bun, cel mai puțin bun. În locul calificativelor putem înregistra valori numerice, cum ar fi: 1 = cel mai bun, 2 = bun, 3 = normal, 4 = mai puțin bun, 5 = cel mai puțin bun. Folosind oricare dintre variantele de înregistrare a valorilor nu putem spune că un produs căruia i s-a atribuit

calificativul cel mai bun (1) este de trei ori mai bun decât unul care a primit calificativul normal (3) sau de 5 ori mai bun decât un produs care a primit calificativul cel mai puțin bun (5), chiar și dacă aceste calificative au fost date de același consumator. Scala ordinală nu permite determinarea cu exactitate a distanței dintre două valori.

c) **Scala interval** – valorile determinate cu ajutorul său pot fi utilizate în calculul proporțiilor pentru intervale determinate între valoarea 0 (origine) pe scala și acestea. Valorile nu pot fi utilizate direct în calculul proporțiilor deoarece valoarea 0 este aleasă convențional și nu semnifică absența fenomenului studiat.

**Exemplu 1.5 :** Un exemplu ușor de înțeles pentru acest tip de scală este modul în care măsurăm timpul de-a lungul unei zile. Ora  $00^{00}$  nu înseamnă absența timpului. Nu putem spune că  $08^{00}$  este de două ori mai mare decât  $04^{00}$  dar putem spune că intervalul de timp  $00^{00}$ - $08^{00}$  este de două ori mai mare decât  $00^{00}$ - $04^{00}$ .

Un alt exemplu este scala de măsurare a temperaturii în grade Celsius sau Fahrenheit.  $0^{\circ}\text{C}$  nu semnifică absența căldurii<sup>2</sup>. De asemenea, nu putem spune că  $60^{\circ}\text{C}$  înseamnă de două ori mai cald decât  $30^{\circ}\text{C}$ , dar putem spune că pentru a crește temperatura unui obiect de la  $0^{\circ}\text{C}$  la  $60^{\circ}\text{C}$  este necesară de două ori mai multă căldură decât pentru a-i crește temperatura până la  $30^{\circ}\text{C}$ .

d) **Scala proporțională (de raport)** – este cel mai complet tip de scală, valorile determinate cu ajutorul ei putând fi utilizate pentru toate tipurile de operații aritmetice. În cazul acestei scale valoarea 0 este 0 absolut și înseamnă absența fenomenului studiat.

**Exemplu 1.6:** 0 lei înseamnă lipsa banilor, 100 lei înseamnă de de două ori mai mult decât 50 lei.

Tabelul 1.4

Tipuri de scale	Relații matematice care au sens	Indicatori ai tendinței centrale posibil de calculat
<b>Nominală</b>	- echivalență	dominanta
<b>Ordinală</b>	- echivalență - ordine	mediana
<b>Interval</b>	- echivalență - ordine - raport între două intervale	media aritmetică
<b>Proporțională</b>	- echivalență - ordine - raport între două intervale - raport între două valori de pe scală	media geometrică

*Tipul variabilei de grupare determină tipul seriei statistice ce va fi obținut, implicit modul de reprezentare grafică și de analiză a datelor.*

---

<sup>2</sup> Scala de măsurare a temperaturii a fost construită pornind de la două puncte: punctul de îngheț al apei căruia i-a fost atribuită valoarea  $0^{\circ}\text{C}$ , și punctul de fierbere al apei, căruia i-a fost atribuită valoarea  $100^{\circ}\text{C}$ . Restul valorilor s-au determinat prin împărțirea în părți egale a porțiunii de scală cuprinsă între cele două valori.

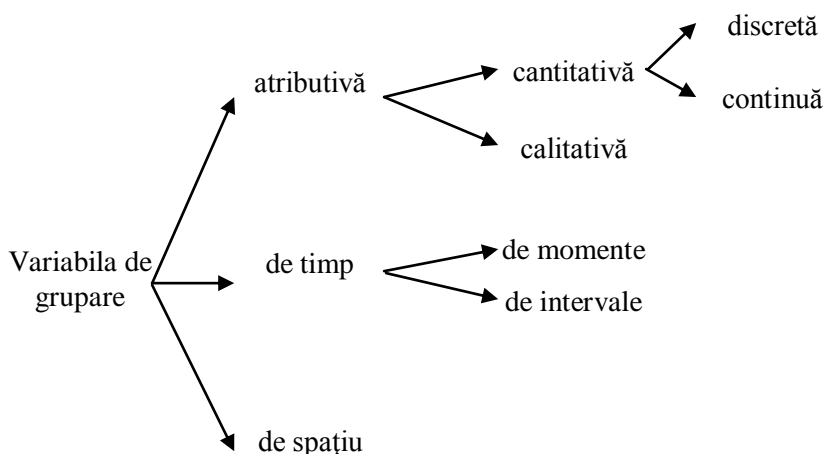


Figura 1.1. Tipuri de variabile de grupare

## 1.4. Serii statistice

**Definiție: Seria statistică** – reprezintă o paralelă între două sau mai multe șiruri de date dintre care cel puțin unul vizează variabila de grupare.

Seriile statistice pot fi:

- serii simple - atunci când sunt construite dintr-o paralelă între două șiruri de date și conțin o singură variabilă de grupare;
- serii complexe - atunci când sunt construite dintr-o paralelă între trei sau mai multe șiruri de date și conțin cel puțin o variabilă de grupare;

Seriile complexe sunt constituite, în general, din mai multe serii simple.

Având în vedere tipurile de variabile de grupare și dependența tipului de serie de tipul variabilei de grupare se pot distinge următoarele tipuri de serii statistice:

- serii de distribuție (repartiții);
- serii cronologice (de timp);
- serii de spațiu (teritoriale).

### 1.4.1. Serii de distribuție

**Condiții:** Se pot construi numai pe baza variabilelor de grupare atributive.

**Tipuri:**

Ca serie simplă (unidimensională), seria de distribuție este o paralelă între șirul variantelor sau intervalelor de variație ale variabilei de grupare atributive și cel al frecvențelor corespunzătoare.

Ca serie complexă (bidimensională, tridimensională etc.), seria de distribuție este constituită din cel puțin două șiruri de date care vizează variabilele de grupare atributive alături de șirul frecvențelor corespunzătoare.

**Exemplu 1.7:**

Distribuția muncitorilor din Firma X după salariu

Salariul (mil. lei)	Nr. de muncitori
1,5-2,0	3
2,0-2,5	12
2,5-3,0	25
3,0-3,5	20
3,5-4,0	10
Total	80

Notă. Limita inferioară se include în interval.

Figura 1.2. Serie de distribuție simplă, după intervale.

Distribuția muncitorilor din Firma X după categoria de calificare

Cat. de calificare	Nr. de muncitori
I	3
II	22
III	35
IV	20
V	10
Total	90

Figura 1.3. Serie de distribuție simplă, după variante

Distribuția muncitorilor unei firme după vârstă și vechime în întreprindere.

vechimea (ani) \ vârsta (ani)	1	5	10	15	20	25	Total
	- 5	- 10	- 15	- 20	- 25	- 30	
18-25	1						1
25-32		2					2
32-39			3	2			5
39-46				3	1		4
46-53				1	2	3	6
53-60					2	2	4
Total	1	2	3	6	5	5	22

Notă. Limita inferioară se include în interval.

Figura 1.4. Serie de distribuție bidimensională

Mod de construcție:

**Serie de distribuție simplă**

Dacă variabila de grupare atributivă este și calitativă, seria de distribuție care se obține este una după variante.

Dacă variabila de grupare atributivă este cantitativă și continuă, seria de distribuție care se obține este una după intervale de variație.

Dacă variabila de grupare atributivă este cantitativă, discretă și are un domeniu redus de variație, seria de distribuție care se obține este una după variante, iar dacă are un

domeniu larg de variație atunci este recomandată construirea unei serii de distribuție după intervale de variație.

În cazul construcției unei serii de distribuție după variante (figura 1.3) nu se ridică probleme deosebite. După ce se determină variantele caracteristicii de grupare, se trece la construirea frecvențelor, prin simpla numărare a unităților statistice din colectivitatea studiată care se încadrează pentru fiecare variantă în parte.

În exemplul prezentat în figura 1.3, după identificarea celor cinci variante regăsite la nivelul colectivității de muncitori supuse studiului pentru caracteristica de grupare (*categoria de calificare*), s-au identificat, câți dintre cei 90 de muncitori s-au încadrat într-una din variante.

În cazul construcției unei serii de distribuție după intervale de variație se cer clarificate câteva elemente:

1. Câte intervale ar trebui construite?
2. Care ar trebui să fie mărimea unui interval?

Numărul și mărimea intervalelor sunt factori care influențează direct modul în care unitățile statistice din colectivitatea studiată se vor repartiza în cadrul intervalelor de variație, altfel spus influențează forma distribuției și implicit mărimea și semnificația indicatorilor sintetici ce vor fi calculați pe baza acesteia.

Pentru construirea unui asemenea tip de serie mai frecvent se utilizează următoarele variante:

1. se stabilește empiric un anumit număr de intervale ( $n$ ), pornind de la ideea că cel care urmează să construiască seria beneficiază de o bogată experiență teoretică și practică în domeniu, caz în care rămâne de determinat doar mărimea intervalelor. Aceasta se poate determina cu ajutorul relației:

$$k = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n}$$

unde

$x_{\max}, x_{\min}$  - valoarea maximă respectiv minimă a caracteristicii de grupare studiate

2. se determină numărul intervalelor folosind relația determinată experimental de statisticianul american H.A. Sturges

$$n = 1 + 3.322 \log N$$

unde  $\log N$  - logaritmul în baza 10 din numărul total de unități statistice din populația studiată

În acest caz va fi necesară rotunjirea la un număr întreg a valorii lui ( $n$ ) determinate prin relația lui Sturges și apoi se determină mărimea intervalelor ( $k$ ) folosind relația anterioară.

După determinarea numărului și mărimii intervalelor de variație se trece la determinarea limitelor fiecărui interval.

Se pornește de la valoarea minimă a caracteristicii de grupare ( $x_{\min}$ ) care va constitui limita inferioară a primului interval. Limita superioară a intervalului va fi determinată adăugând mărimea intervalului ( $k$ ) la limita anterioară. Limita superioară a

intervalului precedent se preia ca limită inferioară pentru intervalul următor și se continuă până la determinarea tuturor limitelor celor ( $n$ ) intervale.

**Exemplu 1.8:** Pentru  $x_{min} = 10$ ,  $x_{max} = 85$  și  $k = 15$  putem construi următoarele intervale:

Tabelul 1.5

$x_i$
10 – 25
25 – 40
40 – 55
55 – 70
70 – 85

După construirea intervalelor se trece la determinarea numărului de unități statistice ce se încadrează pe fiecare interval.

Se are în vedere faptul că o limită de interval poate apare la două intervale adiacente, caz în care, dacă se întâlnește printre datele brute o valoare egală cu valoarea limitei respective, se pune problema în care din cele două intervale va fi încadrată. Pentru eliminarea acestei situații intervalele anterior determinate vor fi închise la unul din capete și deschise la celălalt, iar printr-o notă sub tabelul distribuției va fi precizat care dintre limite este inclusă în interval.

Excepție de la regula de închidere a intervalelor fac primul și ultimul interval. Primul se închide obligatoriu la limita inferioară, iar ultimul la limita superioară, eliminând astfel și posibilitatea ca  $x_{min}$  sau  $x_{max}$  să nu fie incluse în nici un interval.

Numărul de unități statistice ce se încadrează pe fiecare interval poartă numele de frecvență de apariție sau **frecvență absolută (f)**.

La finalul operației de determinare a frecvențelor de absolute se poate face o verificare:

$$\sum_{i=1}^n f_i = N$$

unde  $i$  - intervalul pentru care s-a determinat frecvența absolută  $f_i$ .  
Această verificare nu evidențiază erorile de compensare.

**Exemplu 1.9:** Se consideră următoarele date referitoare la muncitorii unei secții de fabricație dintr-o întreprindere:



Tabelul 1.6.

Nr. crt	productivitatea orară muncii ( $w_h$ ) -mii lei-	salariul (s) -mil. lei-	Nr. crt	productivitatea orară muncii ( $w_h$ ) -mii lei-	salariul (s) -mil. lei-
1	105	1,7	10	131	2,8
2	100	1,9	11	133	2,8
3	103	2,1	12	122	2,2
4	111	2,2	13	138	2,4
5	119	2,1	14	129	2,8
6	150	3,2	15	124	2,7
7	148	3	16	122	2,4
8	141	3	17	125	2,5
9	115	2,5	18	128	2,5

Construim seria de distribuție numai după variabila salariu.

Variabila de grupare **salariul** este de tip atributiv, este cantitativă și cu variație continuă, deci tipul de serie care se poate construi cu ajutorul său este : serie de distribuție după intervale de variație.

Calculăm numărul și mărimea intervalelor :

$$n = 1 + 3.322 \log 18 = 5.170015 \approx 5 \text{ intervale}$$

$$k = \frac{3.2 - 1.7}{5} = 0.30 \text{ mil. lei}$$

Construim intervalele și apoi distribuția incluzând în interval limita inferioară:

Tabelul 1.7.

Salariul (s) -mil. lei-	Nr. de muncitori
1,7-2,0	2
2,0-2,3	4
2,3-2,6	5
2,6-2,9	4
2,9-3,2	3
<b>Total</b>	<b>18</b>

Notă: Limita inferioară este inclusă în interval.

Se observă că se verifică egalitatea dintre suma frecvențelor absolute și numărul de unități statistice din populație.

$$2+4+5+4+3=18$$

### Serie de distribuție bidimensională

Principiile folosite pentru construcția unei serii de distribuție bidimensionale sunt aceleași ca și pentru seriile de distribuție simple, diferențieri apar doar datorită faptului că în acest caz se lucrează simultan cu două variabile de grupare.

În funcție de tipul celor două variabilelor atributive care sunt folosite la construirea seriei putem obține patru variante de serie:

- serie de distribuție după intervale pentru prima variabilă de grupare și după intervale pentru a doua variabilă de grupare;

- serie de distribuție după intervale pentru prima variabilă de grupare și după variante pentru a doua variabilă de grupare;
- serie de distribuție după variante pentru prima variabilă de grupare și după intervale pentru a doua variabilă de grupare;
- serie de distribuție după variante pentru prima variabilă de grupare și după variante pentru a doua variabilă de grupare.

Pentru construirea intervalelor se procedează la fel ca la seria de distribuție simplă.

Vom exemplifica modul de construcție pentru o serie de distribuție bidimensională folosind datele de la exemplul anterior.

**Exemplul 1.10:** Identificăm tipul variabilelor de grupare:

- productivitatea orară a muncii (mii lei) – variabilă atributivă, cantitativă și cu variație continuă;
- salariul (mil. lei) – variabilă atributivă, cantitativă și cu variație continuă.

Dacă între cele două variabile de grupare există o relație de dependență (așa cum se întâmplă în cazul de față - salariul depinde de productivitate), atunci variabila independentă va fi plasată în prima coloană a tabelului iar cea dependentă în prima linie a tabelului seriei de distribuție.

Seria de distribuție va fi construită după intervale de variație pentru ambele variabile de grupare.

Se determină numărul de intervale pentru prima variabilă de grupare – productivitatea orară a muncii (X):

$$n = 1 + 3.322 \log 18 = 5.170015 \approx 5 \text{ intervale}$$

Este același număr de intervale determinat și în cazul salariului.

$$k = \frac{150 - 100}{5} = 10 \text{ mii lei}$$

Pentru salariu (Y) valorile privind mărimea și numărul de intervale au fost determinate în exemplul precedent:

$$n \approx 5 \text{ intervale}; k = 0.30 \text{ mil. lei}$$

Construim tabelul seriei de distribuție bidimensională :

Tabelul 1.8.

X \ Y	1,7	2,0	2,3	2,6	2,9	f <sub>x</sub>
	- 2,0	- 2,3	- 2,6	- 2,9	- 3,2	
100-110	2	1		0	0	3
110-120	0	2	1	0	0	3
120-130	0	1	3	2	0	6
130-140	0	0	1	2	0	3
140-150	0	0	0	0	3	3
f <sub>y</sub>	2	4	5	4	3	18

Notă: Limita inferioară este inclusă în interval.

Pentru determinarea frecvențelor absolute după ambele variabile – zona gri din tabel – se procedează la gruparea fiecărei perechi de valori (x,y) în caseta corespunzătoare din tabel:

- muncitorul nr. 1 x=105, y=1,7 va fi încadrat în caseta de la intersecția rândului 100-110, cu coloana 1,7-2,0;

- muncitorul nr. 2  $x=100, y=1,9$  va fi încadrat în caseta de la intersecția rândului 100-110, cu coloana 1,7-2,0;

.....

Se continuă până la terminarea perechilor de valori  $(x,y)$ , în casete la final regăsindu-se frecvența de apariție a cazurilor.

Și în cazul seriei de distribuție bidimensionale se pot face câteva verificări:

$$\sum_{i=1}^n f_{x_i} = \sum_{j=1}^n f_{y_j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij} = N$$

unde:

- $f_{x_i}$  - frecvențe absolute determinate numai după variabila X, ignorând variabila Y;
- $f_{y_j}$  - frecvențe absolute determinate numai după variabila Y, ignorând variabila X;
- $f_{ij}$  - frecvențe absolute duble determinate simultan după ambele variabile X și Y (se află poziționate în zona gri din tabel);

Tabelul unei serii de distribuție bidimensionale conține de fapt trei distribuții:

1. Distribuția unităților statistice numai după prima variabilă de grupare (X), dacă din tabel se separă prima și ultima coloană – serie de distribuție simplă numai după variabila X, ignorând variabila Y.

Tabelul 1.9.

<i>Productivitatea orară a muncii (<math>w_h</math>) -mii. lei-</i>	<i>Nr. de muncitori</i>
100-110	<b>3</b>
110-120	<b>3</b>
120-130	<b>6</b>
130-140	<b>3</b>
140-150	<b>3</b>
<b>Total</b>	<b>18</b>

2. Distribuția unităților statistice numai după a doua variabilă de grupare (Y), dacă din tabel se separă prima și ultima linie – serie de distribuție simplă numai după variabila Y, ignorând variabila X.

Tabelul 1.10.

<i>Salariul (<math>s</math>) -mil. lei-</i>	<i>Nr. de muncitori</i>
1,7-2,0	2
2,0-2,3	4
2,3-2,6	5
2,6-2,9	4
2,9-3,2	3
<b>Total</b>	<b>18</b>

3. Distribuția bidimensională - după ambele variabile X și Y – tot tabelul.

În cadrul seriilor de distribuție se pot utiliza mai multe tipuri de frecvențe. Cel mai des întâlnite sunt:

- frecvențele absolute ( $f_i$ ) - arată numărul de cazuri ce corespunde unui interval de variație sau variante;

- frecvențele relative ( $p_i$ ) - arată proporția cazurilor ce se încadrează pe un interval sau o variantă, în total cazuri;
- frecvențele cumulate - arată numărul ( $fc_i$ ) sau proporția ( $pc_i$ ) cazurilor sub sau peste o anumită valoare a variabilei de grupare. Dacă sau construit pe baza frecvențelor absolute se numesc frecvențe absolute cumulate. Dacă sau construit pe baza frecvențelor relative se numesc frecvențe relative cumulate. Pot fi cumulate crescător sau descrescător.

**Exemplu 1.11:** Pentru calculul acestor tipuri de frecvențe vom folosi datele din exemplul anterior:

Tabelul 1.11.

Salariul ( $x_i$ ) -mil. lei-	$f_i$	$p_i$	$fc_i$ cumulate crescător	$fc_i$ cumulate descrescător	$pc_i$ cumulate crescător
1,7-2,0	2	$2/18=0,111$	2	18	0,111
2,0-2,3	4	$4/18=0,222$	6	16	0,333
2,3-2,6	5	$5/18=0,278$	11	12	0,611
2,6-2,9	4	$4/18=0,222$	15	7	0,833
2,9-3,2	3	$3/18=0,167$	18	3	1
<b>Total</b>	<b>18</b>	1	*	*	*

Interpretare:

- $f_i = 5$  - cinci muncitori din cei 18 au salariul cuprins între 2,3 și 2,6 mil. lei;
- $p_i = 0,278$  - o proporție de 0,278 (27,8%) din cei 18 muncitori au salariul cuprins între 2,3 și 2,6 mil. lei;
- $fc_{i \text{ cresc}} = 11$  - 11 muncitori din cei 18, au salariul cuprins între 1,7 și 2,6 mil. lei;
- $fc_{i \text{ descresc}} = 12$  - 12 muncitori din cei 18, au salariul cuprins între 2,3 și 3,2 mil. lei;
- $pc_{i \text{ cresc}} = 0,611$  - o proporție de 0,611 (61,1%) muncitori din cei 18, au salariul sub 2,6 mil. lei;

## 1.4.2. Serii cronologice

*Condiții:*

1. Se pot construi numai pe baza variabilelor de grupare de timp.
2. Valorile variabilei de grupare de timp trebuie să ordonate cronologic.
3. Trebuie să conțină un număr suficient de mare de valori pentru a permite surprinderea tendințelor evolutive ale variabilelor urmărite în timp.
4. Valorile variabilelor a căror tendință se studiază, cuprinse în serie, trebuie să se refere la aceeași unitate spațială.

*Tipuri:*

Ca serie simplă (unidimensională), seria cronologică este o paralelă între șirul momentelor sau intervalelor de timp, care vizează variabila de grupare, și cel al valorilor altei variabile, a cărei tendință evolutivă se urmărește.

Ca serie complexă (multidimensională), seria cronologică este o paralelă între șirul momentelor sau intervalelor de timp, care vizează variabila de grupare, și cele ale valorilor altor variabile a căror tendință evolutivă se urmărește.

Seriile cronologice nu pun probleme deosebite în ceea ce privește construcția, atât timp cât sunt îndeplinite condițiile de bază.

**Exemplu 1.12:**

Evoluția cifrei de afaceri a firmei X.

Anul	Cifra de afaceri -mil. lei-
1995	600
1996	850
1997	748
1998	805
1999	983
2000	1005
2001	1300

Figura 1.5. Serie cronologică simplă, după intervale de timp

Situația stocului de piese tip A și de combustibili la firma X  
Autotransport.

Data	Stocul de piese tip A -buc-	Stocul de combustibil -tone-
1.01.01	80	100
1.02.01	120	*
1.03.01	100	248
1.04.01	115	305
1.05.01	125	*
1.06.01	150	305
1.07.01	260	300

Figura 1.6. Serie cronologică complexă, după momente de timp.

### 14.3. Serii de spațiu

*Condiții:*

1. Se pot construi numai pe baza variabilelor de grupare de spațiu.
2. Trebuie să conțină un număr suficient de mare de valori pentru a permite surprinderea variațiilor variabilelor urmărite în profil teritorial.
3. Valorile variabilelor a căror variație se studiază, cuprinse în serie, trebuie să se refere la aceeași perioadă de timp.

*Tipuri:*

Ca serie simplă (unidimensională), seria de spațiu este o paralelă între șirul variantelor variabilei de grupare, și cel al valorilor altei variabile, a cărei variabilitate teritorială se urmărește.

Ca serie complexă (multidimensională), seria de spațiu este o paralelă între șirul variantelor variabilei de grupare, și cele ale valorilor altor variabile a căror variabilitate teritorială se urmărește..

**Exemplu 1.13:**

Populația la data de 1 iul. 2004

Județul	Populația
Dolj	720554
Gorj	386097
Mehedinți	305901
Olt	488176
Vâlcea	416908

Sursa: Anuarul statistic al României 2005

Durata medie de viață a populației din sud-vestul României, 2002-2004

Județul	Durata medie de viață - ani-	
	Masculin	Feminin
Dolj	67.56	74.31
Gorj	68.42	75.34
Mehedinți	68.22	74.20
Olt	67.46	75.13
Vâlcea	69.29	75.80

Sursa: Anuarul statistic al României 2005

Figura 1.7. Serie de spațiu simplă.

Figura 1.8. Serie de spațiu complexă.

Legătura dintre variabilele de grupare și tipul seriei statistice care se poate obține din acestea este ilustrată în figura următoare:

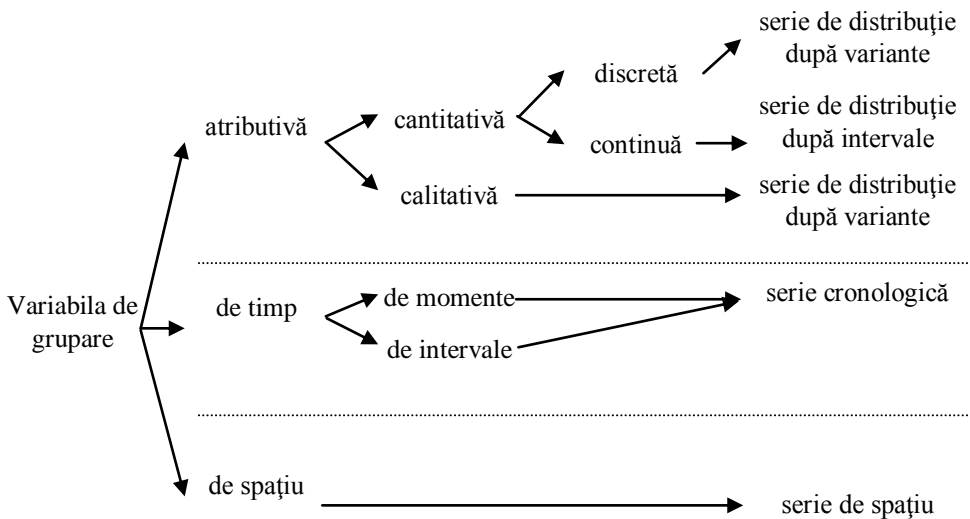


Figura 1.9. Tipuri de variabile de grupare – tipuri de serii statistice

## 1.5. Reprezentări grafice

### Introducere

Ori de câte ori se vehiculează informații statistice, apare necesitatea prezentării lor într-o formă care să permită înțelegerea cât mai simplă și mai corectă a fenomenului pe care îl descriu. De foarte multe ori o reprezentare grafică realizată corect a condus la descoperirea în timp util a soluțiilor necesare pentru rezolvarea anumitor probleme critice.

Cea mai des întâlnită formă de prezentare a informației este cea grafică.

Utilizată corect și cu discernământ această formă de prezentare reușește să redea complet și intuitiv informațiile statistice.

Pentru a putea ilustra cu fidelitate informațiile, reprezentarea grafică – pe scurt graficul – trebuie să respecte condițiile constructive impuse de principiile metodologice.

### 1.5.1. Elemente constructive ale unui grafic statistic

1. **Titlul graficului** - sintetizează foarte clar, printr-un text scurt și concis conținutul graficului.

Dacă graficul urmează să fie prezentat integrat într-un text, titlul graficului va fi trecut sub acesta, iar dacă graficul va fi prezentat independent, titlul va fi trecut deasupra sa.

2. **Scara de reprezentare** - este unul dintre elementele esențiale, dat fiind faptul că el asigură proporționalitatea indicatorilor reprezentați grafic.

În funcție de indicatorii ce urmează a fi reprezentați grafic se poate alege între mai multe tipuri de scări de reprezentare, astfel încât să se evidențieze comod și complet pe grafic fenomenul urmărit.

După formă, există două tipuri de scări de reprezentare:

- **liniară** - cu diviziunile plasate pe o linie dreaptă. *Exemplu: rigla, metrul etc.*



Figura 1.10

- **neliniară** - cu diviziunile plasate pe o linie curbă. *Exemplu: kilometrajul auto, scara aparatelor de măsură etc.*

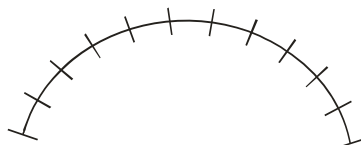


Figura 1.11

După mărimea intervalelor dintre diviziuni:

- **scară uniformă** - cu intervale egale;
- **scară logaritmică** - cu dimensiunea intervalelor proporțională cu logaritmi zecimali ai indicatorilor reprezentați grafic.

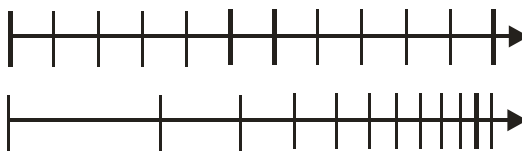


Figura 1.12

3. **Rețeaua graficului** - este compusă din mulțimea segmentelor de dreaptă duse din dreptul diviziunilor scării de reprezentare.

Ținând cont de tipurile de scări de reprezentare determinate după mărimea intervalelor dintre diviziuni, se pot distinge mai multe variante de rețele, în sistemul axelor rectangulare.

- rețea simplă uniformă - o singură axă cu scară de reprezentare uniformă
- rețea dublă uniformă - două axe cu scări de reprezentare uniforme;
- rețea simplă logaritmică - o singură axă cu scară de reprezentare logaritmică;
- rețea logaritmică - două axe cu scări de reprezentare logaritmice;
- rețea semilogaritmică - două axe, una cu scară de reprezentare uniformă și una cu scară de reprezentare logaritmică.

4. **Figura propriu-zisă** - elementul esențial, de conținut al graficului. Forma și dimensiunile sale sunt determinate exclusiv de nivelurile și tendințele variaționale ale indicatorilor reprezentați grafic, prin intermediul scării de reprezentare.

Cel mai frecvent sunt utilizate următoarele figuri geometrice: cercul, pătratul, dreptunghiul, paralelipipedul, cilindrul etc.

Alegerea uneia sau alteia se realizează în funcție de graficul ce urmează a fi construit, de legăturile funcționale existente între indicatorii reprezentați, de scopul urmărit etc.

5. **Legenda și nota explicativă.**

**Legenda** - apare de obicei, atunci când în cadrul aceluiași grafic sunt reprezentați mai mulți indicatori. Prin legendă se realizează practic identificarea fiecărui indicator reprezentat.

**Nota explicativă** - apare atunci când trebuie prezentate anumite particularități ale indicatorilor reprezentați: perioada de referință, lipsa de date, sursa datelor etc.

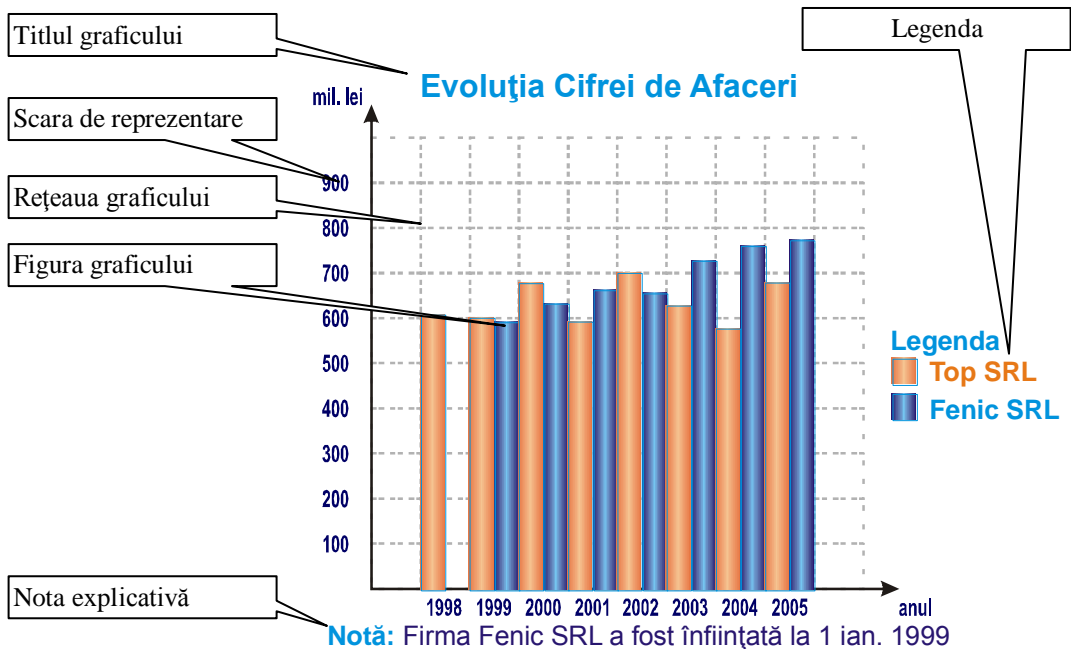


Figura 1.13

Elementele prezentate anterior, utilizate conform metodologiei de construcție prezentate în continuare asigură realizarea unor reprezentări grafice profesionale.

Este recomandabil ca pe lângă metodologia prezentată în continuare să se țină seama și de unele aspecte psihologice care condiționează percepția și înțelegerea



informațiilor reprezentate grafic. Astfel trebuie eliminate eventualele situații care conduc la iluzii optice ce pot deforma modul de percepție al informațiilor reprezentate, cum ar fi:

- plasarea figurilor geometrice, pentru compararea lor vizuală, în poziții ca cele de mai jos:

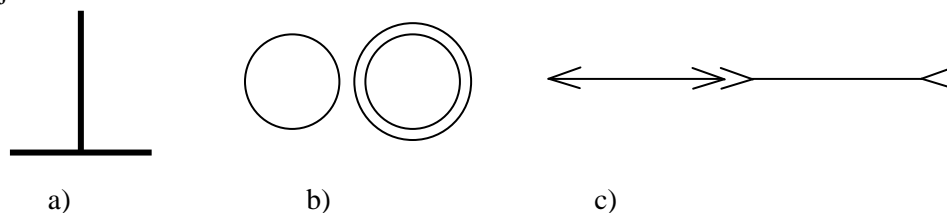


Figura 1.14

Comparați lungimea segmentului vertical și al celui orizontal din figura 1.14 a), a celor două segmente orizontale din figura 1.14 c), și diametrul cercurilor mici din figura 1.14 b), fără să le măsurați cu vreun instrument de măsură. Credeți că sunt egale? Care este mai mare? Măsurați-le apoi ca să vă convingeți.

- utilizarea pentru graficele tridimensionale, a culorilor care deformează perspectiva de spațiu cum ar fi combinația roșu-albastru.

Pentru reprezentarea corectă a datelor statistice trebuie mai întâi să stabilim dacă acestea constituie o serie statistică, reprezintă o comparație sau o structură. După această identificare se poate trece la alegerea tipului de grafic adecvat pentru reprezentarea lor.

## 1.5.2. Reprezentarea grafică a seriilor statistice

### 1.5.2.1. Grafica seriilor de distribuție

Pentru acest tip de serie, se folosesc mai frecvent următoarele tipuri de reprezentări grafice: **histograma, poligonul frecvențelor, curba frecvențelor cumulate.**

**Histograma** - se deosebesc mai multe tipuri, în funcție de figura geometrică ce stă la baza reprezentării. Se poate utiliza în cazul distribuțiilor după variante ale variabilei de grupare atributive caz în care figura geometrică utilizată va fi plasată în dreptul diviziunii, iar pentru seriile de distribuție după intervale de variație, figura geometrică va fi plasată în dreptul intervalelor de variație.

**Histograma prin batoane** - se utilizează mai frecvent în cazul seriilor construite după variante, dar se poate utiliza și pentru seriile după intervale respectând modul de poziționare al figurii (baton – segment de dreaptă vertical).

**Histograma prin dreptunghiuri** - este specifică seriilor construite după intervale de variație (care au la bază variabile continue). Între figurile geometrice utilizate (dreptunghiuri) nu se lasă nici un spațiu. Dacă se utilizează pentru reprezentarea seriilor construite după variante, între figurile geometrice utilizate se lasă un spațiu liber egal ca mărime.

În locul figurilor geometrice prezentate se mai pot utiliza și altele (paralelipiped, cilindru, figuri simbolice etc.), ținându-se cont de faptul că înălțimea acestora va fi proporțională cu mărimea indicatorilor prezentați.

*Metodologia de construcție*

Se folosește drept suport sistemul axelor rectangulare.

Pe abscisă (axa Ox) se trec valorile scării de reprezentare aferente variabilei de grupare (x).

Pe ordonată (axa Oy) se trec valorile scării de reprezentare aferentă frecvențelor ( $f_i$ ).

**Din dreptul diviziunilor**, pentru seriile construite pe bază de **variabile discrete**, se ridică batoane sau dreptunghiuri a căror înălțime este proporțională cu frecvența corespunzătoare fiecărei variante. În cazul utilizării dreptunghiurilor se lasă un spațiu liber egal ca mărime.

**Din dreptul mijlocului intervalului** - pentru histograma prin batoane - sau din **dreptul intervalului** - pentru histograma prin dreptunghiuri, în cazul seriilor de distribuție construite după variabile continue, se ridică figuri geometrice de înălțime proporțională cu frecvența fiecărui interval. În cazul histogramei prin dreptunghiuri nu se lasă nici un spațiu liber între acestea. Dreptunghiurile vor avea lățime egală cu mărimea intervalelor.

Foarte rar în practică se utilizează histograme pentru ale căror figuri geometrice, ca elemente de proporționalitate să fie folosite toate dimensiunile acestora.

**Exemplu 1.14:**

Tabelul 1.12.

Distribuția după greutate a coletelor poștale transportate pe calea ferată, ianuarie 2001

Greutatea (kg)	Număr de colete
40 – 45	7
45 – 50	26
50 – 55	27
55 – 60	37
60 – 65	43
65 – 70	34
70 – 75	27
75 – 80	11
Total	212

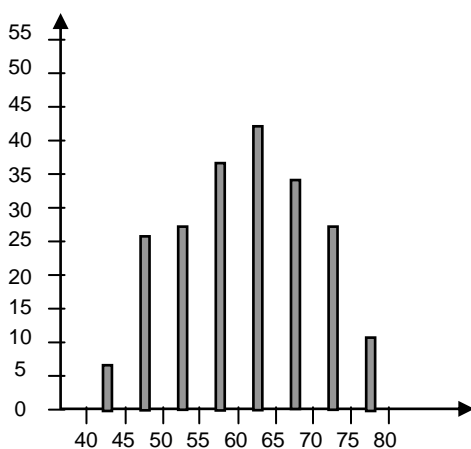


Figura 1.15. Histograma prin batoane (pentru variabilă continuă)

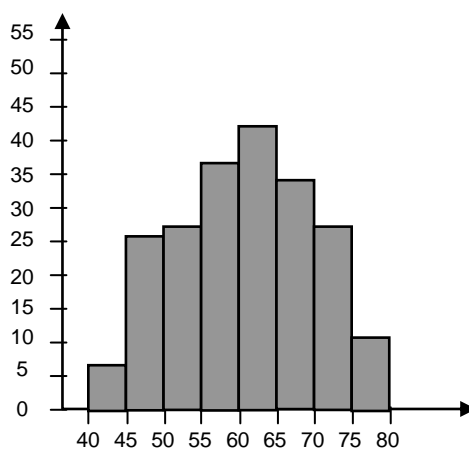


Figura 1.16. Histograma prin dreptunghiuri (pentru variabilă continuă)

Tabelul 1.13.  
Distribuția după categoria de calificare  
a muncitorilor din firma Y martie 2002

Categoria de calificare	Număr de muncitori
I	5
II	15
III	50
IV	55
V	23
VI	2
Total	150

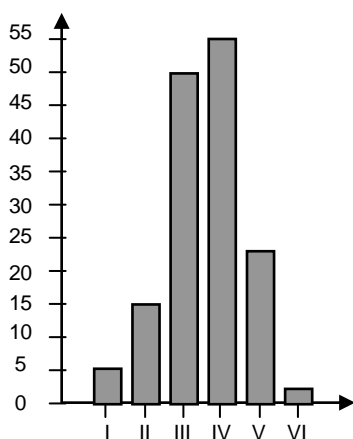


Figura 1.17. Histograma prin dreptunghiuri (pentru variabilă discretă)

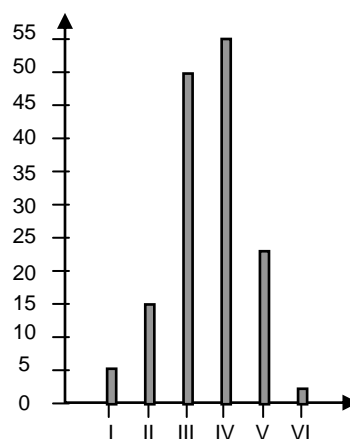


Figura 1.18. Histograma prin batoane (pentru variabilă discretă)

Histograma prin dreptunghiuri este folosită și la construcția grafică a unor indicatori sintetici (dominanta).

**Poligonul frecvențelor** - se obține prin unirea vârfurilor batoanelor din histograma prin batoane sau a mijloacelor bazelor superioare ale dreptunghiurilor, din histograma prin dreptunghiuri.

**Exemplu 1.15:**

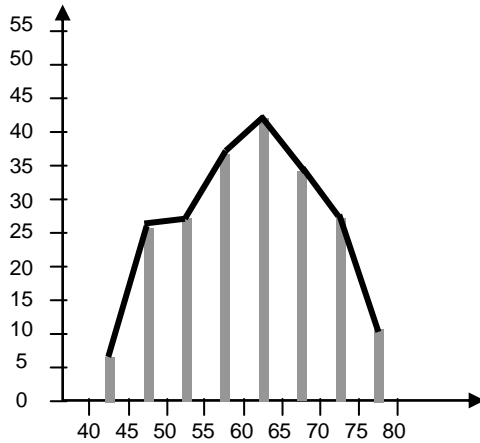


Figura 1.19. Poligonul frecvențelor construit pe baza histogramei prin batoane

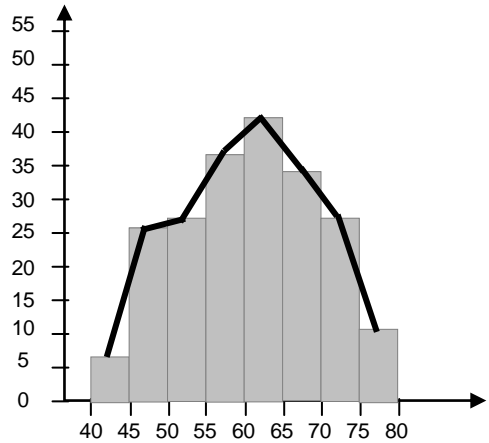


Figura 1.20. Poligonul frecvențelor construit pe baza histogramei prin dreptunghiuri

**Curba frecvențelor cumulate (ogiva sau curba lui Galton)**

Această curba are același principiu de construcție ca cel al histogramei prin dreptunghiuri cu deosebirea că pe ordonată se folosesc frecvențele cumulate. Dacă se utilizează frecvențele cumulate crescătoare se obține partea ascendentă, iar dacă se utilizează frecvențele cumulate descrescătoare se obține partea descendentă.

Este folosită de obicei în cazul seriilor de distribuție după intervale de variație.

*Metodologie de construcție*

Se ridică, de pe abscisă, din dreptul fiecărui interval, dreptunghiuri a căror înălțime este proporțională cu frecvența cumulată corespunzătoare intervalului. Se pornește din colțul stânga-jos al primului dreptunghi și se unesc, prin segmente de dreaptă, colțurile din dreapta sus ale dreptunghiurilor, obținându-se astfel ogiva.

**Exemplu 1.16:** Folosim datele din exemplele anterioare:

Tabelul 1.14.

Distribuția după greutate a coletelor poștale transportate pe calea ferată, ianuarie 2001

Greutatea (kg)	$f_i$	$fc_i$
40 – 45	7	7
45 – 50	26	33
50 – 55	27	60
55 – 60	37	97
60 – 65	43	140
65 – 70	34	174
70 – 75	27	201
75 – 80	11	212
Total	212	*

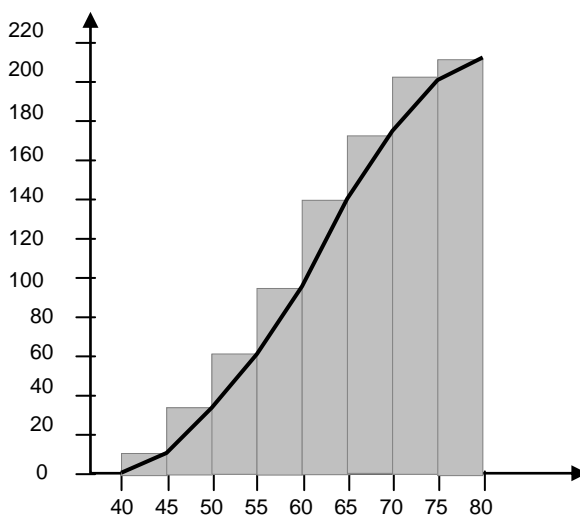


Figura 1.21. Curba frecvențelor cumulate

Curba frecvențelor cumulate se utilizează și la calculul grafic al unor indicatori statistici (mediană, quartile).

### Grafica seriilor de distribuție bidimensionale

Se realizează în sistemul axelor rectangulare tridimensionale:

- pe axa Ox se reprezintă variantele sau intervalele de variație pentru variabila principală.
- pe axa Oy se reprezintă variantele sau intervalele de variație pentru variabila secundară.
- pe axa Oz (axa verticală) se reprezintă valorile corespunzătoare frecvențelor duble ( $f_{ij}$ ).

Se folosesc aceleași tipuri de reprezentări grafice ca la seriile unidimensionale cu diferența că în acest caz se vor chema:

- stereograma prin batoane (dreptunghiuri etc.)
- rețea poligonală

**Exemplu 1.17:** Folosim datele din distribuția următoare, pentru construcția unei rețele poligonale, respectiv unei stereograme prin paralelipede (figurile 1.22, 1.23).

Tabelul 1.15.

Y \ X	1,7	2,0	2,3	2,6	2,9	f <sub>x</sub>
X	-	-	-	-	-	
2,0	2,0	2,3	2,6	2,9	3,2	
100-110	2	1	0	0	0	3
110-120	0	2	1	0	0	3
120-130	0	1	3	2	0	6
130-140	0	0	1	2	0	3
140-150	0	0	0	0	3	3
f <sub>y</sub>	2	4	5	4	3	18

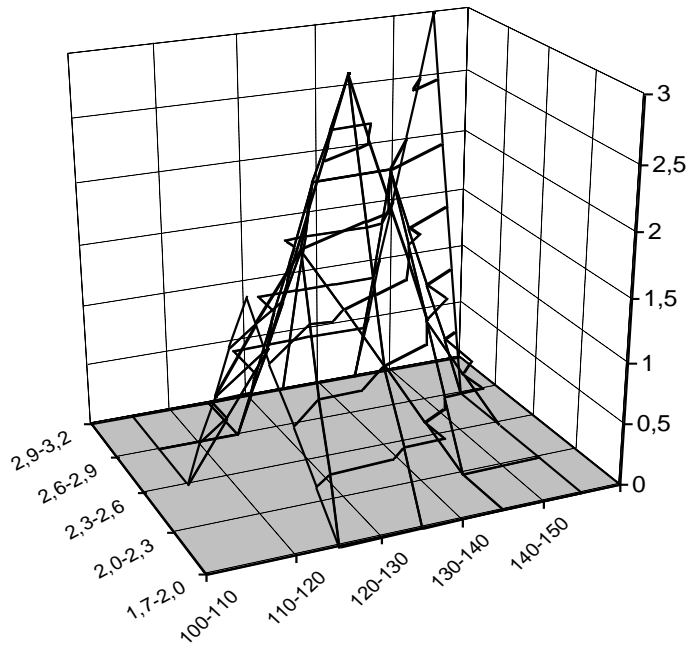


Figura 1.22. Rețea poligonală

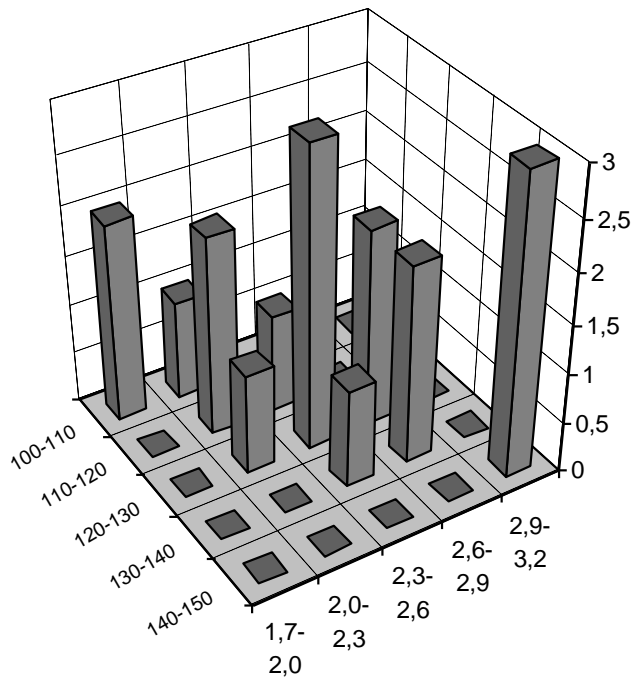
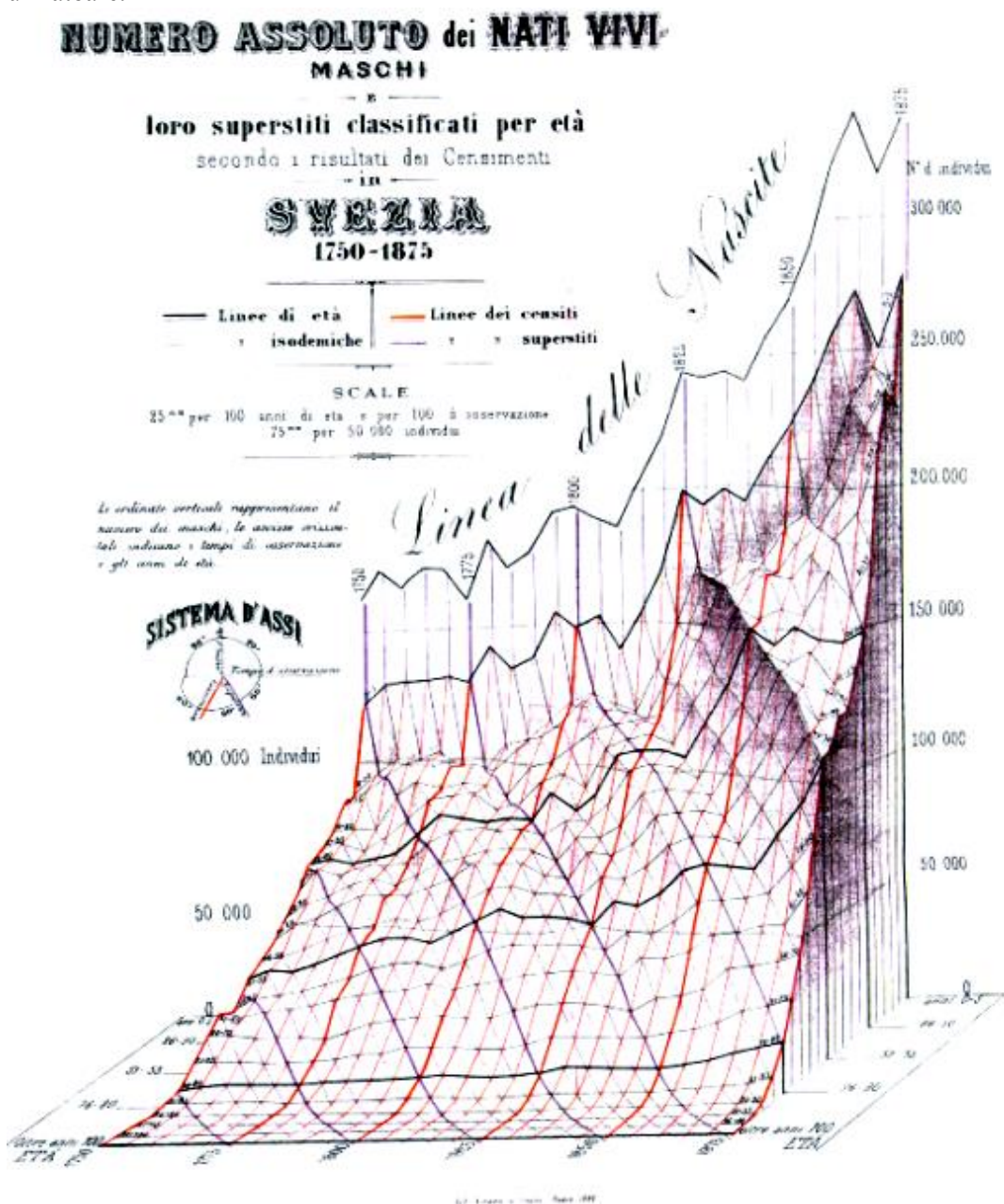


Figura 1.23. Stereograma prin paraleliped

Începuturile utilizării acestui tip de reprezentare grafică sunt ilustrate în imaginea următoare:



Sursa: [www.math.yorku.ca/SCS/Gallery/](http://www.math.yorku.ca/SCS/Gallery/)

Figura 1.24 Prima stereogramă din lume

### 1.5.2.2. Grafica seriilor cronologice

Se deosebesc două cazuri în care se utilizează frecvent reprezentarea grafică a seriilor cronologice:

- a) pentru evidențierea evoluției unor indicatori care nu sunt influențați de factori naturali sau sezonieri;
- b) pentru evidențierea evoluției unor indicatori care sunt influențați de factori naturali sau sezonieri;

În cazul a) se utilizează de obicei următoarele tipuri de reprezentări: **cronograma, historiograma, diagrama prin coloane.**

În cazul b) se utilizează des graficele: **diagrama polară radială sau diagrama polară sectorială.**

### Cronograma

Se construiește în sistemul axelor rectangulare XOY.

Pe abscisă se trec variantele caracteristicii timp, astfel:

- în dreptul diviziunilor pentru seriile cronologice de momente (similar cu reprezentarea variabilelor atributive discrete);
- în dreptul intervalelor dintre diviziuni, pentru seriile cronologice după intervale de timp (similar cu reprezentarea variabilelor atributive continue).

Pe ordonată se trec valorile scării de reprezentare aferente variabilei/variabilelor a căror evoluție se urmărește.

De pe abscisă din dreptul diviziunilor – pentru seria de momente, sau din dreptul centrelor intervalelor – pentru seria de intervale, se ridică perpendiculare de înălțime proporțională cu mărimea indicatorilor ce trebuie reprezentați. Prin unirea vârfurilor perpendicularelor prin segmente de dreaptă se obține cronograma.

*Exemplu 1.18: Se cunosc datele:*

Tabelul 1.16.

Anul		1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rata șomajului (%)	Masculin	7.5	6.3	5.7	6.5	7.4	7.7	7.1	8.9	7.5	9	7.7	8
	Feminin	8.6	7.3	6.4	6.1	6.2	6.4	5.9	7.7	6.4	6.9	6.4	5.7

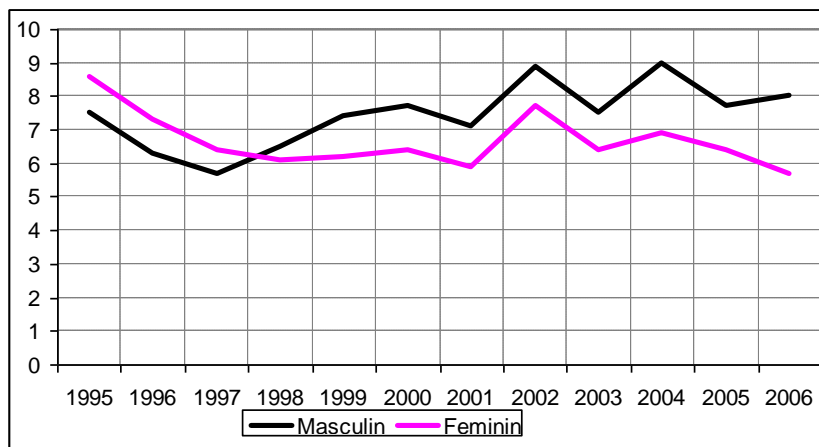


Figura 1.25 Cronograma. Dinamica ratei șomajului, 1995-2006



### Historiograma

Se construiește similar cu cronograma, cu deosebirea că, fie pe orizontală, fie pe verticală, are un canal de întrerupere care simbolizează renunțarea la unele porțiuni din scara de reprezentare.

Canalul de întrerupere vertical apare atunci când seria cronologică prezintă o întrerupere – lipsesc valori corespunzătoare variabilei de reprezentat, pentru unele variante ale caracteristicii timp.

Canalul de întrerupere orizontal apare când seria cronologică prezintă valori mari ale indicatorilor conținuți, dar diferențele dintre acestea sunt mici, caz în care o porțiune a graficului (dintre origine și valoarea minimă de reprezentat) rămâne neutilizată.

În cazul în care graficul conține evoluția a mai mult de un indicator atunci devine necesară legenda.

*Exemplu: Folosind datele de la exemplul anterior construim historiograma:*

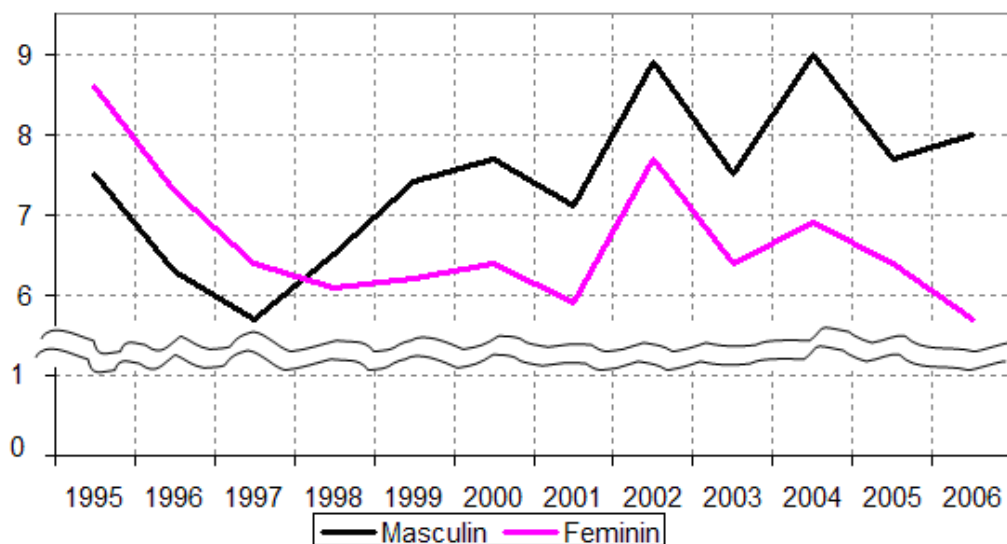


Figura 1.26 Historiograma. Dinamica ratei șomajului, 1995-2006

### Diagrama prin coloane

Se construiește similar cu cronograma, cu deosebirea că din dreptul diviziunilor – pentru serii după momente de timp – sau din dreptul intervalelor – pentru serii după intervale de timp – se construiesc coloane de înălțime proporțională cu mărimea indicatorilor ce trebuie reprezentați. Pe rol de coloane pot fi folosite figuri geometrice (dreptunghi, paralelipiped, cilindru, con, piramidă etc) sau figuri simbolice.

*Exemplu 1.18: Din anuarul statistic al României 2005, se cunosc datele:*

Tabelul 1.17

Anul școlar	1999/ 2000	2000/ 2001	2001/ 2002	2002/ 2003	2003/ 2004	2004/ 2005
Studenti înscriși	21923	25551	28779	28197	28547	29418

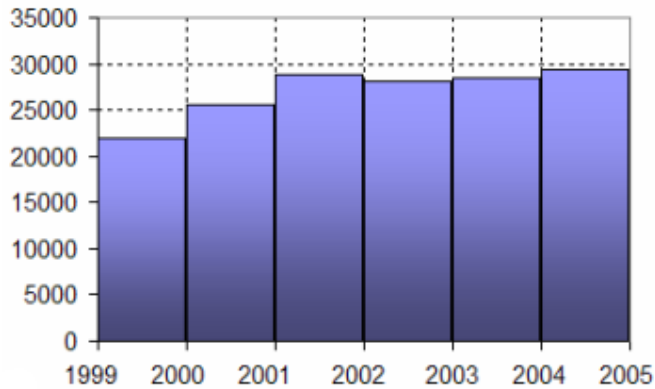


Figura 1.26 Historiograma. Dinamica ratei șomajului, 1995-2006

În cazul reprezentării evoluțiilor sezoniere sau ciclice se recomandă utilizarea diagramelor polare.

### Diagrama polară

Diagramele polare se construiesc în sistemul axelor polare, având ca suport un cerc a cărui rază, pentru a păstra proporționalitatea nivelurilor reprezentate, se determină ca medie a valorii termenilor seriei de reprezentat sau:

$$r = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2}$$

unde  $x_{\max}$ ,  $x_{\min}$  - valorile maximă, respectiv minimă pentru variabila ce se dorește a fi reprezentată.

După determinarea mărimii cercului, acesta se împarte într-un număr de sectoare egal cu cel al termenilor seriei. Pe una din razele cercului se marchează diviziunile și valorile scării de reprezentare.

Până în acest punct construcția ambelor tipuri de diagrame polare – sectorială și radială – este identică.

### Diagrama polară radială

În cazul diagramei polare radiale, variantele caracteristicii timp se plasează în dreptul razelor cercului iar nivelurile seriei se reprezintă prin puncte, pe raze - pentru valori mai mici sau egale cu media lor simbolizată prin raza cercului - sau pe prelungirea razelor - pentru valori mai mari decât media. Centrul cercului reprezintă originea (valoarea zero).

Punctele obținute anterior se unesc cu segmente de dreaptă, obținându-se diagrama polară radială (figura 1.27). Excepție fac primul punct - corespunzător primului termen al seriei - și ultimul punct - corespunzător ultimului nivel al seriei - care nu se unesc. Prin aceasta se simbolizează ireversibilitatea timpului.

### Diagrama polară sectorială

În cazul diagramei polare sectoriale variantele caracteristicii timp se trec în dreptul sectoarelor de cerc. Pentru nivelurile termenilor seriei din dreptul punctelor, care simbolizează mărimea lor, se trasează sectoare de cerc. Sectoarele de cerc astfel obținute se unesc cu segmente de dreaptă, excepție făcând și în acest caz primul și ultimul (figura 1.28).

**Exemplu 1.19:** Pentru vânzările de înghețată, pe o piață oarecare, se cunosc datele:

Tabelul 1.18

Luna	Valoarea vânzărilor de înghețată -mil. lei-	Luna	Valoarea vânzărilor de înghețată -mil. lei-
ianuarie	5	iulie	35
februarie	6	august	18
martie	9	septembrie	10
aprilie	10	octombrie	8
mai	16	noiembrie	7
iunie	30	decembrie	6

$$r = \frac{35+5}{2} = 20 \text{ mil. lei; } 1\text{cm} \approx 10 \text{ mil. lei}$$

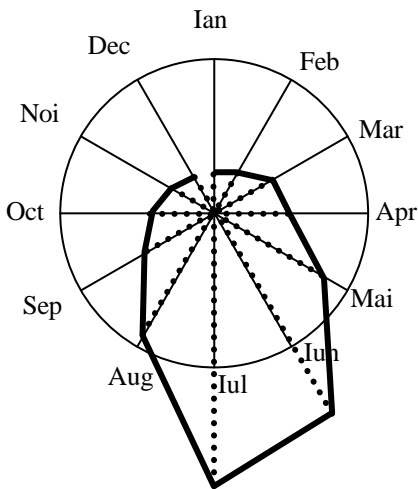


Figura 1.27. Diagrama polară radială

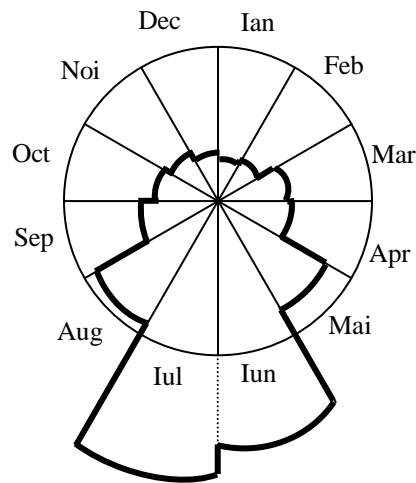
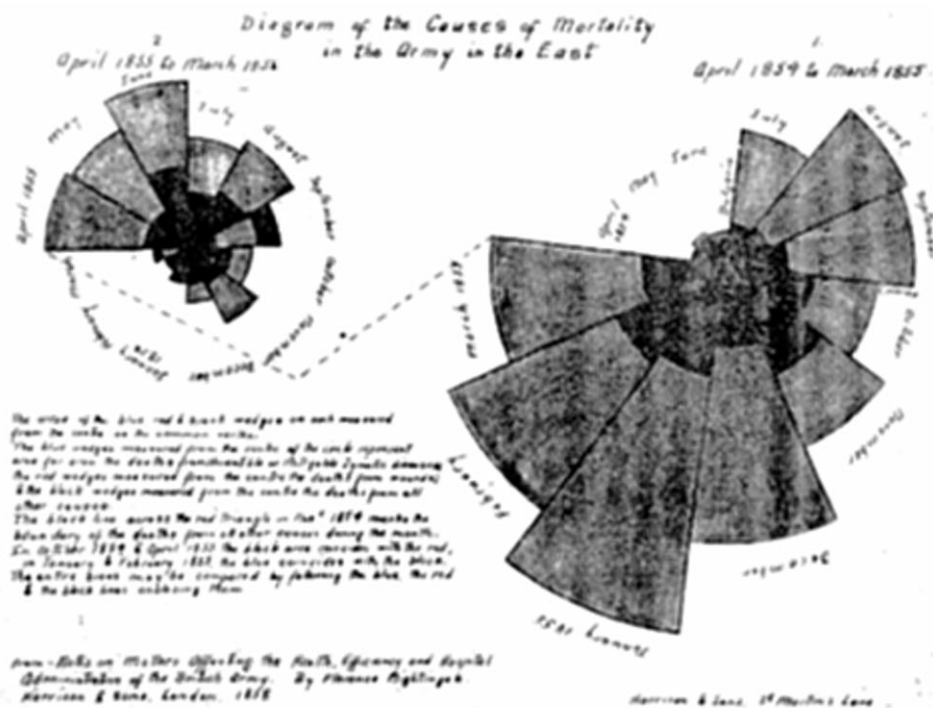


Figura 1.28. Diagrama polară sectorială

Prima diagramă polară a fost inventată și realizată de Florence Nightingale cunoscută totodată ca prima soră medicală modernă.

În 1858, după ce a fost martoră a condițiilor sanitare deplorabile din Crimeea, a scris **Note asupra cauzelor care afectează sănătatea, eficiența și administrarea spitalului armatei engleze**, în care a evidențiat printr-un set de grafice statistice originale cauzele deceselor semnalate în armata engleză, pe care le-a împărțit în două: cauze legate de condițiile de luptă și cauze nelegate de condițiile de luptă (cauze preventive).



Sursa: [www.math.yorku.ca/SCS/Gallery/](http://www.math.yorku.ca/SCS/Gallery/)

Figura 1.29 Prima diagramă polară

### 1.5.2.3. Grafica seriilor de spațiu

Pentru reprezentarea grafică a seriilor de spațiu se utilizează mai frecvent următoarele tipuri de grafice:

- **diagrama prin coloane**
- **diagrama prin benzi**
- **cartodiagrama**

#### Diagrama prin coloane

Are aceeași metodologie de construcție ca la seria cronologică, deosebirea constând în faptul că pe axa Ox se reprezintă de data aceasta variabila de spațiu (figura 1.30).

**Exemplu 1.20:**

Tabelul 1.19

Populația la data de 1 iul. 2004

Județul	Populația
Dolj	720554
Gorj	386097
Mehedinți	305901
Olt	488176
Vâlcea	416908

Sursa: Anuarul statistic al României 2005

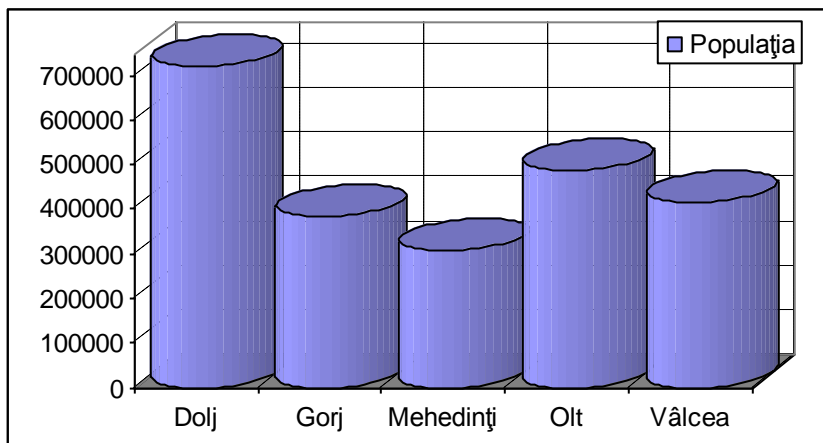


Figura 1.30 Diagrama prin coloane. Populația județelor din sud-vestul României la 1 iulie 2004

### Diagrama prin benzi

Metodologia de construcție este similară cu cea de la diagrama prin coloane pentru serii de spațiu, cu deosebirea că rolul axelor este inversat: variantele variabilei de spațiu se reprezintă pe axa Oy iar valorile variabilei a cărei variabilitate se urmărește, pe axa Ox (figura 1.31). Folosind aceleași date de la exemplul anterior obținem:

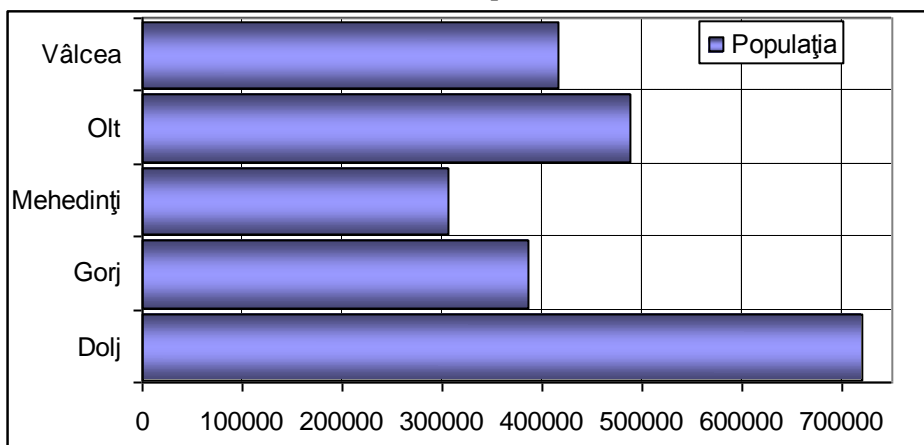


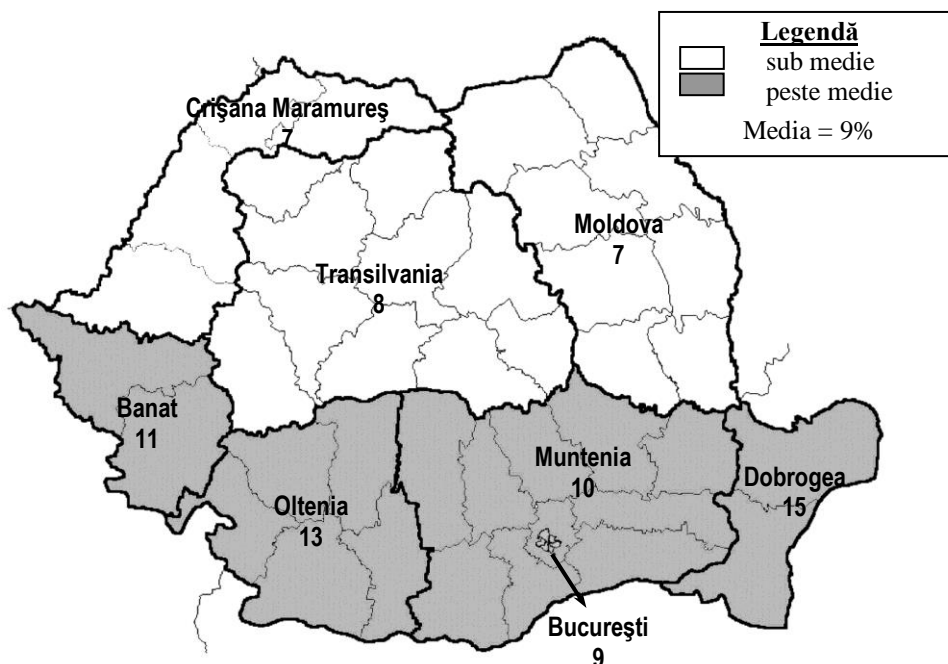
Figura 1.31 Diagrama prin benzi. Populația județelor din sud-vestul României la 1 iulie 2004

### Cartograma

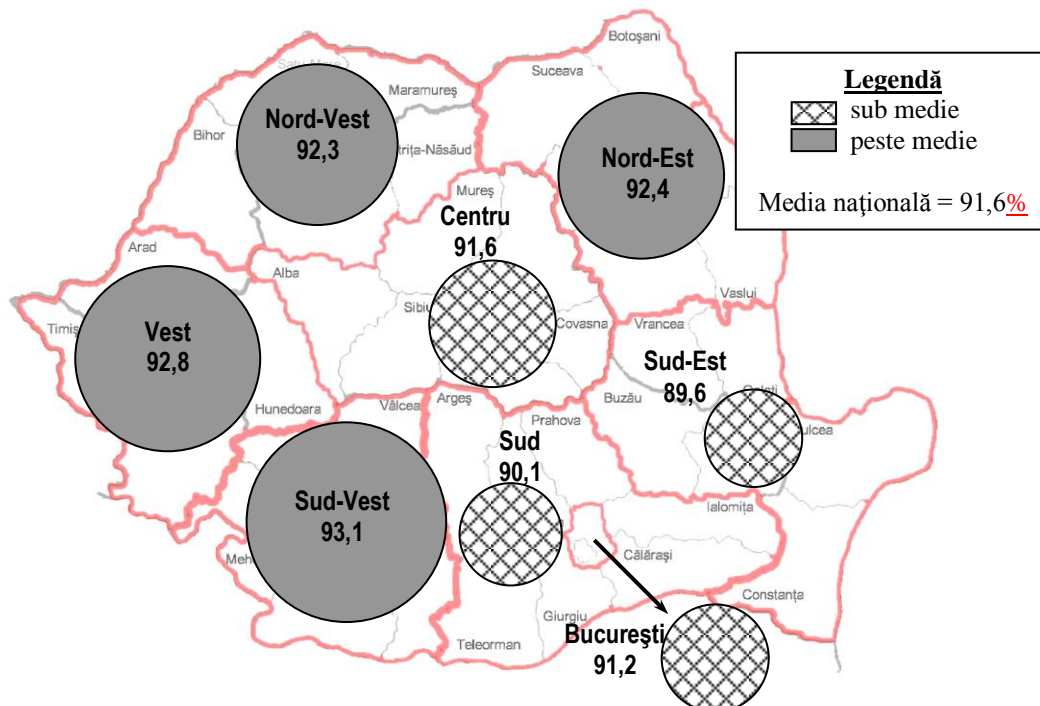
Se construiește având ca suport o hartă fizică, pe care valorile indicatorilor se reprezintă la nivelul fiecărei zone prin hașuri diferite (figura 1.32 a.).

### Cartodiagrama

Se construiește având ca suport o hartă fizică, peste care în dreptul fiecărei zone se construiesc figuri geometrice ale căror dimensiuni sunt proporționale cu valorile indicatorilor de reprezentat (figura 1.32 b.).



a). Excluderea socială prin disponibilizare și concediere, 1990-2003, pe regiuni (%)



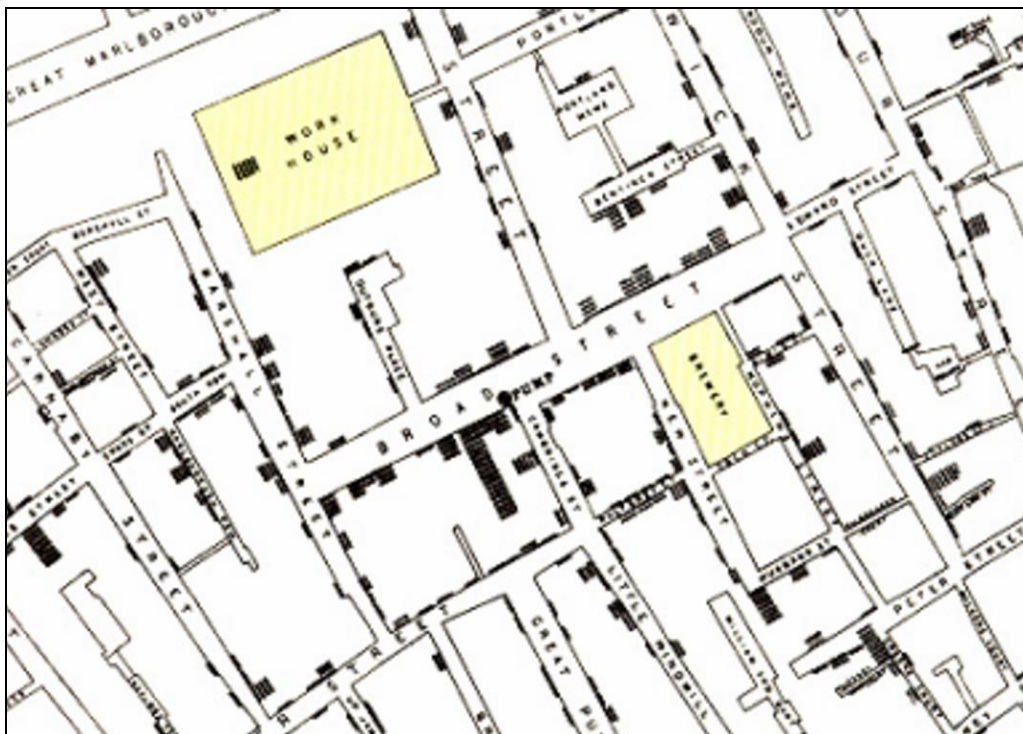
b). Ponderea populației ocupate (% față de populația activă), pe regiuni de dezvoltare – 2002.

Sursa: Studiul statistic al pieței muncii din regiunea Oltenia, C. Radu, N. Vasilescu, C. Ionașcu, Editura Sitech, Craiova, 2005, p. 121.

Figura 1.32

Ca și în cazul altor reprezentări grafice și cartodiagrama a fost utilizată prima dată pentru a găsi soluția unei situații critice.

În 1855, în timpul epidemiei de holeră din Londra, dr. J. Snow a observat că majoritatea cazurilor de îmbolnăviri (reprezentate prin suprafețele negre) au apărut în jurul unei pompe de apă. Folosind informația obținută astfel a stopat epidemia.



Sursa: [www.math.yorku.ca/SCS/Gallery/](http://www.math.yorku.ca/SCS/Gallery/)

Figura 1.33 Prima utilizare a cartodiagramei

### 1.5.3. Reprezentarea grafică a comparațiilor

În multe situații datele care trebuie reprezentate grafic constituie de fapt o comparație și nu o serie statistică. În asemenea situații se utilizează reprezentări grafice specializate care se bazează pe folosirea figurilor geometrice plane sau tridimensionale sau a figurilor simbolice pentru evidențierea comparației.

În cazul utilizării figurilor geometrice plane în comparații, **aria** acestora trebuie să fie construită proporțional cu mărimea indicatorilor de comparat. Dacă se folosesc figuri tridimensionale, **volumul** figurilor construite va fi proporțional cu valoarea indicatorilor comparați.

Cele mai des utilizate figuri geometrice sunt: dreptunghiul, cercul, pătratul, paralelipipedul, cilindrul, sfera.

#### Dreptunghiul

Se cunoaște faptul că aria dreptunghiului depinde de cele două dimensiuni ale sale:

$$A = L \cdot l$$

Pornind de la aceasta, un dreptunghi a cărui arie să fie proporțională cu mărimea indicatorilor de comparat, poate fi construit în două variante:

- a) pe baza unei singure dimensiuni, cealaltă se menținându-se constantă;
- b) pe baza ambelor dimensiuni.

Prima variantă se folosește în cazul în care se reprezintă indicatori monofactoriali.

**Exemplu 1.21:** Se compară producția a două firme de același profil.

Tabelul 1.20.

Firma	Producția (P) - mil. lei -
A	350
B	250

Anul 2005

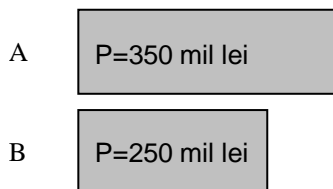


Figura 1.34

A doua variantă se folosește în cazurile în care indicatorii de compara pot fi scriși ca produs de doi factori.

**Exemplu 1.22:** Se compară producția ( $Q$ ) a două firme de același profil, pentru care se mai cunosc numărul de muncitori ( $N$ ) și productivitatea ( $w$ ). Producția fiecărei firme poate fi scrisă astfel:  $Q = w \cdot N$ , așa încât pe fiecare latură a dreptunghiului se poate reprezenta unul din factori ( $w$  respectiv  $N$ ), aria rezultată fiind proporțională cu volumul indicatorului general ( $Q$ ).

$$A = L \cdot l$$

$$Q = w \cdot N$$

↑    ↑

Tabelul 1.21.

Anul 2005

Firma	Producția (P) - mil. lei -	Numărul de muncitori	Productivitatea muncii - mii lei -
A	350	200	1750
B	250	156	1603

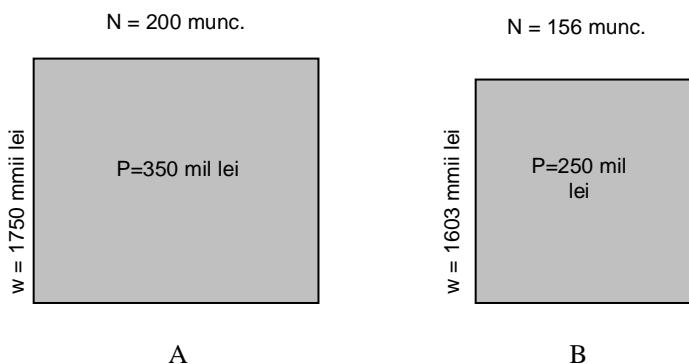


Figura 1.35



### Cercul

Pentru cerc elementul de proporționalitate îl constituie raza. Pornind de la faptul că aria cercului ( $A$ ) va fi proporțională cu mărimea indicatorului de reprezentat ( $Q$  - element cunoscut), se poate determina raza cu ajutorul relației următoare :

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{Q}{\pi}}$$

În practică, pentru ușurarea construcției grafice și fără a afecta proporționalitatea ariei cercului cu mărimea indicatorului de reprezentat,  $\pi$  poate fi neglijat

$$r = \sqrt{A}$$

**Exemplu 1.23:** Folosind datele din exemplul anterior, în cazul reprezentării producției vom avea:

$$r_A = \sqrt{Q_A} = \sqrt{350} = 18.7; \quad r_B = \sqrt{Q_B} = \sqrt{250} = 15.8$$

Stabilim scara de reprezentare  $1\text{cm} \approx 10\text{mil. lei}$ , deci cercul pentru firma A va avea o rază de 1.87 cm iar cel pentru firma B de 1.58 cm.

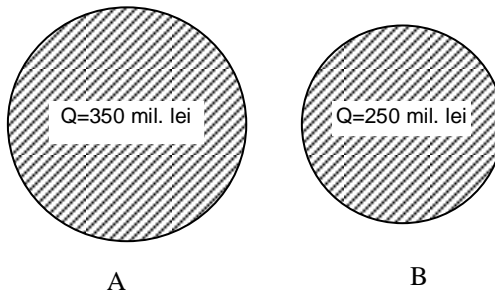


Figura 1.36

### Pătratul

Metodologia de construcție este similară cu cea de la cerc.

$$A = l^2 \Rightarrow l = \sqrt{A}$$

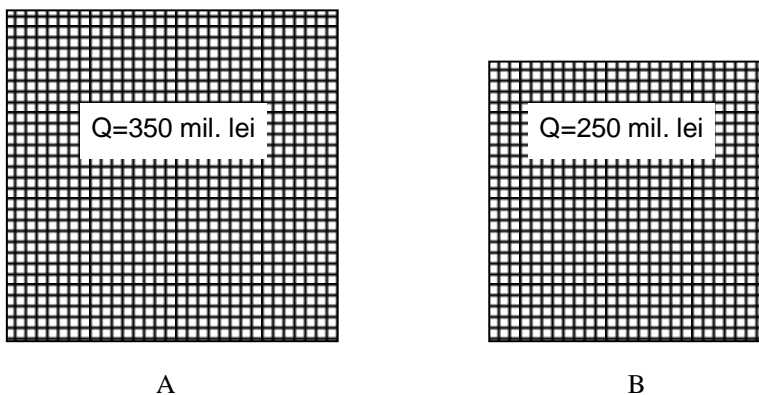


Figura 1.37

### Paralelipipedul

Fiind o figură tridimensională, volumul său trebuie să fie proporțional cu valoarea indicatorilor de comparat. După cum se cunoaște volumul paralelipipedului poate fi determinat astfel :

$$V = L \cdot l \cdot h$$

Este indicat pentru situațiile în care se reprezintă grafic indicatori trifactoriali, cum ar fi  $V = c \cdot w \cdot N$  (unde :  $V$  - valoarea producției,  $c$ -costul pe bucata de produs,  $w$  - productivitatea muncii exprimată în bucăți,  $N$  - numărul de muncitori), caz în care pe fiecare dimensiune poate fi reprezentat un factor.

**Exemplu 1.24:**

Tabelul 1.22.  
Anul 2004

Firma	Producția (P) - mil. lei -	Numărul de muncitori	Productivitatea muncii - buc -	Costul unitar - mii lei/buc-
A	8750	200	1750	25
B	7200	150	1600	30

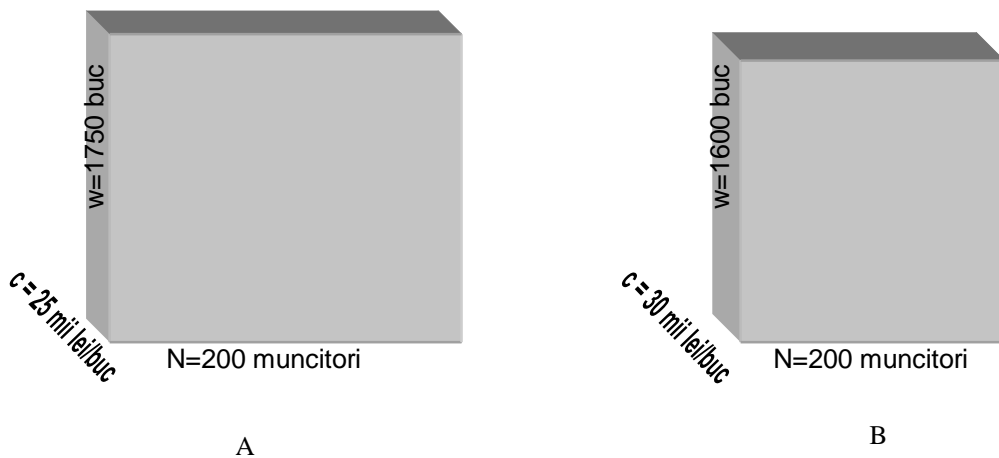


Figura 1.38

**Cilindrul**

Volumul său poate fi calculat cu ajutorul relației :

$$V = A_b \cdot h$$

unde  $A_b$  - reprezintă aria bazei  $A_b = \pi \cdot r^2$   
 $h$  - înălțimea cilindrului

Poate fi utilizat pentru reprezentarea indicatorilor bifactoriali - unul pe raza cercului bază și unul pe înălțimea sa.

**Exemplu 1.25:** Preluând datele utilizate la dreptunghi (în cazul utilizării ambelor laturi), și reprezentând pe raza bazei numărul de muncitori ( $N$ ), iar pe înălțime productivitatea muncii ( $w$ ), comparația prin cilindru va arăta astfel:

$$r_A = \sqrt{200} = 14.1 \text{ muncitori}; r_B = \sqrt{156} = 12.5 \text{ muncitori};$$

$$1 \text{ cm} \approx 10 \text{ muncitori} \Rightarrow r_A = 1.41 \text{ cm} \text{ și } r_B = 1.25 \text{ cm}$$

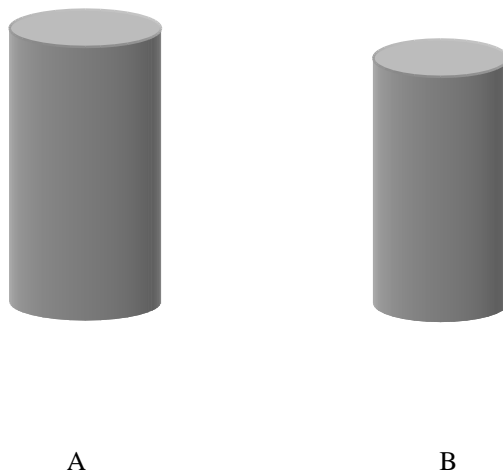


Figura 1.39

**Sfera**

Are metodologia de construcție similară cu cea de la cerc.

**Exemplu 1.26:** Preluând datele prezentate la utilizarea cercului în comparații, graficul va arăta astfel :

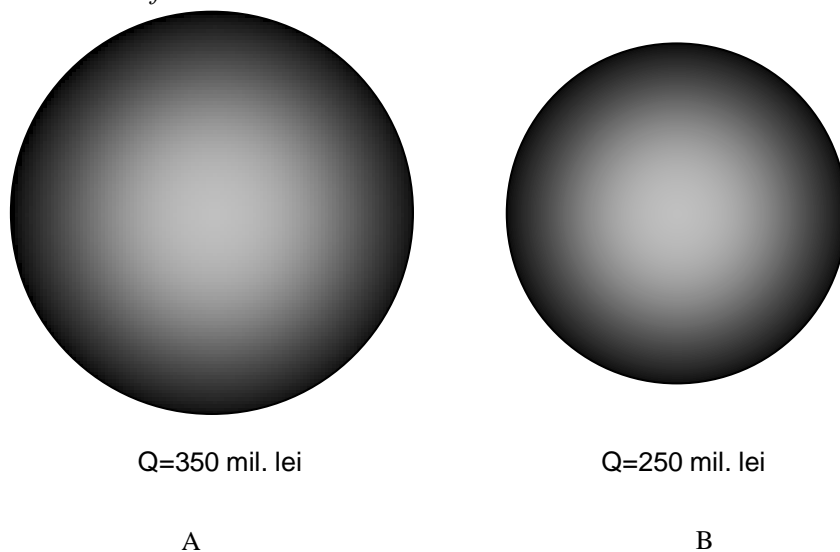


Figura 1.40

În cazul reprezentărilor grafice prin figuri geometrice ce permit ilustrarea indicatorilor bi sau trifactoriali, nu trebuie pierdut din vedere faptul că indicatorul rezultat din produsul factorilor, care este proporțional cu volumul figurii utilizate, trebuie să aibă sens.

### 1.5.4. Reprezentarea grafică a structurilor

În cazul în care indicatorii ce trebuie reprezentați constituie părți dintr-un întreg, se recomandă utilizarea reprezentărilor grafice pentru structuri.

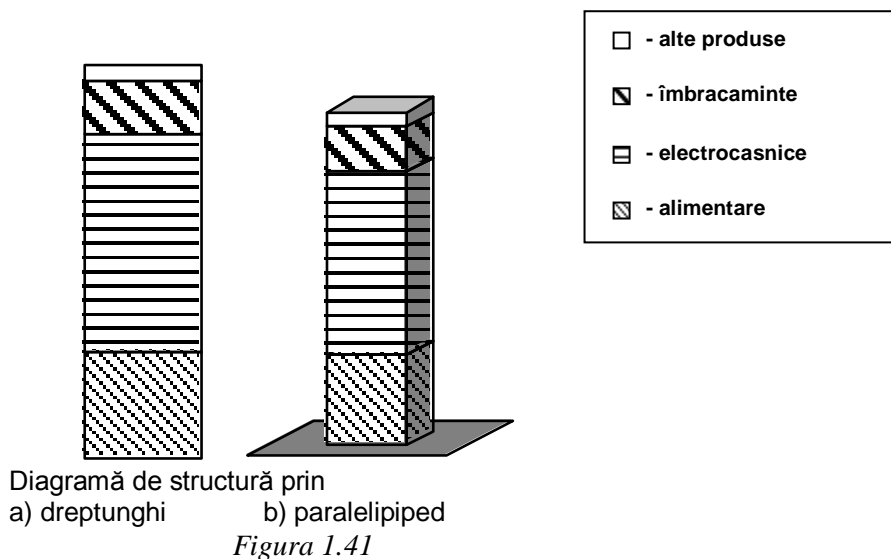
Și în cazul graficelor pentru structuri se utilizează aceleași figuri geometrice ca și în cazul comparațiilor, deosebirea fiind că în această situație se construiește, într-o primă fază, o singură figură a cărei arie (pentru figurile plane) sau al cărei volum (pentru figurile tridimensionale) este proporțional cu suma indicatorilor structurali și care apoi, într-o a doua fază, se împarte în sectoare de dimensiune proporțională cu nivelurile acestora, hașurate diferit.

Modul de sectorizare al figurilor geometrice folosite poate fi particularizat în funcție de caracteristicile fiecăreia. Astfel pentru dreptunghi, paralelipiped, cilindru se procedează de obicei la sectorizare folosind o singură dimensiune, de obicei lungimea.

**Exemplu 1.27:** Structura valorică a vânzărilor de produse de la unitatea comercială X în luna martie 2002 a fost următoarea:

Tabelul 1.23.

Categoria de produse	Valoarea vânzărilor	
	(mil. lei)	%
Total, din care:	1100	100,00
- alimentare	300	27,27
- electrocasnice	600	54,54
- îmbrăcăminte	150	13,64
- alte produse	50	4,55



În cazul pătratului, acesta se împarte în 100 de pătrățele egale, prin împărțirea fiecărei laturi în 10 părți egale, fiecare pătrățel reprezentând un procent. Indicatorii de reprezentat se exprimă mai întâi procentual și apoi se reprezintă pe figură prin hașurarea unui număr de pătrățele egal cu cel al valorii procentuale determinate pentru fiecare.

**Exemplu 1.28:** Folosind datele de la reprezentarea anterioară vom obține.

$$l = \sqrt{1100} = 33.1 \text{ mil. lei; } 1 \text{ cm} \approx 1 \text{ mil. lei}$$

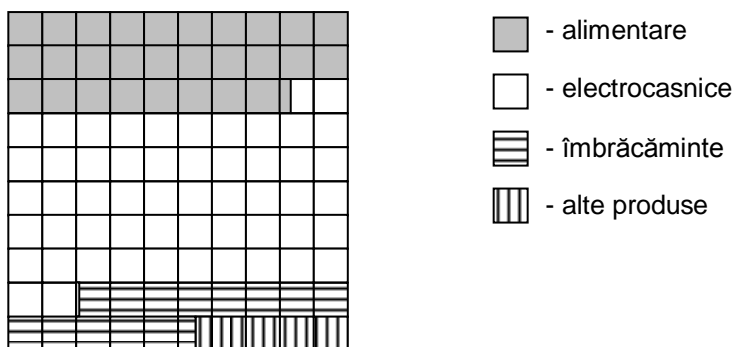


Figura 1.42. Diagramă de structură prin pătrat

În cazul cercului, se consideră că acesta reprezintă 100%, 1% fiind echivalent cu un sector de cerc construit pe baza unu unghi la centru de  $3,6^\circ$ .

**Exemplu 1.30:** Folosind aceleași date vom obține:

$$r = \sqrt{1100} = 33.1 \text{ mil. lei; } 1 \text{ cm} \approx 1 \text{ mil. lei}$$

Tabelul 1.24.

Categoria de produse	Vânzări	Grafic
	%	(grade)
Total, din care:	100,00	360
- alimentare	27,27	98,18
- electrocasnice	54,54	196,34
- îmbrăcăminte	13,64	49,10
- alte produse	4,55	16,38

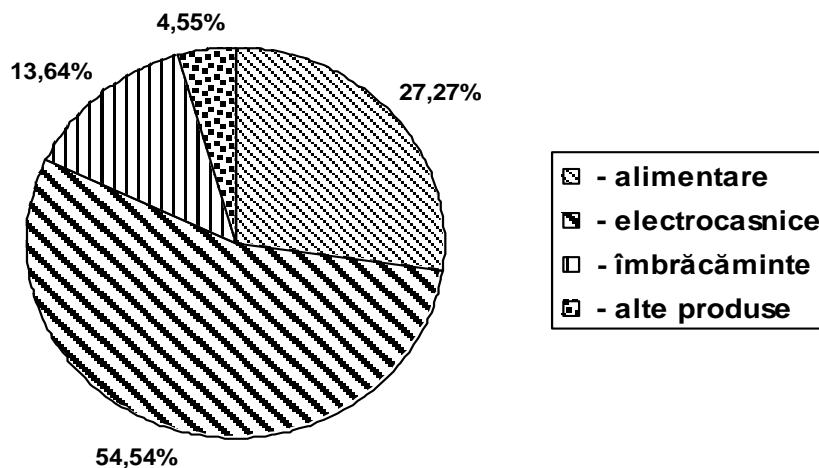


Figura 1.43. Diagramă de structură prin cerc

O caracteristică a graficelor pentru structuri este prezența obligatorie a legendei, având în vedere că pe același grafice se reprezintă mai mulți indicatori diferiți.

### 1.5.5. Alte tipuri de reprezentări grafice

În anumite situații, pentru evidențierea unor aspecte particulare ale indicatorilor de reprezentat, practica a impus construirea unor reprezentări grafice speciale. Aceste reprezentări sunt dedicate numai cazurilor particulare pentru care au fost concepute și nu este recomandată utilizarea lor în alte situații.

Din această categorie de reprezentări fac parte: **diagrama de balanță și diagrama prin coloane în aflux, piramida vârstelor etc.**

#### Diagrama de balanță

Este destinată reprezentării grafice a „mișcării” stocurilor, situație frecvent întâlnită în domeniul economic. Acest tip de grafic ilustrează de fapt indicatorii din diagrama de balanță, care arată astfel:

$$N_1 + I = E + N_2$$

unde:  $N_1, N_2$  - stocul existent la începutul, respectiv la sfârșitul perioadei de analiză;

$I, E$  - intrările, respectiv ieșirile din stoc apărute de-a lungul perioadei de analiză;

Analiza statistică a stocurilor de materii prime sau de produse finite, analiza mișcării forței de muncă, a fondurilor fixe etc. impune determinarea indicatorilor prezenți în diagrama de balanță.

Metodologia de construcție este următoarea:

Se folosește ca suport sistemul axelor rectangulare  $Ox, Oy$ .

Pe axa  $Ox$  se construiesc patru intervale egale, câte unul pentru fiecare indicator al ecuației de balanță, în ordinea în care aceștia se regăsesc în ecuație.

Pe axa  $Oy$  se reprezintă, volumul stocului inițial ( $N_1$ ), respectiv cel al stocului final ( $N_2$ ) precum și mărimea rezultată din cumularea stocului inițial cu cea a intrărilor în cursul perioadei ( $I$ ) (membrul stâng al ecuației de balanță) și mărimea rezultată din cumularea stocului final cu cea a ieșirilor din cursul perioadei ( $E$ ) (membrul drept al ecuației de balanță).

Pentru stocul inițial și cel final se ridică dreptunghiuri de înălțime proporțională cu valoarea acestor indicatori. Pentru intrări se construiește un dreptunghi suspendat în dreptul intervalului corespunzător de pe abscisă, cu baza plasată la înălțimea determinată pentru dreptunghiul corespunzător stocului inițial și de înălțime proporțională cu valoarea intrărilor. Pentru intrări se procedează la fel ca pentru ieșiri, cu deosebirea că se ia ca reper înălțimea dreptunghiului determinat pentru stocul final.

**Exemplu 1.31:** Pentru un depozit de produse se cunosc datele:  
 $N_1=3000$  buc.;  $I = 500$  buc.;  $E = 1500$  buc. ;  $N_2 = 2000$  buc.

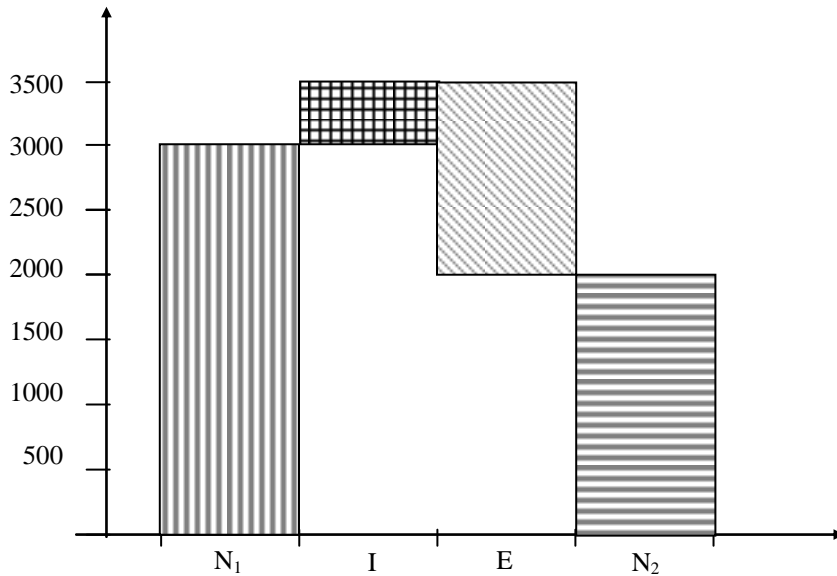


Figura 1.44. Diagrama de balanță

#### Diagrama prin coloane în aflux

Este specializată pentru ilustrarea grafică a comparațiilor în timp, simultan pentru mai mulți indicatori din aceeași grupă, exprimați în aceeași unitate de măsură. Metodologia de construcție este similară cu cea a diagramei prin coloane utilizată în cazul seriilor de timp, cu deosebirea că fiecărei variante sau interval pentru variabila timp îi sunt atașate, pe grafic, mai multe coloane de lățime egală și înălțime corespunzătoare fiecărui indicator reprezentat, plasate una în spatele celeilalte și decalate de obicei cu jumătate din lățimea bazei.

Figurile geometrice utilizate mai des pe post de coloane sunt : dreptunghiul, pătratul, cercul, paralelipipedul, cilindrul etc.

**Exemplu 1.32 :** Se cunosc datele :

Tabelul 1.25.  
- mii tone-

Anul	Grâu	Porumb	Secară
1990	50	100	10
1995	60	120	20
2000	55	150	25

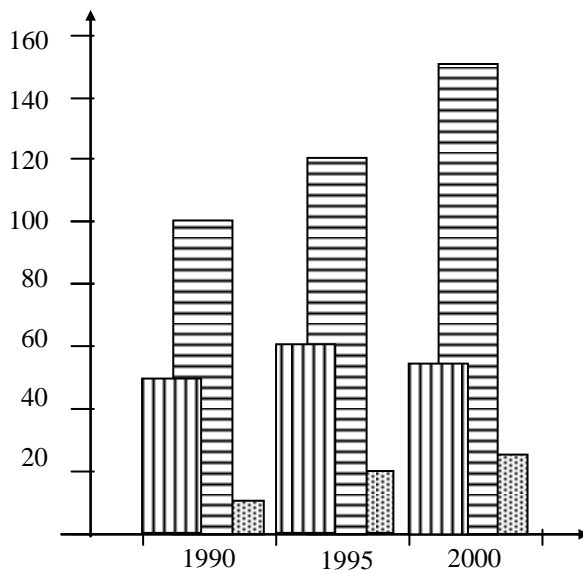


Figura 1.45. Diagrama prin coloane în aflus

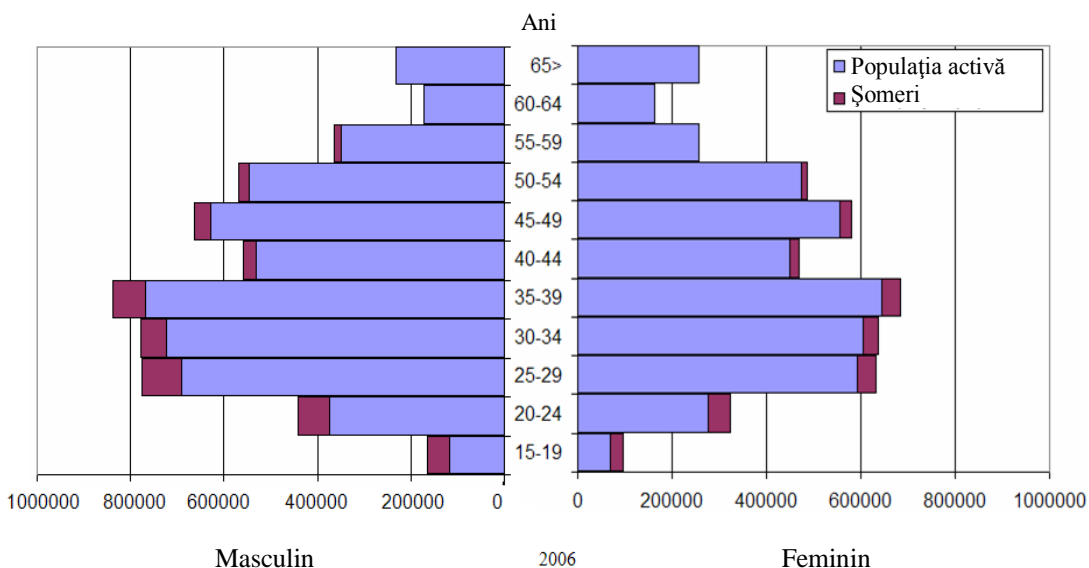


Figura 1.46. Piramida vârstelor pentru populația activă din România.

Pentru selectarea rapidă a tipului de grafice adecvate tipului de date de reprezentat este utilă schema din figura următoare :



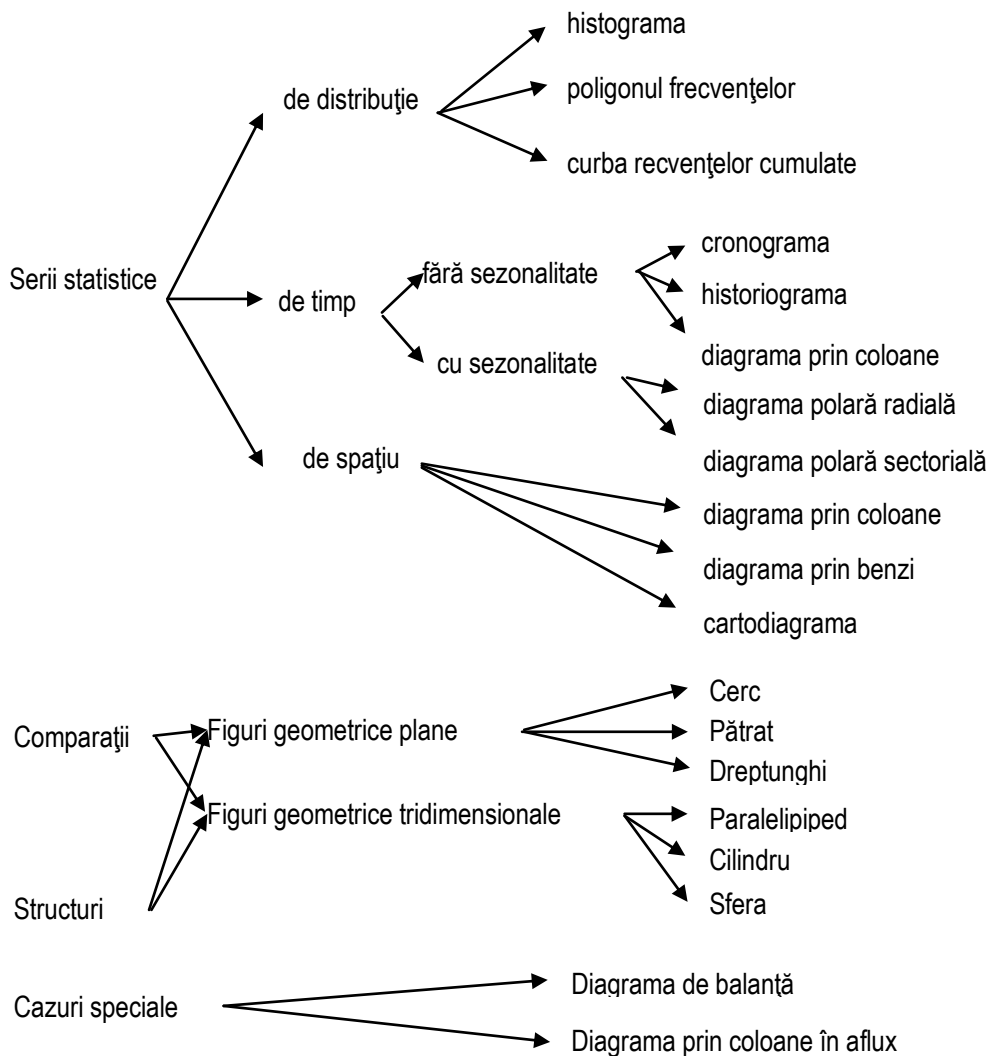


Figura 1.47. Tipuri de date – tipuri de reprezentări grafice

<b>SERII STATISTICE ȘI REPREZENTĂRI GRAFICE .....</b>	<b>1</b>
1.1. Scurt istoric .....	1
1.2. Noțiuni fundamentale .....	1
1.3. Variabila de grupare .....	2
1.4. Serii statistice .....	5
<b>1.4.1. Serii de distribuție .....</b>	<b>5</b>
<b>1.4.2. Serii cronologice .....</b>	<b>12</b>
<b>1.4.3. Serii de spațiu .....</b>	<b>13</b>
1.5. Reprezentări grafice .....	14
<b>1.5.1. Elemente constructive ale unui grafic statistic .....</b>	<b>15</b>
<b>1.5.2. Reprezentarea grafică a seriilor statistice .....</b>	<b>17</b>
1.5.2.1. Grafica seriilor de distribuție .....	17
1.5.2.2. Grafica seriilor cronologice .....	23
1.5.2.3. Grafica seriilor de spațiu.....	28
<b>1.5.3. Reprezentarea grafică a comparațiilor .....</b>	<b>31</b>
<b>1.5.4. Reprezentarea grafică a structurilor .....</b>	<b>36</b>
<b>1.5.5. Alte tipuri de reprezentări grafice .....</b>	<b>38</b>