5

INDICII STATISTICI

5.1. Definiţia şi rolul indicilor în cercetarea statistică. Tipuri de indici

Datorită faptului că reflectă cu multă expresivitate şi în mod analitic modificările care au loc, rolul şi influenţa diverşilor factori în variaţia fenomenelor cercetate, indicii au căpătat o largă aplicabilitate în toate domeniile activităţii economice şi sociale, reprezentând o categorie importantă a indicatorilor statistici. Seria largă a funcţiilor cognitive îndeplinite de indicii statistici (măsurarea variaţiei în timp şi spaţiu a fenomenelor, descompunerea variaţiei fenomenelor complexe pe factori de influenţă, caracterizarea gradului de îndeplinire a programului etc.) l-a determinat pe economistul Helmut Swoboda să afirme că: „indicele este degetul arătător al economiei, indicatorul progresului şi al insuccesului”.[1]

Indicii sunt mărimi relative adimensionale - exprimate procentual sau sub formă de coeficient - obţinute prin raportarea a două niveluri ale unui indicator simplu sau complex, corespunzătoare la două unităţi diferite de timp sau de spaţiu.

Altfel exprimat, **indicele sintetizează într-o expresie numerică nivelul relativ al caracteristicii unui ansamblu de elemente**, care formează fenomenul sau activitatea cercetată; produsele fabricate sau comercializate de o societate comercială, salariaţii unei societăţi comerciale, fondurile fixe, etc. formează astfel de ansambluri de elemente. Nivelul absolut al caracteristicilor unor astfel de colectivităţi statistice nefiind suficient de concludent pentru aprecierea dimensiunii şi evoluţiei activităţii desfăşurate, se impune comparaţia în timp, în spaţiu sau faţă de programul stabilit - şi implicit completarea exprimării în mărime absolută cu cea în mărime relativă a nivelului colectivităţii studiate.

Aplicarea metodei indicilor statistici presupune identificarea factorilor care determină variaţia fenomenului cercetat, înregistrarea nivelurilor acestora pentru toate unităţile statistice şi construirea relaţiilor care să permită caracterizarea modificării relative (şi absolute) atât la nivelul colectivităţii, cât şi al elementelor sale componente.

În abordarea problemelor teoretice şi practice ale indicilor vom folosi următoarele notaţii:

$i = \overline{1,n}$ - unităţile statistice componente ale colectivităţii cercetate.

[1] Swoboda, H.: Knaurs Buch der moderner Statistik. Droemersch Veriagsanstalt, München - Zürich, 1971

f_i - variantele variabilei cantitative (factorului cantitativ) $\boldsymbol{F}$, înregistrate la unităţile statistice $\boldsymbol{i}$; exemple: cantităţile de produse fabricate, comercializate sau consumate, numărul de salariaţi, etc.

x_i - variantele variabilei calitative (factorului calitativ) $\boldsymbol{X}$, înregistrate la unităţile statistice $\boldsymbol{i}$; exemple: preţul de vânzare, costul de producţie, productivitatea muncii, salariul mediu, etc.

y_i - variantele variabilei complexe (indicatorului sau fenomenului complex) $\boldsymbol{Y}$, determinate pe baza relaţiei $y_i = x_i f_i$; exemple: valoarea producţiei, valoarea desfacerilor de mărfuri, cheltuielile băneşti de consum ale populaţiei, fondul de salarii, etc.

$t = \overline{0,T}$ - unităţile de timp (zi, lună, trimestru, semestru, an); vom nota cu ***0*** perioada anterioară (numită frecvent perioadă de bază sau de referinţă) şi cu ***1*** perioada curentă (numită şi perioadă finală).

A, B, C ... - unităţile de spaţiu (unităţi administrativ-teritoriale: localităţi, judeţe, zone, ţări, etc. sau unităţi organizatorice: societăţi comerciale, instituţii, ramuri economice, centre universitare, etc.).

Datorită varietăţii indicilor folosiţi în practica statisticii social-economice din ţara noastră, se impune o clasificare a lor în funcţie de mai multe criterii:

a) După natura fenomenului studiat, distingem: indici ai preţurilor, indici ai volumului fizic, indici ai valorii producţiei, indici ai productivităţii muncii, indici ai salariului nominal sau real, etc.

b) După destinaţia lor în analiza economică şi socială (sau în funcţie de aspectele evidenţiate în cadrul comparaţiei), indicii se grupează în:

b.1. Indici ai programului (**ai planului**) - care au un rol aparte în condiţiile relaţiilor contractuale între societăţile comerciale la nivel microeconomic şi se calculează prin raportarea nivelului programat la realizările precedente, obţinându-se un **indice al sarcinii de program**:

$$I^{Y}_{pr/0} = \frac{y_{pr}}{y_0}(100)$$

unde: y_{pr} - nivelul programat al indicatorului analizat;

y_0 - nivelul din perioada de bază

sau prin compararea între nivelul realizat şi cel programat pentru perioada curentă ale unui indicator, obţinându-se un **indice al îndeplinirii programului** :

$$I^{y}_{1/pr} = \frac{y_1}{y_{pr}}(100)$$

unde: y_1 - nivelul realizat în perioada curentă.

Aceşti indici sunt mărimi relative ale planului şi reflectă - în expresie relativă - realizarea sau îndeplinirea planului (programului).

b.2. Indici ai dinamicii (cronologici) - sunt mărimi relative ale dinamicii şi se calculează ca raport între nivelurile realizate de un fenomen în perioada curentă şi o perioadă anterioară :

$$I^{y}_{1/0} = \frac{y_1}{y_0}(100)$$

Cu ajutorul acestor indici - cel mai frecvent folosiţi, de altfel - poate fi cuantificată variaţia fenomenelor social-economice în raport cu timpul producerii lor, realizându-se o analiză diacronică/longitudinală.

Între indicii dinamicii şi cei ai programului, există următoarea relaţie:

$$I^{y}_{1/0} = I^{y}_{pr/0} \cdot I^{y}_{1/pr}$$

În funcţie de **baza de raportare** (nivelul de referinţă), indicii cronologici pot fi grupaţi în **indici cu bază fixă** şi **indici cu bază mobilă** (cu baza în lanţ)[2].

b.3. Indici teritoriali - sunt mărimi relative de coordonare, calculate ca raport între termenii unei serii statistice de spaţiu; măsoară variaţia fenomenelor social-economice observate în colectivităţi coexistente în timp, dar situate în spaţii diferite (spaţii geografice sau organizatorice); prin intermediul lor se realizează o analiză sincronică/transversală:

$$I^{y}_{A/B} = \frac{y_A}{y_B}(100)$$

unde: y_A, y_B - nivelurile fenomenului înregistrate în unitatea teritorială *A*, respectiv *B*.

c) În funcţie de sfera de cuprindere a fenomenului sau de nivelul de agregare a datelor, distingem:

c.1. Indici individuali (elementari) - notaţi de regulă, cu „i”, care exprimă variaţia relativă - în timp sau spaţiu - a unui fenomen la nivelul unei singure unităţi statistice de observare din cadrul colectivităţii:

$$i^{y}_{1/0} = \frac{y_1}{y_0}(100) = \frac{x_1 f_1}{x_0 f_0}(100)$$

unde: $i^{y}_{1/0}$ - indice individual al dinamicii;

y_1, y_0 - nivelurile variabilei complexe în perioada curentă, respectiv de bază;

x_1, x_0 - nivelurile variabilei factoriale de natură calitativă în perioada curentă, respectiv de bază;

f_1, f_0 - nivelurile variabilei factoriale de natură cantitativă în perioada curentă, respectiv de bază.

$$i^{y}_{A/B} = \frac{y_A}{y_B}(100) = \frac{x_A f_A}{x_B f_B}(100)$$

unde: $i^{y}_{A/B}$ - indice individual teritorial

A, B - unităţi teritoriale.

În funcţie de natura raportului dintre cei doi termeni comparaţi vom avea:

• **pentru indicii dinamicii:**

- dacă $\frac{y_1}{y_0} > 1$ (100%), înseamnă că $y_1 > y_0$ şi asistăm la un proces de creştere a fenomenului studiat;
- dacă $\frac{y_1}{y_0} = 1$, înseamnă că $y_1 = y_0$ şi procesul este staţionar;

[2] Vezi capitolul 3.

- dacă $\frac{y_1}{y_0} < 1$, înseamnă că $y_1 < y_0$ şi asistăm la un proces de scădere a fenomenului analizat.

• **pentru indicii teritoriali**

- dacă $\frac{y_A}{y_B} > 1$, $y_A > y_B$ şi nivelul fenomenului este mai mare în unitatea teritorială *A* decât în *B*;
- dacă $\frac{y_A}{y_B} = 1$, $y_A = y_B$ şi deci nivelurile fenomenului în cadrul celor două unităţi sunt egale;
- dacă $\frac{y_A}{y_B} < 1$, $y_A < y_B$ şi nivelul fenomenului în unitatea A este mai mic decât în B.

Într-o concepţie mai largă, toţi indicii sunt **mărimi relative cu caracter de medie**, care constituie expresii numerice ale unor informaţii de natură calitativă rezultate din compararea nivelului analizat cu unul sau mai multe niveluri ale aceleiaşi caracteristici, considerate baze succesive de comparaţie (de referinţă).

Deoarece un fenomen economico-social nu se analizează dintr-un singur punct de vedere, este necesar ca în procesul observării să se înregistreze toate caracteristicile care permit înţelegerea fenomenului studiat la nivelul fiecărui element constitutiv al colectivităţii, în vederea atingerii scopului cercetării statistice. Dintre aceste caracteristici unele sunt de natură complexă - ***y*** - iar variaţia lor este influenţată de caracteristici factoriale de natură calitativă (intensivă) - ***x*** - sau cantitativă (extensivă) - ***f***.

O premisă a valorificării integrale a capacităţii cognitive a indicilor constă în exprimarea relaţiilor dintre caracteristicile factoriale sub formă multiplicativă, produsul lor constituindu-l variabila complexă. Aplicarea metodei indicilor permite astfel determinarea unui **sistem de indici**, al cărui scop îl constituie descompunerea variaţiei caracteristicii complexe pe factori de influenţă.

La nivelul unui element al ansamblului, deoarece între caracteristici avem următoarea relaţie:

$$y = x \cdot f$$

variaţia relativă a caracteristicii complexe se descompune şi ea cu uşurinţă în variaţia factorilor:

$$i_{1/0}^{y} = \frac{y_1}{y_0} = \frac{x_1 f_1}{x_0 f_0} = \frac{x_1}{x_0} \cdot \frac{f_1}{f_0} = i_{1/0}^{x} \cdot i_{1/0}^{f}$$

$$i_{A/B}^{y} = \frac{y_A}{y_B} = \frac{x_A f_A}{x_B f_B} = \frac{x_A}{x_B} \cdot \frac{f_A}{f_B} = i_{A/B}^{x} \cdot i_{A/B}^{f}$$

unde: $i_{1/0}^{x}$, $i_{1/0}^{f}$, $i_{A/B}^{x}$, $i_{A/B}^{f}$ - indicii individuali ai caracteristicilor factoriale.

Deoarece relaţia dintre volumul valoric al producţiei, preţ şi cantitate (volum fizic), reprezintă cazul cel mai simplu de descompunere a unei caracteristici complexe pe factorii săi determinanţi - preţul, factor calitativ şi volumul fizic, factor cantitativ - vom exemplifica modul de construcţie şi interpretare al fiecărui tip de indice individual printr-o aplicaţie numerică - cu date ipotetice - din acest domeniu.

Exemplul 5.1.

Se consideră un produs fabricat de două societăţi comerciale, pentru care se cunosc cantităţile şi preţurile de vânzare în trei perioade succesive ($t = 0, 1, 2$) - tabelul 5.1.

Tabelul 5.1.

Societatea Comercială	**Preţul produsului (p) în perioada: (mii lei /kg)**			**Cantitatea fabricată (q) în perioada: (kg)**		
	0	1	2	0	1	2
A	20	30	40	100	120	160
B	25	30	35	150	200	250

Să se determine şi interpreteze indicii elementari posibili.

Rezolvare:

Deoarece avem informaţii privind variaţia atât în timp (perioadele 0, 1, 2) cât şi în spaţiu (unităţi economice A şi B) a preţurilor şi cantităţilor fabricate din produsul respectiv, se pot determina următorii indici elementari:

- pentru evoluţia în timp
  - indici ai dinamicii cu bază fixă ai cantităţilor $\left(i^{q}_{t/0}\right)$, preţurilor $\left(i^{p}_{t/0}\right)$ şi valorii producţiei $\left(i^{v}_{t/0}\right)$; t = 1,2

$$i^{q}_{t/0} = \frac{q_t}{q_0}; \qquad i^{p}_{t/0} = \frac{p_t}{p_0}; \qquad i^{v}_{t/0} = \frac{v_t}{v_0} = \frac{p_t q_t}{p_0 q_0}$$

  - indici ai dinamicii cu bază în lanţ $\left(i^{q}_{t/t-1}, i^{p}_{t/t-1}, i^{v}_{t/t-1}\right)$ t=1,2.

$$i^{q}_{t/t-1} = \frac{q_t}{q_{t-1}}; \qquad i^{p}_{t/t-1} = \frac{p_t}{p_{t-1}}; \qquad i^{v}_{t/t-1} = \frac{v_t}{v_{t-1}} = \frac{p_t q_t}{p_{t-1} q_{t-1}}$$

- pentru evoluţia în spaţiu
  - indici teritoriali ai cantităţilor, preţurilor şi valorii producţiei (nivelul referenţial poate fi A sau B, dar timpul este constant şi poate fi 0, 1, 2).

$$i^{q}_{A/B} = \frac{q_A}{q_B}; \qquad i^{p}_{A/B} = \frac{p_A}{p_B}; \qquad i^{v}_{A/B} = \frac{v_A}{v_B} = \frac{p_A q_A}{p_B q_B}$$

O parte din rezultate sunt prezentate în tabelul 5.2. şi tabelul 5.3.

Tabelul 5.2.

Indici ai dinamicii / **Societatea Comercială**	i^q		i^p		i^v	
	$i^{q}_{2/0}$	$i^{q}_{2/1}$	$i^{p}_{2/0}$	$i^{p}_{2/1}$	$i^{v}_{2/0}$	$i^{v}_{2/1}$
A	1,60	1,33	2,00	1,33	3,20	1,77
B	1,67	1,25	1,40	1,17	2,34	1,46

Tabelul 5.3.

Indici teritoriali (perioada t=2) / Baza de comparaţie	i^q	i^p	i^v
A ($i_{B/A}$)	1,56	0,87	1,36
B ($i_{A/B}$)	0,64	1,14	0,73

Interpretarea indicatorilor - în mod selectiv - este următoarea:

- cantitatea produsă de unitatea B în perioada 2 a fost de 1,67 ori mai mare decât în perioada de referinţă 0 şi cu 25% mai mare decât în perioada imediat anterioară (1);
- preţul produsului la societatea A s-a dublat în perioada 2 faţă de perioada de bază (0);
- în perioada 2 faţă de perioada 1, valoarea producţiei la unitatea A a crescut de 1,77 ori;
- în perioada 2 preţul produsului la unitatea A a fost de 1,14 ori mai mare decât la unitatea B, în timp ce volumul fizic realizat de unitatea A a reprezentat doar 64% din volumul fizic realizat de unitatea B.

c.2. Indici de grup - exprimă variaţia medie relativă a fenomenului studiat la nivelul unei grupe de unităţi statistice sau al ansamblului acestora:

- în timp: $i^y_{1/0} = \frac{\sum y_1}{\sum y_0}(100) = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum x_0 f_0}(100)$

sau

- în spaţiu: $i^y_{A/B} = \frac{\sum y_A}{\sum y_B}(100) = \frac{\sum x_A f_A}{\sum x_B f_B}(100)$

Notă: Pentru a evita încărcarea formulelor cu prea multe simboluri renunţăm la indexarea sumei, înţelegându-se că agregarea cuprinde toate elementele constitutive ale grupei sau colectivităţii studiate.

d) În funcţie de **metoda de calcul** a acestora, indicii de grup pot fi:

d.1. Indici agregaţi - sunt obţinuţi prin compararea sumelor elementelor de agregare. Pentru o grupă de unităţi sau pentru întreaga colectivitate, nivelul absolut al caracteristicii complexe rezultă din însumarea (agregarea) nivelurilor observate pentru fiecare unitate a ansamblului ($\sum y_1, \sum y_0$).

Dar, în majoritatea cazurilor, fenomenele social-economice sunt alcătuite din **elemente eterogene** a căror însumare în expresie naturală nu este posibilă sau nu are sens: cantităţile produse sau comercializate ale diferitelor mărfuri nu se pot aduna, iar cumularea preţurilor acestora nu are sens (valorile de întrebuinţare fiind distincte). Deoarece logica economică respinge sumele simple de tipul $\sum x$ sau $\sum f$, pentru a stabili nivelurile totalizatoare ale factorilor ce determină variaţia în timp sau spaţiu a unui ansamblu de elemente eterogene, este necesară introducerea în calcul a unui **comăsurător** (numit şi pondere sau frecvenţă) care să facă posibilă însumarea.

Contribuţia fiecărui factor (x, f) la modificarea nivelului fenomenului complex pentru ansamblul unităţilor studiate, se obţine lăsând liberă variaţia acestuia şi menţinând comăsurătorul constant la nivelul fiecărui element al colectivităţii; indicii de grup care se bazează pe determinarea prealabilă a unor astfel de agregate se numesc tot **indici agregaţi** şi se obţin pe baza relaţiilor:

$$I^{x}_{1/0} = \frac{\sum x_1 f}{\sum x_0 f}$$ - măsoară influenţa factorului calitativ

$$I^{f}_{1/0} = \frac{\sum x f_1}{\sum x f_0}$$ - măsoară influenţa factorului cantitativ

Condiţia pentru aplicarea în practică a indicilor de grup agregaţi este ca baza de date să fie detaliată pentru fiecare variabilă cuprinsă în analiză până la nivelul elementar al colectivităţii studiate. Dacă elementele de agregare (x şi f) nu se înregistrează în documentele de evidenţă primară sau nu se pot observa direct, se folosesc alte procedee de determinare a indicilor de grup, care combină mărimile absolute ale variabilelor complexe cu indicii individuali ai variabilelor factoriale.

d.2. Indici medii aritmetici - se calculează ca o medie aritmetică ponderată a indicilor individuali, cunoscând nivelurile de bază ale factorului de ponderare. Dacă ne referim la fenomenul complex (*y*), cunoscând:

$$\begin{cases} \sum y_0 \\ i^{y}_{1/0} = \dfrac{y_1}{y_0} \quad \Rightarrow \quad y_1 = i^{y}_{1/0} \cdot y_0 \end{cases}$$

obţinem relaţia:

$$I^{y}_{1/0} = \frac{\sum y_1}{\sum y_0} = \frac{\sum i^{y}_{1/0} \cdot y_0}{\sum y_0}$$

Indicele de grup calculat ca medie aritmetică a indicilor individuali se aplică în practica statistică în special pentru evidenţierea influenţei factorului cantitativ:

$$I^{y(f)}_{1/0} = \frac{\sum i^{f}_{1/0} \cdot x_0 f_0}{\sum x_0 f_0}$$

unde: $x_0 f_0$ - nivelul individual al fenomenului complex în perioada de bază;

$i^{f}_{1/0}$ - indicii individuali ai factorului cantitativ

Indicii sub formă de medie aritmetică se folosesc şi în cazul în care datele provin din cercetări selective (sondaje statistice) şi se impune măsurarea erorilor de selecţie (eroarea medie de reprezentativitate şi eroarea limită admisă). În acest sens, indicele mediu aritmetic se utilizează ca orice mărime medie, stând la baza calculului dispersiei şi al estimării indicilor din colectivitatea generală.

d.3. Indici medii armonici - se calculează ca o medie armonică ponderată a indicilor individuali, cunoscând nivelurile curente (din perioada analizată) ale factorului de ponderare. Pentru variabila complexă, cunoscând:

$$\begin{cases} \sum y_1 \\ i^{y}_{1/0} = \dfrac{y_1}{y_0} \quad \Rightarrow \quad y_0 = \dfrac{1}{i^{y}_{1/0}} \cdot y_1 \end{cases}$$

obţinem relaţia:

$$I^{y}_{1/0} \frac{\sum y_1}{\sum y_0} = \frac{\sum y_1}{\sum \dfrac{1}{i^{y}_{1/0}} \cdot y_1}$$

Indicele de grup calculat ca medie armonică a indicilor individuali se aplică în practica statistică, de regulă, pentru determinarea influenţei factorului calitativ:

$$I_{1/0}^{y(x)} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum \frac{1}{i_{1/0}^{x}} \cdot x_1 f_1}$$

unde: $x_1 f_1$ - nivelul individual al fenomenului complex în perioada curentă;

$i_{1/0}^{x}$ - indicii individuali ai factorului calitativ.

Indicii calculaţi sub formă de medie se aplică deci atunci când nu se cunosc toate elementele necesare determinării indicilor agregaţi; de aceea, indicii medii - aritmetici sau armonici - trebuie să îndeplinească două condiţii: să fie o medie a indicilor individuali ai fenomenului studiat şi să fie egali ca valoare cu indicele agregat substituit.

d.4. Indici calculaţi ca raport a două mărimi medii - folosiţi pentru măsurarea variaţiei unor caracteristici derivate ce se formează ca mărime medie - de obicei, medie aritmetică ponderată - la nivelul unei grupe sau al colectivităţii. Este vorba de colectivităţi alcătuite din **elemente asemănătoare**, omogene din punct de vedere statistic (de exemplu: produse de acelaşi fel, număr de muncitori), caz în care agregarea elementelor se poate face atât pentru variabila complexă ($\sum y$ - care poate fi: consum total de materiale, fond de salarii) cât şi pentru variabila factorială de ordin cantitativ ($\sum f$ - volumul fizic al producţiei, număr total de muncitori), iar variabila factorială de ordin calitativ se determină ca o mărime medie la nivelul colectivităţii studiate:

$$\overline{x} = \frac{\sum y}{\sum f} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \sum x \cdot \frac{f}{\sum f} = \sum x \cdot S$$

unde: $\overline{x}$ - nivelul mediu al factorului calitativ (de exemplu: consum specific individual de materiale, salariul mediu realizat);

x - nivelurile individuale ale caracteristicii calitative derivate (acestea au caracter de mărime relativă de intensitate, fiind rezultat al raportului dintre două caracteristici de natură diferită);

f - frecvenţa de apariţie a nivelurilor individuale;

$S = \frac{f}{\sum f}$ - ponderea fiecărui element sau structura colectivităţii cercetate.

Deoarece nivelul mediu al factorului calitativ astfel construit depinde de nivelurile individuale observate la fiecare element al colectivităţii (x) şi de structura acesteia (S) , forma generală a indicelui de grup calculat ca raport de medii este:

$$I_{1/0}^{\overline{x}} = \frac{\overline{x}_1}{\overline{x}_0} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum f_1} : \frac{\sum x_0 f_0}{\sum f_0} = \frac{\sum x_1 S_1}{\sum x_1 S_0}$$

El reflectă modificarea medie a caracteristicii ($\overline{x}$) sub acţiunea conjugată a factorilor calitativi (x) şi cantitativi - structurali (f sau S).

e) În funcţie de complexitatea informaţiilor pe care le sintetizează, indicii pot fi:

e.1. Indici generali - exprimă variabilitatea globală a unui fenomen determinată de modificarea concomitentă a tuturor factorilor de influenţă. Se determină la nivelul unei singure unităţi statistice (ca indice individual) sau la nivelul întregii colectivităţi (ca indice de grup):

$$i_{1/0}^{y(x,f)} = \frac{y_1}{y_0} = \frac{x_1 f_1}{x_0 f_0}$$

$$I_{1/0}^{y(x,f)} = \frac{\sum y_1}{\sum y_0} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum x_0 f_0}$$

e.2. Indici factoriali - exprimă variabilitatea fenomenului general determinată de influenţa fiecăruia dintre factori. Pentru separarea influenţei unui factor, nivelurile celorlalţi factori se menţin constante (joacă rol de pondere).

Pentru evidenţierea influenţei factorului calitativ (x) asupra variaţiei unui fenomen general (y) există două posibilităţi:

$$i_{1/0}^{y(x)} = \frac{x_1 f_1}{x_0 f_1} = \frac{x_1}{x_0} = i_{1/0}^{x} \quad \text{sau} \quad i_{1/0}^{y(x)} = \frac{x_1 f_0}{x_0 f_0} = \frac{x_1}{x_0} = i_{1/0}^{x}$$

$$I_{1/0}^{y(x)} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum x_0 f_1} \quad \text{sau} \quad I_{1/0}^{y(x)} = \frac{\sum x_1 f_0}{\sum x_0 f_0}$$

Pentru evidenţierea influenţei factorului cantitativ (f) avem, de asemenea două posibilităţi de ponderare:

$$i_{1/0}^{y(f)} = \frac{x_1 f_1}{x_1 f_0} = \frac{f_1}{f_0} = i_{1/0}^{f} \quad \text{sau} \quad i_{1/0}^{y(f)} = \frac{x_0 f_1}{x_0 f_0} = \frac{f_1}{f_0} = i_{1/0}^{f}$$

$$I_{1/0}^{y(f)} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum x_1 f_0} \quad \text{sau} \quad I_{1/0}^{y(f)} = \frac{\sum x_0 f_1}{\sum x_0 f_0}$$

Se observă că în cazul indicilor individuali, metoda de ponderare aleasă nu influenţează rezultatul: indicii factoriali individuali sunt egali cu indicii individuali ai factorului respectiv:

$$i_{1/0}^{y(x)} = i_{1/0}^{x} \quad \text{şi} \quad i_{1/0}^{y(f)} = i_{1/0}^{f}$$

În cazul indicilor de grup, nivelurile indicilor factoriali diferă în funcţie de metoda de ponderare aleasă. Explicaţia constă în aceea că indicii de grup fiind - cum am demonstrat anterior - medii (aritmetice sau armonice) ale indicilor individuali, nivelurile lor depind şi de frecvenţe (ponderi).

Fundamentarea teoretică care stă la baza alegerii unei anumite variante de ponderare, însoţită şi de consideraţii practice, va reprezenta subiectul unui paragraf următor (5.3.).

5.2. Proprietăţile indicilor. Teste de verificare

Indicii - atât cei elementari, cât şi cei de grup - au anumite proprietăţi numite şi „teste de verificare”, însă nu toate proprietăţile pe care le îndeplinesc indicii elementari sunt satisfăcute de toţi indicii de grup. Dintre proprietăţile indicilor elementari se disting:

1) identitatea - semnifică faptul că prin raportarea mărimii indicatorului, corespunzătoare aceleiaşi perioade (t) sau unităţi spaţiale (A), indicele va fi egal cu unitatea (sau cu 100, dacă este exprimat procentual:

$$i_{t/t} = \frac{y_t}{y_t}(100) = 1(100\%)$$

$$i_{A/A} = \frac{y_A}{y_A}(100) = 1(100\%)$$

2) reversibilitatea în timp sau spaţiu - presupune că, pornind de la indicii elementari cunoscuţi $i^y_{m/n}$ şi $i^y_{n/m}$ (unde ***n***, ***m*** sunt două unităţi de timp sau spaţiu), vom avea:

$$i^y_{m/n} \cdot i^y_{n/m} = 1$$

$$\Rightarrow i^y_{m/n} = \frac{1}{i^y_{n/m}} \quad \text{sau} \quad i^y_{n/m} = \frac{1}{i^y_{m/n}}$$

Demonstraţia este foarte simplă:

$$i^y_{m/n} = \frac{y_m}{y_n} \quad \text{iar} \quad i^y_{n/m} = \frac{y_n}{y_m} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i^y_{m/n} \cdot i^y_{n/m} = \frac{y_m}{y_n} \cdot \frac{y_n}{y_m} = 1$$

Proprietatea are utilitate practică evidentă: permite calculul unui indice, $i^y_{m/n}$, atunci când nu se cunosc nivelurile fenomenului (y_m, y_n), dar se cunoaşte indicele $i^y_{n/m}$.

3) circularitatea - presupune că, pornind de la indicii elementari cunoscuţi - $i^y_{m/n}$ şi $i^y_{n/p}$ - unde *m, n* şi *p* sunt trei perioade de timp sau unităţi de spaţiu diferite, se poate determina indicele:

$$i^y_{m/p} = i^y_{m/n} \cdot i^y_{n/p}$$

Relaţiile derivate sunt:

$$i^y_{m/n} = \frac{i^y_{m/p}}{i^y_{n/p}} \quad \text{sau} \quad i^y_{n/p} = \frac{i^y_{m/p}}{i^y_{m/n}}$$

Demonstraţia este şi în acest caz foarte simplă:

$$i^y_{m/n} = \frac{y_m}{y_n} \quad ; \quad i^y_{m/p} = \frac{y_m}{y_p} \quad ; \quad i^y_{n/p} = \frac{y_n}{y_p}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{y_m}{y_p} = \frac{y_m}{y_n} \cdot \frac{y_n}{y_p} = \frac{y_m}{y_p}$$

Generalizarea acestei proprietăţi, pentru indicii unei serii de timp, conduce la următoarea relaţie (deja cunoscută, din capitolul referitor la indicatorii seriilor cronologice):

$$i^y_{T/0} = \prod_{t=1}^{T} i^y_{t/t-1}$$

Exemplul 5.2.

Presupunem cunoscute preţurile unui produs pe o piaţă, în trei luni succesive (tabelul 5.4.).

Tabelul 5.4.

Luna		Preţul unitar (lei/buc.)
ianuarie	(1)	200
februarie	(2)	250
martie	(3)	300

Determinarea indicilor elementari posibili, se poate face direct:

$$i^{p}_{2/1} = \frac{250}{200} = 1{,}25$$

$$i^{p}_{3/1} = \frac{300}{200} = 1{,}5$$

$$i^{p}_{3/2} = \frac{300}{250} = 1{,}2$$

sau aplicând proprietăţile indicilor:

- proprietatea de reversibilitate - putem determina indicii:

$$i^{p}_{1/2} = \frac{1}{i^{p}_{2/1}} = 0{,}8$$

$$i^{p}_{1/3} = \frac{1}{i^{p}_{3/1}} = 0{,}66$$

$$i^{p}_{2/3} = \frac{1}{i^{p}_{3/2}} = 0{,}83$$

- proprietatea de circularitate - putem determina indicii:

$$i^{p}_{3/1} = i^{p}_{2/1} \cdot i^{p}_{3/2} = 1{,}25 \cdot 1{,}2 = 1{,}5$$

$$i^{p}_{2/1} = \frac{i^{p}_{3/1}}{i^{p}_{3/2}} = \frac{1{,}5}{1{,}2} = 1{,}25$$

$$i^{p}_{3/2} = \frac{i^{p}_{3/1}}{i^{p}_{2/1}} = \frac{1{,}5}{1{,}25} = 1{,}2$$

4) reversibilitatea factorilor - prezintă două variante:

a) atunci când un indicator complex este direct proporţional cu doi factori (poate fi scris ca produs al acestora: $y=x\cdot f$), indicele său elementar este egal cu produsul indicilor elementari ai factorilor.

$$i^{y}_{m/n} = \frac{y_m}{y_n} = \frac{x_m f_m}{x_n f_n} = \frac{x_m}{x_n} \cdot \frac{f_m}{f_n} = i^{x}_{m/n} \cdot i^{f}_{m/n}$$

unde: m şi n sunt două unităţi diferite de timp sau spaţiu.

Pentru exemplificare vom folosi rezultatele de la exemplul 5.1. (tabelele 5.2. şi 5.3.). Se verifică uşor faptul că indicii individuali ai valorii produsului sunt egali cu produsul dintre indicii individuali ai preţurilor şi cei ai cantităţilor:

- indicii dinamicii pentru societatea comercială A:

$$i^{v}_{2/0} = i^{p}_{2/0} \cdot i^{q}_{2/0} \quad \Rightarrow \quad 3{,}2 = 2 \cdot 1{,}6 = 3{,}2$$

sau $$i^{v}_{2/1} = i^{p}_{2/1} \cdot i^{q}_{2/1} \quad \Rightarrow \quad 1{,}77 = 1{,}33 \cdot 1{,}33 \approx 1{,}77$$

- indicii teritoriali:

$$i^{v}_{B/A} = i^{p}_{B/A} \cdot i^{q}_{B/A} \quad \Rightarrow \quad 1{,}36 = 0{,}87 \cdot 1{,}56 \approx 1{,}36$$

$$i^{v}_{A/B} = i^{p}_{A/B} \cdot i^{q}_{A/B} \quad \Rightarrow \quad 0{,}73 = 1{,}14 \cdot 0{,}64 \approx 0{,}73$$

b) atunci când un indicator complex este direct proporţional cu un factor - x - şi invers proporţional cu alt factor - f - (poate fi scris ca raport al acestora: $y = \frac{x}{f}$), indicele său elementar este egal cu raportul indicilor elementari ai factorilor:

$$i^{y}_{m/n} = \frac{y_m}{y_n} = \frac{\frac{x_m}{f_m}}{\frac{x_n}{f_n}} = \frac{x_m}{x_n} : \frac{f_m}{f_n} = \frac{i^{x}_{m/n}}{i^{f}_{m/n}}$$

5) proporţionalitatea - dacă mărimea indicatorului simplu, din unitatea de timp sau spaţiu **m** este un multiplu de **k** al mărimii indicatorului din unitatea **n**, atunci indicele elementar $i_{m/n}$ este şi el un multiplu de **k**:

$$x_m = kx_n \quad \Rightarrow \quad i^{x}_{m/n} = \frac{x_m}{x_n} = \frac{k \cdot x_n}{x_n} = k$$

Pentru exemplificare vom folosi tot rezultatele de la exemplul 5.1: la societatea comercială B, între cantităţile produse în perioadele **1** şi **2** există relaţia:

$$q_2 = 1{,}25 q_1$$

$$\Rightarrow \qquad i^{q}_{2/1} = \frac{q_2}{q_1} = \frac{1{,}25 q_1}{q_1} = 1{,}25 \quad \text{(tabelul 5.2.)}$$

Fiind mult mai importanţi pentru analiza statistică, elaborarea indicilor de grup presupune clarificarea, în prealabil, a unor aspecte teoretice, care se referă, în principal, la: alegerea bazei de raportare şi a formulei de calcul, stabilirea sistemului de ponderare astfel încât indicatorii calculaţi să reflecte corect şi realist variaţia fenomenului studiat.

Baza de raportare trebuie să fie un nivel obişnuit al fenomenului analizat (să nu reprezinte o situaţie de excepţie pentru colectivitatea studiată), pentru ca indicele să reflecte modificarea reală a acestuia.

Formula de calcul se alege în funcţie de datele disponibile şi de natura elementelor din colectivitatea care alcătuieşte fenomenul analizat (se pot utiliza indici agregaţi, indici medii de grup sau indici calculaţi ca raport a două mărimi medii).

Sistemul de ponderare este cel mai important element în construirea indicilor de grup factoriali. Alegerea acestuia se face în funcţie de mai multe criterii, cel mai important fiind cel referitor la satisfacerea testelor de verificare a indicilor calculaţi: testul reversibilităţii (în timp şi a factorilor), circularităţii etc.

5.3. Sisteme de ponderare în construcţia indicilor factoriali

Valorile variabilelor statistice înregistrate pot fi însumate sau calculate sub formă de mărime medie pentru a obţine nivelul ansamblului. În primul caz se obţin valori agregate care trebuie, prin metoda indicilor, să fie comparate în timp sau spaţiu, obţinându-se indici agregaţi.

În practica statistică, o problemă dificilă este alegerea şi folosirea ponderilor atunci când valorile individuale ale agregatului nu sunt direct însumabile şi este necesară folosirea unui element etalon, denumit pondere. Alegerea sistemului de ponderare, aşa cum am mai menţionat, pentru construirea indicilor de grup factoriali, se face în mod diferenţiat, ţinând cont de:

- conţinutul indicatorilor comparaţi;
- natura datelor existente în evidenţa curentă;
- posibilitatea de a stabili o analogie între descompunerea pe factori de influenţă a modificării absolute şi relative (testul reversibilităţii factorilor).

De-a lungul timpului au fost concepute câteva sute de sisteme de ponderare a indicilor factoriali de grup[3]; dintre acestea teoria şi practica statistică au reţinut doar o parte, cele mai importante fiind prezentate în continuare.

5.3.1. Sistemul de ponderare Laspeyres

În cadrul acestui sistem - propus în 1864 de către Etienne Laspeyres (1834 - 1913), economist şi statistician german, pentru calculul unui indice de grup al preţurilor - variaţia fiecărui factor este ponderată cu nivelurile **de bază** ale celorlalţi factori, indiferent de natura şi conţinutul factorilor a căror influenţă se determină.

Indicii factoriali se determină cu ajutorul următoarelor relaţii:

- pentru factorul calitativ:

$$I_{1/0}^{y(x)} = \frac{\sum x_1 f_0}{\sum x_0 f_0}$$

- pentru factorul cantitativ:

$$I_{1/0}^{y(f)} = \frac{\sum x_0 f_1}{\sum x_0 f_0}$$

Indicii factoriali ai dinamicii valorii, propuşi de Laspeyres pot fi determinaţi după mai multe relaţii echivalente:

♦ **indicele preţurilor** poate fi calculat:

• sub formă de indice agregat:

$$I_{1/0}^{p} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0}$$

• ca medie aritmetică a indicilor individuali ai preţurilor, ponderaţi cu valoarea din perioada de bază:

$$I_{1/0}^{p} = \frac{\sum \frac{p_1}{p_0} p_0 q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{\sum i_{1/0}^{p} p_0 q_0}{\sum p_0 q_0} = \sum i_{1/0}^{p} \cdot S_0$$

unde $S_0 = \frac{p_0 q_0}{\sum p_0 q_0}$ - structura valorii din perioada de bază.

• ca medie armonică a indicilor elementari ai preţurilor, ponderaţi cu valoarea obţinută pe baza cantităţilor din perioada trecută şi a preţurilor din perioada curentă:

---

[3] Irving Fisher (1867 - 1947), economist]i statistician american a num[rat 352 de variante, propun`nd, la r`ndul s[u, "indicele geometric", cunoscut]i sub denumirea de "indicele 353" sau "indicele ideal" pentru c[satisface majoritatea testelor de verificare, concepute de altfel, de acela]i autor.

$$I^{p}_{1/0} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum \frac{p_0}{p_1} p_1 q_0} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum \frac{1}{i^{p}_{1/0}} p_1 q_0}$$

♦ **indicele cantităţilor** (volumului fizic) poate fi calculat:

• sub formă de indice agregat:

$$I^{q}_{1/0} = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0}$$

• ca medie aritmetică a indicilor individuali ai cantităţilor, ponderaţi cu valoarea din perioada de bază:

$$I^{q}_{1/0} = \frac{\sum \frac{q_1}{q_0} p_0 q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{\sum i^{q}_{1/0} p_0 q_0}{\sum p_0 q_0} = \sum i^{q}_{1/0} \cdot S_0$$

• ca medie armonică a indicilor elementari ai cantităţilor, ponderaţi cu valoarea obţinută pe baza cantităţilor curente şi a preţurilor din perioada de bază:

$$I^{q}_{1/0} = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum \frac{q_0}{q_1} p_0 q_1} = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum \frac{1}{i^{q}_{1/0}} p_0 q_1}$$

Dintre aceste relaţii, cel mai frecvent se utilizează a doua variantă, atunci când se cunosc indicii elementari ai produselor (ai preţurilor sau cantităţilor) şi valoarea producţiei sau desfacerilor din perioada de bază (sau structura acestora din aceeaşi perioadă).
Sistemul de ponderare Laspeyres se utilizează, de regulă, pentru analiza în dinamică a variabilei cantitative, dar în practica statistică se utilizează şi pentru cercetarea evoluţiei în timp sau spaţiu a variabilei calitative (calculul indicelui preţurilor de consum).

5.3.2. Sistemul de ponderare Paasche

În cadrul acestui sistem - propus în 1874 de Hermann Paasche (1851-1925), economist şi statistician german, tot pentru calculul unui indice de grup al preţurilor (mai exact, pentru cotaţii de bursă) - variaţia fiecărui factor este ponderată cu **nivelurile curente** ale celorlalţi factori, indiferent de natura şi conţinutul factorilor a căror influenţă se cuantifică; relaţiile care stau la baza indicilor factoriali de tip Paasche sunt:

$$I^{y(x)}_{1/0} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum x_0 f_1} \quad \text{- pentru factorul calitativ}$$

$$I^{y(x)}_{1/0} = \frac{\sum x_1 \sqrt{f_0 \cdot f_1}}{\sum x_0 \sqrt{f_0 \cdot f_1}} \quad \text{- pentru factorul cantitativ}$$

Formele echivalente de calcul al indicilor factoriali Paasche ai valorii sunt următoarele:

♦ **pentru indicele de preţuri Paasche**

• forma agregată:

$$I^{p}_{1/0} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}$$

• ca medie aritmetică a indicilor elementari ai preţurilor, ponderaţi cu valoarea obţinută pe baza cantităţilor curente şi preţurilor din perioada de bază:

$$I_{1/0}^{p}=\frac{\sum p_0q_1\frac{p_1}{p_0}}{\sum p_0q_1}=\frac{\sum i_{1/0}^{p}p_0q_1}{\sum p_0q_1}$$

• ca medie armonică a indicilor elementari ai preţurilor ponderaţi cu valoarea curentă:

$$I_{1/0}^{p}=\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_1q_1\frac{p_0}{p_1}}=\frac{\sum p_1q_1}{\sum\frac{1}{i_{1/0}^{p}}p_1q_1}$$

♦ **pentru indicele volumului fizic:**

• forma agregată:

$$I_{1/0}^{y(f)}=\frac{\sum\left(x_0+x_1\right)f_1}{\sum\left(x_0+x_1\right)f_0}$$

• ca medie aritmetică ponderată a indicilor elementari ai cantităţilor:

$$I_{1/0}^{q}=\frac{\sum\frac{q_1}{q_0}p_1q_0}{\sum p_1q_0}=\frac{\sum i_{1/0}^{q}p_1q_0}{\sum p_1q_0}$$

• ca medie armonică ponderată a indicilor individuali ai volumului fizic:

$$I_{1/0}^{q}=\frac{\sum p_1q_1}{\sum\frac{q_0}{q_1}p_1q_1}=\frac{\sum p_1q_1}{\sum\frac{1}{i_{1/0}^{q}}p_1q_1}$$

În practica statistică, acest sistem de ponderare este utilizat, în special, pentru analiza variaţiei variabilei calitative (indicele preţurilor produselor agroalimentare, indicele preţurilor produsului intern brut).

5.3.3. Sistemul de ponderare Fisher

În cadrul acestui sistem, indicii factoriali se calculează ca o medie geometrică a indicilor de tip Laspeyres şi Paasche:

$$I_{1/0}^{y(x)}=\sqrt{\frac{\sum x_1f_0}{\sum x_0f_0}\cdot\frac{\sum x_1f_1}{\sum x_0f_1}}$$

$$I_{1/0}^{y(f)}=\sqrt{\frac{\sum x_0f_1}{\sum x_0f_0}\cdot\frac{\sum x_1f_1}{\sum x_1f_0}}$$

Relaţiile de mai sus sunt cunoscute sub denumirea de „formule ideale”, deoarece satisfac majoritatea testelor de verificare a indicilor (mai puţin proprietatea de agregare a indicilor elementari). De aceea, de multe ori, formulele indicilor Fisher au constituit modele teoretice ale altor sisteme de ponderare.

Cu toate acestea, indicele Fisher este puţin utilizat în practica statistică, datorită volumului mare şi a diversităţii informaţiilor necesare calculului. El se foloseşte la construirea indicilor teritoriali în comparaţiile internaţionale ale indicatorilor sintetici de rezultate ai economiei naţionale.

Alte sisteme de ponderare utilizează ca ponderi constante în construirea indicilor factoriali:

- media aritmetică simplă a nivelurilor celuilalt factor din cele două perioade (sistemul

Y. F. Edgeworth):

$$I_{1/0}^{y(x)} = \frac{\sum x_1 (f_0 + f_1)}{\sum x_0 (f_0 + f_1)} \quad ; \quad I_{1/0}^{y(f)} = \frac{\sum (x_0 + x_1) f_1}{\sum (x_0 + x_1) f_0}$$

- media geometrică a nivelurilor celuilalt factor, corespunzătoare celor două perioade (sistemul Bowley - Edgeworth):

$$I_{1/0}^{y(x)} = \frac{\sum x_1 \sqrt{f_0 \cdot f_1}}{\sum x_0 \sqrt{f_0 \cdot f_1}}; \quad I_{1/0}^{y(f)} = \frac{\sum f_1 \sqrt{x_0 \cdot x_1}}{\sum f_0 \sqrt{x_0 \cdot x_1}}$$

Exemplul 5.3.

Din evidenţa unei firme de desfacere, se cunosc următoarele date privind evoluţia preţurilor şi cantităţilor vândute pe piaţă din trei produse diferite (tabelul 5.5.).

Tabelul 5.5.

Produsul	**U.M.**	**Cantitatea vândută - q - în perioada:**		**Preţul unitar de vânzare (mii lei) - p - în perioada:**	
		0	1	0	1
A	buc.	100	150	10	20
B	kg.	300	500	20	30
C	l	200	150	5	10

Să se determine indicii de grup factoriali de tip Laspeyres, Paasche şi Fisher şi să se verifice testul reversibilităţii factorilor.

Rezolvare

Indicii de grup factoriali, ai preţurilor şi cantităţilor, calculaţi conform relaţiilor anterioare, specifice celor trei sisteme principale de ponderare, sunt prezentaţi în tabelul 5.6.

Tabelul 5.6.

Sistemul de ponderare	**Indici de grup ai:**	
	preţurilor $\left(I_{1/0}^{v(p)}\right)$	**cantităţilor** $\left(I_{1/0}^{v(q)}\right)$
Laspeyres	1,625	1,531
Paasche	1,592	1,500
Fisher	1,608	1,515

Comparând nivelurile indicilor factoriali calculaţi pe baza celor trei sisteme de ponderare, se observă că aceştia respectă următoarea relaţie:

$$I_{Paasche} < I_{Fischer} < I_{Laspeyres}$$

$$1{,}592 < 1{,}608 < 1{,}625$$

$$1{,}500 < 1{,}515 < 1{,}531$$

Indicele general al valorii desfacerilor pentru cele trei produse este:

$$I_{1/0}^{v(p,q)} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} = 2{,}4375$$

Aplicând testul reversibilităţii factorilor, se observă că doar sistemul Fisher îl respectă:

Laspeyres: $I_L^p \cdot I_L^q = 1{,}625 \cdot 1{,}531 = 2{,}48 \quad \neq 2{,}43$

Paasche: $I_P^p \cdot I_P^q = 1{,}592 \cdot 1{,}500 = 2{,}38 \quad \neq 2{,}43$

Fisher: $I_F^p \cdot I_F^q = 1{,}608 \cdot 1{,}515 = 2{,}43 \quad = 2{,}43$

5.3.4. Proprietăţi ale indicilor Laspeyres, Paasche şi Fisher

• **identitatea** - este îndeplinită de toţi cei trei indici:

Laspeyres: $I_{t/t}^p = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_t q_t} = 1 \quad ; \quad I_{t/t}^q = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_t q_t} = 1$

Paasche: $I_{t/t}^p = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_t q_t} = 1 \quad ; \quad I_{t/t}^q = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_t q_t} = 1$

Fisher: $I_{t/t}^p = \sqrt{1 \cdot 1} = 1 \quad ; \quad I_{t/t}^q = \sqrt{1 \cdot 1} = 1$

• **circularitatea -** nu este îndeplinită de nici unul dintre cei trei indici.

Pentru indicii de preţ de tip Laspeyres:

$$I_{a/b}^p = \frac{\sum p_a q_b}{\sum p_b q_b} \quad ; \quad I_{b/c}^p = \frac{\sum p_b q_c}{\sum p_c q_c} \quad ; \quad I_{a/c}^p = \frac{\sum p_a q_c}{\sum p_c q_c}$$

$$\Rightarrow \qquad I_{a/b}^p \cdot I_{b/c}^p = \frac{\sum p_a q_b}{\sum p_b q_b} \cdot \frac{\sum p_b q_c}{\sum p_c q_c} \neq \frac{\sum p_a q_c}{\sum p_c q_c}$$

$$\Rightarrow \qquad I_{a/b}^p \cdot I_{b/c}^p \neq I_{a/c}^p$$

unde **a**,**b**,**c** sunt trei unităţi diferite de timp sau spaţiu.

Demonstraţia este asemănătoare pentru celelalte tipuri de indici.

• **reversibilitatea în timp sau spaţiu** - este îndeplinită doar pentru indicii de tip Fisher.

Pentru indicii Laspeyres de preţuri:

$$I_{a/b}^p = \frac{\sum p_a q_b}{\sum p_b q_b} \Rightarrow I_{a/b}^p \cdot I_{b/a}^p = \frac{\sum p_a q_b}{\sum p_b q_b} \cdot \frac{\sum p_b q_a}{\sum p_a q_a} \neq 1$$

$$I_{b/a}^p = \frac{\sum p_b q_a}{\sum p_a q_a}$$

Pentru indicii Paasche de preţuri:

$$I_{a/b}^p = \frac{\sum p_a q_a}{\sum p_b q_a} \Rightarrow I_{a/b}^p \cdot I_{b/a}^p = \frac{\sum p_a q_a}{\sum p_b q_a} \cdot \frac{\sum p_b q_b}{\sum p_a q_b} \neq 1$$

$$I_{b/a}^p = \frac{\sum p_b q_b}{\sum p_a q_b}$$

Pentru indicii Fisher de preţuri:

$$I_{a/b}^p \cdot I_{b/a}^p = \sqrt{\frac{\sum p_a q_b}{\sum p_b q_b} \cdot \frac{\sum p_a q_a}{\sum p_b q_a} \cdot \frac{\sum p_b q_a}{\sum p_a q_a} \cdot \frac{\sum p_b q_b}{\sum p_a q_b}} = 1$$

• **reversibilitatea factorilor** - este şi ea, după cum am văzut deja din exemplul 5.3, îndeplinită doar pentru indicii de tip Fisher.

Pentru indicii Laspyres:

$$I_{1/0}^v = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} \quad ; \quad I_{1/0}^{v(p)} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \quad ; \quad I_{1/0}^{v(q)} = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \cdot \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0} \neq \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$$

$$\Rightarrow \quad I_{1/0}^{v} \neq I_{1/0}^{v(p)} \cdot I_{1/0}^{v(q)}$$

Demonstraţia este asemănătoare pentru indicii de tip Paasche.

În sistemul de ponderare Fisher, testul se verifică:

$$I_{1/0}^{v(p)} \cdot I_{1/0}^{v(q)} = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \cdot \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}} \cdot \sqrt{\frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0} \cdot \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_1 q_0}} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} = I_{1/0}^{v}$$

5.3.5. Testul reversibilităţii factorilor – principiu metodologic în construcţia indicilor factoriali

Descompunerea pe factori de influenţă sau explicarea cauzală a modificării în dinamică a unei variabile complexe constituie o funcţie cognitivă importantă a metodei indicilor. Specific acestei metode este faptul că variaţia fenomenului complex se descompune **integral** pe factori explicativi; ea se poate realiza atât sub forma influenţelor în mărime relativă (indici factoriali şi ritmurile corespunzătoare) cât şi ca influenţe în mărime absolută (sporuri sau deficite).

După cum am prezentat anterior, testul reversibilităţii factorilor constă în aceea că produsul indicilor factoriali este egal cu indicele general; pentru modificările în mărime absolută, testul constă în aceea că suma algebrică a sporurilor (deficitelor) factoriale este egală cu sporul (deficitul) general:

$$I_{1/0}^{y(x,f)} = I_{1/0}^{y(x)} \cdot I_{1/0}^{y(f)}$$

$$\Delta_{1/0}^{y(x,f)} = \Delta_{1/0}^{y(x)} + \Delta_{1/0}^{y(f)}$$

Dintre sistemele de ponderare prezentate anterior - cu excepţia sistemului Fisher - nici unul nu respectă acest test; testul este respectat dacă ponderile constante utilizate pentru un factor de influenţă sunt reprezentate de nivelurile celuilalt factor într-o anumită perioadă (de bază sau curentă) iar ponderile constante ale celuilalt factor vizează cealaltă perioadă.

Un sistem de ponderare care să respecte acest test şi, în acelaşi timp, să nu prezinte mari dificultăţi practice (precum sistemul Fisher) poate fi realizat prin cuplarea încrucişată a indicilor factoriali de tip Laspeyres şi Paasche:

- indicele volumului fizic din sistemul Laspeyres şi cel al preţurilor din sistemul Paasche;
- sau indicele volumului fizic de tip Paasche şi cel al preţurilor de tip Laspeyres.

Un al doilea criteriu intervine în alegerea variantei optime: **semnificaţia** indicatorilor folosiţi ca bază de calcul pentru determinarea indicilor factoriali: aceştia trebuie să ofere informaţii corecte despre variabilitatea fenomenului analizat. În calculul celor patru indici factoriali, apar două valori ipotetice: $\sum x_0 f_1$ şi $\sum x_1 f_0$, dintre care doar prima corespunde cerinţelor metodologice potrivit cărora indicii compară întotdeauna prezentul cu trecutul factorului cantitativ (şi nu invers).

Ţinând cont de cele două aspecte - respectarea testului reversibilităţii factorilor şi semnificaţia indicatorilor folosiţi în calcul - sistemul de ponderare încrucişat - Paasche - Laspeyres - utilizat în practica statistică din ţara noastră permite construirea următorului sistem de indici şi indicatori derivaţi:

• indicele şi sporul general al unui fenomen complex:

$$I_{1/0}^{y}=\frac{\sum x_1 f_1}{\sum x_0 f_0} \quad ; \quad \Delta_{1/0}^{y}=\sum x_1 f_1-\sum x_0 f_0$$

• indicele şi sporul factorial care măsoară influenţa factorului calitativ:

$$I_{1/0}^{y(x)}=\frac{\sum x_1 f_1}{\sum x_0 f_1} \quad ; \quad \Delta_{1/0}^{y(x)}=\sum x_1 f_1-\sum x_0 f_1$$

• indicele şi sporul factorial care măsoară influenţa factorului cantitativ:

$$I_{1/0}^{y(f)}=\frac{\sum x_0 f_1}{\sum x_0 f_0} \quad ; \quad \Delta_{1/0}^{y(f)}=\sum x_0 f_1-\sum x_0 f_0$$

Din analiza acestui sistem se poate enunţa următoarea regulă de construcţie a indicilor factoriali:

- pentru evidenţierea influenţei factorului **calitativ**, se folosesc ca ponderi constante nivelurile factorului cantitativ din perioada **curentă**;
- pentru evidenţierea influenţei factorului **cantitativ**, se folosesc ca ponderi constante nivelurile factorului calitativ din perioada de **bază**.

Principiul, enunţat pentru cazul unui indicator bifactorial, este valabil şi pentru cazul indicatorilor multifactoriali.

Modul de calcul şi interpretarea sistemelor de indici factoriali şi indicatori derivaţi (bi sau trifactoriali) vor fi exemplificate în continuare.

Exemplul 5.4.

Se cunosc următoarele date referitoare la o firmă industrială cu 3 subunităţi, pentru două perioade de timp (tabelul 5.7).

Tabelul 5.7.

Subunitatea	**Productivitatea muncii (buc)**		**Număr de muncitori**	
	W_0	W_1	N_0	N_1
1	30	25	150	200
2	35	40	250	200
3	40	35	100	200
Total	-	-	500	600

Să se analizeze evoluţia producţiei la nivelul firmei în perioada curentă (1) faţă de perioada de bază (0), cu evidenţierea şi cuantificarea influenţei factorilor.

Rezolvare

Analiza se poate realiza în mai multe variante:

a) pe baza indicatorilor individuali - urmărirea evoluţiei producţiei la nivelul firmei se face în funcţie de modificarea celor două variabile (W şi N) la nivelul unităţilor elementare:

$$\sum Q=\sum WN$$

• modificarea totală, relativă şi absolută, a producţiei pe seama variaţiei celor doi factori:

$$I_{1/0}^{Q}=\frac{\sum Q_1}{\sum Q_0}=\frac{\sum W_1 N_1}{\sum W_0 N_0}=\frac{20000}{17250}=1{,}159$$

$$R_{1/0}^{Q} = I_{1/0}^{Q} \cdot 100 - 100 = 15{,}9\%$$

$$\Delta_{1/0}^{Q} = \sum Q_1 - \sum Q_0 = \sum W_1 N_1 - \sum W_0 N_0 = 2750 \text{ bucăţi}$$

• modificarea relativă şi absolută a producţiei pe seama modificării factorului calitativ (W) la nivelul unităţilor componente:

$$I_{1/0}^{Q(W)} = \frac{\sum W_1 N_1}{\sum W_0 N_1} = \frac{20000}{21000} = 0{,}952$$

$$R_{1/0}^{Q(W)} = I_{1/0}^{Q(W)} \cdot 100 - 100 = -4{,}8\%$$

$$\Delta_{1/0}^{Q(W)} = \sum W_1 N_1 - \sum W_0 N_1 = -1000 \text{ bucăţi.}$$

• modificarea relativă şi absolută a producţiei pe seama factorului cantitativ (N):

$$I_{1/0}^{Q(N)} = \frac{\sum W_0 N_1}{\sum W_0 N_0} = \frac{21000}{17250} = 1{,}217$$

$$R_{1/0}^{Q(N)} = I_{1/0}^{Q(N)} \cdot 100 - 100 = 21{,}7\%$$

$$\Delta_{1/0}^{Q(N)} = \sum W_0 N_1 - \sum W_0 N_0 = 3750 \text{ bucăţi.}$$

Se poate aprecia că influenţa factorului calitativ a fost negativă asupra dinamicii producţiei firmei.

Sistemul verifică testul reversibilităţii factorilor:

$$I_{1/0}^{Q} = I_{1/0}^{Q(W)} \cdot I_{1/0}^{Q(N)} \quad \Rightarrow \quad 1{,}159 = 0{,}952 \cdot 1{,}217$$

$$\Delta_{1/0}^{Q} = \Delta_{1/0}^{Q(W)} \cdot \Delta_{1/0}^{Q(N)} \quad \Rightarrow \quad 2750 = -1000 + 3750$$

b) pe baza indicatorilor globali - analiza dinamicii producţiei se face în funcţie de modificarea productivităţii medii a muncii ($\overline{W}$) şi a numărului total de muncitori ($\sum N$):

$$\sum Q = \overline{W} \sum N$$

• variaţia totală a producţiei, pe seama celor doi factori:

$$I_{1/0}^{Q} = \frac{\overline{W}_1 \sum N_1}{\overline{W}_0 \sum N_0} = 1{,}159 \quad ; \quad \Delta_{1/0}^{Q} = 2750 \text{ bucăţi}$$

$$\overline{W}_1 = \frac{\sum Q_1}{\sum N_1} = \frac{20000}{600} = 33{,}33 \text{ buc.}$$

$$\overline{W}_0 = \frac{\sum Q_0}{\sum N_0} = \frac{17250}{500} = 34{,}5 \text{ buc.}$$

• variaţia producţiei pe seama factorului calitativ ($\overline{W}$):

$$I_{1/0}^{Q(\overline{W})} = \frac{\overline{W}_1 \sum N_1}{\overline{W}_0 \sum N_1} = I_{1/0}^{\overline{W}} = 0{,}9652$$

$$R_{1/0}^{Q(\overline{W})} = -3{,}48\%$$

$$\Delta_{1/0}^{Q(\overline{W})} = \left(\overline{W}_1 - \overline{W}_0\right) \sum N_1 = -700 \text{ bucăţi}$$

• variaţia producţiei pe seama factorului cantitativ ($\sum N$):

$$I_{1/0}^{Q(\sum N)} = \frac{\overline{W}_0 \sum N_1}{\overline{W}_0 \sum N_0} = I_{1/0}^{\sum N} = 1{,}2$$

$$R_{1/0}^{Q(\sum N)} = 20\%$$

$\Delta_{1/0}^{Q(\sum N)} = \overline{W}_0\left(\sum N_1 - \sum N_0\right) = 3450$ bucăţi

Se confirmă şi în acest caz influenţa negativă a factorului calitativ (scăderea productivităţii muncii) asupra dinamicii producţiei.

Şi acest sistem verifică testul reversibilităţii factorilor:

$I_{/0}^{Q} = I_{1/0}^{Q(\overline{W})} \cdot I_{1/0}^{Q(\sum N)} \quad \Rightarrow \quad 1{,}159 = 0{,}9652 \cdot 1{,}2$

$\Delta_{/0}^{Q} = \Delta_{1/0}^{Q(\overline{W})} + \Delta_{1/0}^{Q(\sum N)} \quad \Rightarrow \quad 2750 = -700 + 3450$

c) pornind de la sistemul anterior, dacă luăm în considerare şi factorii de influenţă ai productivităţii muncii, putem detalia analiza pe baza unui sistem trifactorial.

Dacă la nivelul unei secţii productivitatea se calculează astfel:

$$W = \frac{Q}{N}$$

$\Rightarrow$ la nivelul societăţii: $\overline{W} = \dfrac{\sum Q}{\sum N} = \dfrac{\sum WN}{\sum N} = \sum WS$

unde: $S = \dfrac{N}{\sum N}$ - factor structural cu dublă semnificaţie (calitativ şi cantitativ).

Analiza dinamicii producţiei se poate face astfel în funcţie de cei trei factori (W, S, N):

$$\sum Q = \overline{W}\sum N = \sum WS \cdot \sum N$$

Structura muncitorilor este prezentată în tabelul 5.8.

Tabelul 5.8.

Subunitatea	Structura numărului de muncitori	
	S_0	S_1
1	0,3	0,33
2	0,5	0,33
3	0,2	0,34
Total	1	1

• variaţia producţiei pe seama factorului calitativ (W):

$$I_{1/0}^{Q(W)} = \frac{\sum W_1 S_1 \sum N_1}{\sum W_0 S_1 \sum N_1} = I_{1/0}^{\overline{W}(W)} = 0{,}952$$

$$R_{1/0}^{Q(W)} = -4{,}8\%$$

$$\Delta_{1/0}^{Q(W)} = \left(\sum W_1 S_1 - \sum W_0 S_1\right)\sum N_1 = -1000 \text{ bucăţi}$$

• variaţia producţiei pe seama factorului structural (S):

$$I_{1/0}^{Q(S)} = \frac{\sum W_0 S_1 \sum N_1}{\sum W_0 S_0 \sum N_1} = I_{1/0}^{\overline{W}(S)} = 1{,}0145$$

$$R_{1/0}^{Q(S)} = 1{,}45\%$$

$$\Delta_{1/0}^{Q(S)} = \left(\sum W_0 S_1 - \sum W_0 S_0\right)\sum N_1 = 300 \text{ bucăţi}$$

• variaţia producţiei pe seama factorului cantitativ ($\sum N$):

$$I_{1/0}^{Q(\sum N)} = \frac{\sum W_0 S_0 \sum N_1}{\sum W_0 S_0 \sum N_0} = I_{1/0}^{\sum N} = 1{,}2$$

$$R_{1/0}^{Q(\sum N)} = 20\%$$

$$\Delta_{1/0}^{Q(\sum N)} = \sum W_0 S_0 \left(\sum N_1 - \sum N_0\right) = 3450 \text{ bucăţi}$$

Sistemul verifică testul reversibilităţii factorilor:

$$I_{1/0}^{Q} = I_{1/0}^{Q(W)} \cdot I_{1/0}^{Q(S)} \cdot I_{1/0}^{Q(\sum N)}$$

$\Rightarrow$ 1,159 = 0,952 · 1,0145 · 1,2

$$\Delta_{1/0}^{Q} = \Delta_{1/0}^{Q(W)} + \Delta_{1/0}^{Q(S)} + \Delta_{1/0}^{Q(\sum N)}$$

$\Rightarrow$ 2750 = -1000 + 300 + 3450

Modificarea structurii muncitorilor din cadrul firmei a influenţat pozitiv dinamica producţiei acesteia.