

# 3

## ANALIZA SERIILOR CRONOLOGICE

Orice fenomen sau proces al activității umane poate fi studiat atât în timp, cât și în spațiu. Analiza în timp presupune, în principal, o cercetare cu ajutorul unor indicatori statistici specifici de-a lungul diferitelor perioade. De exemplu, putem urmări evoluția vânzărilor zilnice dintr-un magazin, evoluția lunară a producției de cărbune, evoluția productivității muncii, evoluția ratei inflației etc. În urma măsurărilor periodice, la momente sau intervale de timp (egale sau inegale), asupra unei colectivități în ansamblul său sau a unei părți din colectivitate rezultă seriile cronologice.

La construirea și analiza seriilor cronologice trebuie avute în vedere proprietățile acestora, și anume:

- *variabilitatea termenilor* – rezultă din faptul că fiecare termen este obținut prin centralizarea unor date individuale. Acest lucru se întâmplă în condițiile existenței unor diferențieri între termenii seriei, fie ca urmare a acțiunii factorilor întâmplători, fie ca urmare a faptului că în viața economico-socială legile se manifestă ca tendință generală, imprimând fenomenelor și proceselor diferite forme de variație;
- *omogenitatea termenilor* – o serie nu cuprinde decât fenomene și procese de același gen, care sunt efecte ale aceluiași tip de cauze. Pentru asigurarea omogenității termenilor trebuie utilizată aceeași metodologie de evaluare și calcul a indicatorilor, precum și aceleași criterii de clasificare privind mărimea intervalului de timp și a unității statistice etc.;
- *periodicitatea termenilor* – constă în asigurarea continuității datelor din punct de vedere al timpului, chiar dacă variabila timp poate cunoaște periodicități diferite;
- *interdependența termenilor* – rezultă ca urmare a respectării principiului unității de timp, spațiu și a structurii organizatorice. Având în vedere relațiile de cauzalitate, fiecare indicator depinde într-o anumită măsură de valoarea indicatorului precedent.

### 3.1. Indicatorii dinamicii

Pentru a caracteriza dinamica fenomenelor economico-sociale, prelucrarea unor serii dinamice conduce la obținerea unei varietăți de indicatori. După modul de calcul și exprimare aceștia pot fi grupați în trei categorii:

- indicatori absoluți;
- indicatori relativi;
- indicatori medii.

- ◆ **Indicatorii absoluți** – se exprimă în aceeași unitate de măsură cu fenomenul supus cercetării. În cadrul lor întâlnim două categorii:

- **nivelul absolut** – este dat de șirul nivelurilor fenomenului a cărui evoluție se urmărește. Dacă seria este simplă, atunci nivelurile absolute pentru variabila  $Y$  sunt  $y_1, y_2, \dots, y_n$ ;

- **modificarea absolută** – se determină ca diferență între nivelurile absolute ale uneia dintre variabilele seriei, luate succesiv, și un nivel oarecare considerat bază de comparație (această bază trebuie să fie un moment sau interval de timp considerat reprezentativ pentru seria supusă cercetării). Modificarea absolută exprimă, în valori absolute, cu cât a crescut sau a scăzut nivelul fenomenului cercetat în perioada de timp considerată. Baza de comparație poate să fie fixă, atunci când rămâne aceeași pentru toți termenii seriei, sau variabilă, când se modifică odată cu modificarea indicatorului de comparat. În funcție de baza de comparație aleasă, modificarea absolută poate fi:

- **cu baza fixă** – arată cu cât a crescut sau a scăzut nivelul indicatorului  $y$  față de perioada de bază. Relația de calcul este următoarea:

$$\Delta_{t/1} = y_t - y_1;$$

- **cu baza în lanț** – arată cu cât a crescut sau a scăzut nivelul indicatorului  $y$  de la o perioadă la alta. Relația de calcul este următoarea:

$$\Delta_{t/t-1} = y_t - y_{t-1},$$

unde:  $y_1$  - nivelul indicatorului în perioada de referință;

$y_t$  - nivelul indicatorului în perioada  $t$ ;

$y_{t-1}$  - nivelul indicatorului în perioada  $t-1$ .

Comparând relațiile de calcul ale celor două variante, rezultă că:

$$\Delta_{t/1} = \sum \Delta_{t/t-1}.$$

- ◆ **Indicatorii relativi** – se calculează ca raport între doi indicatori absoluți ai aceluiași fenomen și se exprimă, de regulă, sub formă de coeficienți sau în procente. În cadrul lor întâlnim indicele dinamicii, ritmul dinamicii și valoarea absolută a unui procent de creștere (reducere).

- **Indicele dinamicii** – se calculează ca raport între nivelul indicatorului de comparat și nivelul indicatorului folosit ca bază de comparație. Acesta exprimă de câte ori sau în ce proporție s-a modificat fenomenul  $y$  în perioada considerată. În funcție de baza de comparație aleasă, indicele dinamicii poate fi de două feluri:

- **cu baza fixă** – când arată proporția existentă între nivelul indicatorului de comparat și nivelul indicatorului din perioada de bază. Relația de calcul este:

$$I_{t/1} = \frac{y_t}{y_1};$$

- **cu baza în lanț** – când arată proporția existentă între nivelul indicatorului de comparat și nivelul indicatorului din perioada precedentă. Relația de calcul este:

$$I_{t/t-1} = \frac{y_t}{y_{t-1}}.$$

Comparând relațiile celor două variante de indici, rezultă că:

$$I_{t/1} = \prod I_{t/t-1}.$$

Indicii dinamicii se pot exprima și în procente.

- **Ritmul dinamicii** – exprimă, în mărimi relative, cu cât a crescut sau a scăzut nivelul fenomenului cercetat în perioada de timp considerată. Se poate calcula în trei moduri: pe baza nivelurilor absolute, pe baza modificărilor absolute sau pe baza indicilor. În funcție de baza de comparație aleasă, ritmul dinamicii poate fi:
  - **cu baza fixă** – reflectă creșterea sau scăderea relativă a fenomenului cercetat în fiecare perioadă față de perioada de comparație. Se calculează folosind relațiile:

$$R_{t/t_1} = \frac{y_t - y_{t_1}}{y_{t_1}} \cdot 100 = \frac{\Delta_{t/t_1}}{y_{t_1}} \cdot 100 = (I_{t/t_1} - 1) \cdot 100;$$

- **cu baza în lanț** – reflectă creșterea sau scăderea relativă a fenomenului cercetat dintr-o perioadă față de perioada anterioară. Se calculează cu relațiile:

$$R_{t/t-1} = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}} \cdot 100 = \frac{\Delta_{t/t-1}}{y_{t-1}} \cdot 100 = (I_{t/t-1} - 1) \cdot 100.$$

Ritmul dinamicii se exprimă numai în procente.

- **Valoarea absolută a unui procent de creștere (reducere)** – exprimă cât din modificarea absolută a unui fenomen revine la un procent din ritmul dinamicii. Ca și ceilalți indicatori, acesta se poate calcula cu bază fixă sau cu baza în lanț, raportând modificarea absolută la ritmul dinamicii:
  - **cu baza fixă:**

$$A_{t/t_1} = \frac{\Delta_{t/t_1}}{R_{t/t_1}} = \frac{y_t - y_{t_1}}{\frac{y_t - y_{t_1}}{y_{t_1}} \cdot 100} = \frac{y_{t_1}}{100};$$

- **cu baza în lanț:**

$$A_{t/t-1} = \frac{\Delta_{t/t-1}}{R_{t/t-1}} = \frac{y_t - y_{t-1}}{\frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}} \cdot 100} = \frac{y_{t-1}}{100}.$$

- ◆ **Indicatorii medii** – sunt indicatori calculați pe baza tuturor termenilor seriei cronologice. Astfel, în timp ce indicatorii absoluți și relativi ne arată nivelurile individuale înregistrate de-a lungul perioadei, indicatorii medii reunesc aceste valori individuale într-una singură. În această categorie de indicatori regăsim: nivelul mediu, modificarea medie, indicele mediu, ritmul mediu și valoarea medie absolută a unui procent de creștere.

- **nivelul mediu** – se calculează în mod diferit după cum seria dinamică este de *intervale* sau de *momente*:
  - **dacă seria cronologică este de intervale**, nivelul mediu se calculează folosind:
    - media aritmetică – dacă valorile  $\Delta_{t/t-1}$  sunt aproximativ constante;
    - media pătratică – dacă valorile  $\Delta_{t/t-1}$  sunt mai mici la începutul seriei și din ce în ce mai mari spre sfârșitul acesteia;
    - media geometrică – dacă valorile  $\Delta_{t/t-1}$  sunt mai mari la începutul seriei și din ce în ce mai mici spre sfârșitul acesteia.
  - **dacă seria cronologică este de momente**, nivelul mediu se determină ca o medie cronologică. Media cronologică este, în principiu, o medie aritmetică, și se determină în două etape: a) *calculul mediilor mobile* – acum are loc

transformarea seriei de momente în serie de intervale, mediile mobile nefiind altceva decât medii aritmetice simple calculate din câte doi, trei sau mai mulți termeni ai seriei, în cadrul cărora unul sau mai mulți termeni se repetă; b) *calculul mediei cronologice* – se obține ca medie aritmetică a mediilor mobile. Intervalele dintre momentele seriei pot fi egale sau inegale, rezultând medii cronologice simple sau ponderate.

**Media cronologică simplă** este utilizată în cazul în care intervalele dintre momente sunt egale ( $t_1 = t_2 = \dots = t_k$ , unde  $k$  – numărul mediilor mobile sau numărul intervalelor dintre momente,  $k = n - 1$ ). Determinarea mediei cronologice simple se face după etapele precizate anterior, astfel:

1) calculul mediilor mobile:

$$\bar{x}_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2};$$

2) calculul mediei cronologice simple:

$$\bar{x}_c = \frac{\sum_{i=1}^k \bar{x}_i}{k}.$$

În practică se folosește mai frecvent o relație derivată din relația de bază, în cadrul căreia se preiau direct variantele  $x_i$ , fără a mai parcurge cele două etape enunțate anterior. La această relație se ajunge prin înlocuirea mediilor mobile cu formulele lor de calcul:

$$\begin{aligned} \bar{x}_c &= \frac{\sum_{i=1}^k \bar{x}_i}{k} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_k}{k} = \frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_2 + x_3}{2} + \dots + \frac{x_{n-1} + x_n}{2}}{k} \Rightarrow \\ \bar{x}_c &= \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + \dots + \frac{x_n}{2}}{k}. \end{aligned}$$

**Media cronologică ponderată** se folosește atunci când intervalele dintre momente sunt inegale ( $t_1 \neq t_2 \neq \dots \neq t_k$ ). Ca și în cazul mediei cronologice simple, media cronologică ponderată se determină urmând cele două etape:

1) calculul mediilor mobile:

$$\bar{x}_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2};$$

2) calculul mediei cronologice ponderate:

$$\bar{x}_c = \frac{\sum_{i=1}^k \bar{x}_i t_i}{\sum_{i=1}^k t_i}.$$

În practică, se folosește o variantă a mediei cronologice ponderate, obținută din relația de bază prin înlocuirea mediilor mobile cu relațiile lor de calcul, astfel:

$$\bar{x}_c = \frac{\bar{x}_1 t_1 + \bar{x}_2 t_2 + \dots + \bar{x}_k t_k}{t_1 + t_2 + \dots + t_k} = \frac{\frac{x_1 + x_2}{2} t_1 + \frac{x_2 + x_3}{2} t_2 + \dots + \frac{x_{n-1} + x_n}{2} t_k}{t_1 + t_2 + \dots + t_k} \Rightarrow$$

$$\bar{x}_c = \frac{x_1 \frac{t_1}{2} + x_2 \frac{t_1+t_2}{2} + \dots + x_n \frac{t_k}{2}}{t_1 + t_2 + \dots + t_k}$$

**Exemplul 3.1.**

Într-o societate comercială din orașul Craiova, în cursul anului 2006, au fost înregistrate, pentru o anumită marfă, stocurile din tabelul 3.1.

Tabelul 3.1.

Data	Stocul (kg)	$t_k$
01.01.2006	140	
31.01.2006	160	1
28.02.2006	240	1
31.03.2006	200	1
30.06.2006	120	3
31.10.2006	160	4
31.12.2006	220	2

*Date convenționale*

Să se determine stocul mediu în trimestrul I și stocul mediu pe întregul an 2006.

*Rezolvare*

Observăm din tabel că intervalele primului trimestru sunt egale (deci vom folosi media cronologică simplă), în timp ce pentru întregul an 2006 intervalele sunt inegale (vom folosi media cronologică ponderată).

Stocul mediu pentru primul trimestru va fi:

$$\bar{x}_{c\text{trim I}} = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + \frac{x_4}{2}}{k} = \frac{\frac{140}{2} + 160 + 240 + \frac{200}{2}}{3} = \frac{570}{3} = 190 \text{ kg}$$

Pentru întregul an 2006 stocul mediu va fi:

$$\bar{x}_{c2006} = \frac{x_1 \frac{t_1}{2} + x_2 \frac{t_1+t_2}{2} + x_3 \frac{t_2+t_3}{2} + x_4 \frac{t_3+t_4}{2} + x_5 \frac{t_4+t_5}{2} + x_6 \frac{t_5+t_6}{2} + x_7 \frac{t_6}{2}}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6}$$

$$\bar{x}_{c2006} = \frac{140 \frac{1}{2} + 160 \frac{1+1}{2} + 240 \frac{1+1}{2} + 200 \frac{1+3}{2} + 120 \frac{3+4}{2} + 160 \frac{4+2}{2} + 220 \frac{2}{2}}{1+1+1+3+4+2}$$

$$\bar{x}_{c2006} = \frac{70 + 160 + 240 + 400 + 420 + 480 + 220}{12} = \frac{1990}{12} = 165,83 \text{ kg}$$

- **modificarea medie** – exprimă, sub formă de medie, modificarea înregistrată în fiecare perioadă a seriei cronologice. Se calculează ca o medie aritmetică simplă a modificărilor cu baza în lanț, pe baza relației următoare:

$$\bar{\Delta} = \frac{\sum A_{t-1}}{n-1} = \frac{A_{t-1}}{n-1}$$

Modificarea medie prezintă importanță pentru stabilirea tendinței (trendului) unui fenomen, astfel:

- dacă  $\bar{\Delta} > 0 \Rightarrow$  tendință evolutivă (crescătoare);

- dacă  $\bar{\Delta} < 0 \Rightarrow$  tendință involutivă (descrescătoare).

De asemenea, acest indicator permite ajustarea seriei dinamice și elaborarea de prognoze privind evoluția viitoare a fenomenului analizat.

- **indicele mediu** – reunește într-un singur indicator nivelurile individuale ale indicilor cu baza în lanț calculați pentru o serie dinamică. Se determină ca o medie geometrică simplă a indicilor cu baza în lanț, pe baza relației:

$$\bar{I} = \sqrt[n-1]{\prod I_{t/t-1}} = \sqrt[n-1]{I_{t/1}}.$$

Indicele mediu se folosește la ajustarea seriei dinamice, precum și la determinarea ritmului mediu.

- **ritmul mediu** – arată cu cât a crescut sau a scăzut în medie, pe fiecare perioadă, fenomenul analizat și se exprimă în procente. Se calculează pe baza relației:

$$\bar{R} = (\bar{I} - 1) \cdot 100.$$

- **valoarea medie absolută a unui procent de creștere** – exprimă cât din modificarea medie a unui fenomen revine la un procent din ritmul mediu și se determină pe baza relației:

$$\bar{A} = \frac{\bar{\Delta}}{\bar{R}}.$$

**Exemplul 3.2.**

Volumul vânzărilor unui magazin, în primele 8 luni ale anului 2006, este redat în tabelul 3.2. Indicatorii dinamicii sunt calculați, de asemenea, în același tabel.

Tabelul 3.2.

Luna	Vânzări (buc.)	Modificarea absolută		Indicele dinamicii		Ritmul dinamicii (%)		Valoarea absolută a 1%	
	$y_t$	$\Delta_{t/1}$	$\Delta_{t/t-1}$	$I_{t/1}$	$I_{t/t-1}$	$R_{t/1}$	$R_{t/t-1}$	$A_{t/1}$	$A_{t/t-1}$
1	100	-	-	1,00	-	-	-	-	-
2	90	-10	-10	0,90	0,90	-10	-10	1	1,0
3	110	10	20	1,10	1,22	10	22	1	0,9
4	120	20	10	1,20	1,09	20	9	1	1,1
5	140	40	20	1,40	1,16	40	16	1	1,2
6	150	50	10	1,50	1,07	50	7	1	1,4
7	110	10	-40	1,10	0,73	10	-27	1	1,5
8	130	30	20	1,30	1,18	30	18	1	1,1

Date convenționale

*Rezolvare*

Indicatorii medii ai dinamicii sunt:

- *nivelul mediu:*  $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{950}{8} = 118,75$  bucăți;
- *modificarea medie:*  $\bar{\Delta} = \frac{A_{t/1}}{n-1} = \frac{30}{7} = 4,28$  bucăți;
- *indicele mediu:*  $\bar{I} = \sqrt[n-1]{I_{t/1}} = \sqrt[7]{1,30} = 1,0382$ ;

- ritmul mediu:  $\bar{R} = (\bar{I} - 1) \cdot 100 = (1,038 - 1) \cdot 100 = 3,8\%$ ;
- abaterea medie absolută a unui procent de creștere:  $\bar{A} = \frac{\bar{\Delta}}{R} = \frac{4,28}{3,8} = 1,12$  bucăți.

Volumul mediu lunar al vânzărilor acestui magazin a fost de 118,75 bucăți. Observăm că vânzările au înregistrat o creștere, în primele 8 luni ale anului 2006, în medie (pe lună) cu 4,28 bucăți, ritmul mediu a înregistrat o creștere de 3,8% lunar, iar la un procent de creștere a revenit un volum al vânzărilor de 1,12 bucăți.

În funcție de semnificația și importanța economico-socială, indicatorii se împart în două mari categorii:

- indicatori al căror nivel firmele și, în general, societatea îl doresc cât mai ridicat (de exemplu: cantitatea de produse fabricate, productivitatea muncii etc.);
- indicatori al căror nivel se dorește cât mai mic (de exemplu: costul de fabricație pe unitatea de produs, consumurile de materiale etc.).

Plecând de la această constatare putem realiza o schemă generală de interpretare a indicatorilor dinamicii, redată în tabelul 3.3.

Tabelul 3.3.

Nivel dorit al indicatorilor	Situația	favorabilă	nefavorabilă
	▪ cât mai ridicat		$I > I$ $R > 0$ $\Delta > 0$
▪ cât mai scăzut		$I < I$ $R < 0$ $\Delta < 0$	$I > I$ $R > 0$ $\Delta > 0$

### 3.2. Ajustarea seriilor cronologice

Ajustarea seriilor cronologice constă în aplicarea unor metode statistico-matematice adecvate asupra unor serii de timp în dorința de a extrage ceea ce este esențial și tipic în evoluția fenomenului sau procesului analizat și care prezintă caracter de lege. Ajustarea unei serii cronologice este necesară în următoarele cazuri:

- pentru a obține o imagine clară asupra tendinței fenomenelor și proceselor economico-sociale pe o perioadă de timp, atunci când această tendință nu poate fi sesizată cu ochiul liber;
- în cazul în care pentru unii ani din cadrul perioadei lipsesc indicatorii de nivel, singura modalitate de a-i reconstitui este reprezentată de interpolarea seriei;
- elaborarea prognozelor, a estimării nivelului unui indicator pentru perioadele viitoare.

În teoria și practica statistică sunt utilizate următoarele metode de ajustare:

- ajustarea grafică;
- ajustarea mecanică;
- ajustarea analitică.

- **Ajustarea grafică** – acest procedeu presupune trasarea liberă și aproximativă a unei drepte sau curbe asupra unei serii cronologice empirice. O asemenea ajustare are un caracter orientativ și oferă informații asupra tendinței generale a evoluției fenomenului sau procesului supus cercetării. Ajustarea grafică este, însă, subiectivă putând conduce la determinări diferite. Acesta este și motivul pentru care este folosită mai rar.
- **Ajustarea mecanică** – acest procedeu constă în aplicarea succesivă, în mod mecanic, a unor formule de calcul stabilite dinainte, pentru toți termenii seriei. În cadrul ajustării mecanice întâlnim următoarele metode: metoda mediilor eșalonate, metoda mediilor mobile, metoda sporului mediu și metoda indicelui mediu.

- **Metoda mediilor eșalonate** – constă în calculul mediilor eșalonate, ca medii aritmetice simple din câte doi, trei sau mai mulți termeni (în cadrul cărora nu se repetă nici un termen) și aprecierea tendinței evolutive cu ajutorul seriei formate din aceste medii. Considerând  $y_1, y_2, \dots, y_n$  nivelurile absolute dintr-o serie dată, mediile eșalonate, calculate din câte doi termeni, sunt:

$$\bar{y}_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \bar{y}_2 = \frac{y_3 + y_4}{2}, \dots, \bar{y}_{n/2} = \frac{y_{n-1} + y_n}{2}.$$

Seria mediilor eșalonate va fi:  $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_{n/2}$ .

Pentru seriile cu un număr mare de termeni se poate continua calculul mediilor eșalonate, folosindu-se ca bază de calcul mediile deja calculate. Se obțin astfel medii de rang superior, putându-se aprecia mai exact tendința evolutivă. Deși prin determinarea mediilor de rang superior sunt atenuate într-o anumită măsură fluctuațiile evolutive generate de acțiunea factorilor întâmplători, nu este posibilă înlăturarea lor în totalitate.

- **Metoda mediilor mobile** – constă în determinarea tendinței evolutive după procedeu prezentat la metoda anterioară, cu deosebirea că, în calculul mediilor, unul, doi sau mai mulți termeni se repetă. Mediile mobile, calculate din câte doi termeni, sunt:

$$\bar{y}_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \bar{y}_2 = \frac{y_2 + y_3}{2}, \dots, \bar{y}_{n-1} = \frac{y_{n-1} + y_n}{2}.$$

Seria mediilor mobile va fi:  $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_{n-1}$ .

Și în acest caz pot fi determinate medii de rang superior. Nici prin această metodă nu sunt eliminate în totalitate fluctuațiile întâmplătoare.

### **Exemplul 3.3.**

Considerând datele de la exemplul 3.2., valorile ajustate prin metoda mediilor eșalonate și cea a mediilor mobile sunt redată în tabelul 3.4.



Tabelul 3.4.

Luna	Vânzări (buc.)	Mediile eşalonate	Mediile mobile
1	100	95	95
2	90	115	100
3	110	145	115
4	120	120	130
5	140	-	145
6	150	-	130
7	110	-	120
8	130	-	-

- **Metoda sporului mediu** – este o metodă mecanică de ajustare care are la bază relația dintre primul termen al seriei, sporul mediu și un termen oarecare al seriei. Se folosește, de regulă, atunci când se obțin sporuri cu baza în lanț cu valori apropiate. Aceasta corespunde unei creșteri a nivelurilor caracteristicii studiate sub forma unei progresii aritmetice cu rația egală cu modificarea medie absolută. Relația care stă la baza ajustării prin procedeul modificării medii absolute este:

$$Y_i = y_1 + k \cdot \bar{\Delta},$$

unde  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ;

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1;$$

$y_1$  – reprezintă termenul luat ca bază de ajustare.

Observăm că:

$$Y_1 = y_1 + 0 \cdot \bar{\Delta} = y_1;$$

$$Y_2 = y_1 + 1 \cdot \bar{\Delta};$$

$$Y_3 = y_1 + 2 \cdot \bar{\Delta};$$

.....

$$Y_n = y_1 + (n-1) \cdot \bar{\Delta} = y_n.$$

În cadrul acestei metode, primul și ultimul termen ai seriei teoretice, respectiv  $Y_1$  și  $Y_n$  sunt identici cu primul și ultimul termen ai seriei empirice, adică  $y_1$  și  $y_n$ ; această proprietate este folosită ca mijloc de control ( $Y_1 = y_1, Y_n = y_n$ ).

Cu ajutorul acestei metode sunt eliminate toate fluctuațiile evolutive întâmplătoare, valorile teoretice  $Y_i$  înscriindu-se pe o linie dreaptă.

#### **Exemplul 3.4.**

Considerând datele de la exemplul 3.2., valorile ajustate prin metoda sporului mediu ( $\bar{\Delta} = 4,28$ ) sunt (tabelul 3.5.):

Tabelul 3.5.

Luna	Vânzări (buc.) - $y_t$	$Y_t$
1	100	100,00
2	90	104,28
3	110	108,56
4	120	112,84
5	140	117,12
6	150	121,40
7	110	125,68
8	130	130,00

- **Metoda indicelui mediu** – este tot o metodă mecanică, ușor de aplicat, care se bazează pe relația existentă între primul termen al seriei, indicele mediu și un termen oarecare al seriei. Se folosește atunci când termenii seriei au tendința unei progresii geometrice, în care rația poate fi considerată egală cu indicele mediu al dinamicii. Relația care stă la baza ajustării prin procedeul modificării medii absolute este:

$$Y_t = y_1 \cdot \bar{I}^k.$$

În acest caz vom avea:

$$Y_1 = y_1 \cdot \bar{I}^0 = y_1;$$

$$Y_2 = y_1 \cdot \bar{I}^1;$$

$$Y_3 = y_1 \cdot \bar{I}^2;$$

.....

$$Y_n = y_1 \cdot \bar{I}^{n-1} = y_n.$$

Și în cadrul acestei metode  $Y_1 = y_1$  și  $Y_n = y_n$ . Și cu ajutorul acestei metode sunt eliminate toate fluctuațiile evolutive întâmplătoare, valorile teoretice  $Y_t$  înscriindu-se pe o linie curbă.

**Exemplul 3.5.**

Considerând datele de la exemplul 3.2., valorile ajustate prin metoda indicelui mediu ( $\bar{I} = 1,0382$ ) sunt (tabelul 3.6.):

Tabelul 3.6.

Luna	Vânzări (buc.) - $y_t$	$Y_t$
1	100	100,00
2	90	103,82
3	110	107,78
4	120	111,90
5	140	116,17
6	150	120,61
7	110	125,22
8	130	130,00

- **Ajustarea analitică** – această metodă se bazează pe utilizarea unei game largi de funcții statistico-matematice de forma  $y=f(t)$ , dintre care funcția liniară, funcția hiperbolică, funcția parabolică de ordin superior, funcția exponențială și funcția logistică sunt cele mai folosite. Alegerea tipului de funcție care aproximează cel mai bine tendința evolutivă a fenomenului studiat se face pe baza următoarelor criterii (aplicabile opțional):

a) – *criteriul bazat pe reprezentarea grafică* – constă în construirea cronogramei. În funcție de modul de dispunere a termenilor seriei în cadrul orizontului de timp stabilim tipul de funcție recomandat pentru ajustarea termenilor seriei. În figura 3.1. sunt reprezentate diferite tipuri de funcții.

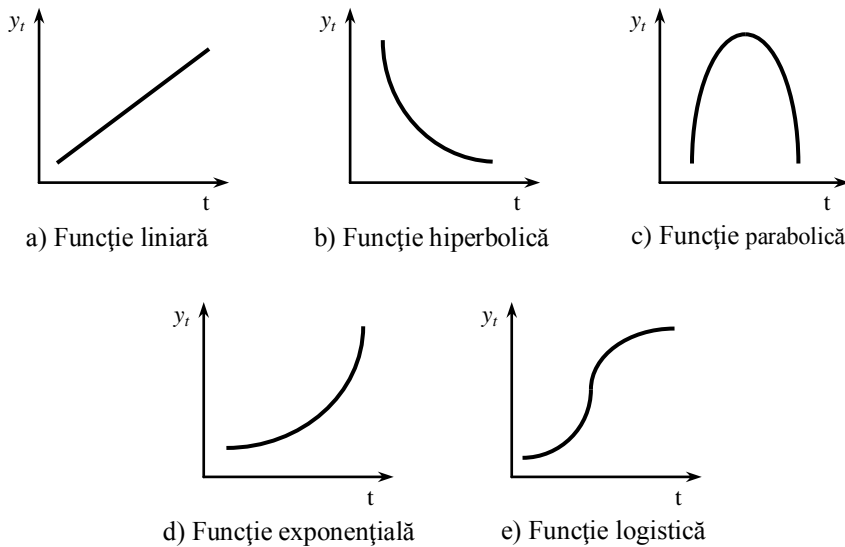


Figura 3.1. Tipuri de funcții.

b) – *criteriul diferențelor* – corespunzător acestui criteriu, se determină diferențele absolute cu baza în lanț de ordinul unu din termenii seriei, după relația:

$$\Delta_{t/t-1}^{(1)} = y_t - y_{t-1},$$

apoi cele de ordinul doi, după relația:

$$\Delta_{t/t-1}^{(2)} = \Delta_t^{(1)} - \Delta_{t-1}^{(1)} \text{ ș.a.m.d.}$$

Se continuă calculul diferențelor până se obțin diferențe aproximativ egale. Interpretarea acestor diferențe se face astfel:

- dacă diferențele absolute cu baza în lanț de ordinul întâi sunt constante,  $\Delta_{t/t-1}^{(1)} = k_1$ , se apreciază că seria cronologică respectivă are o tendință liniară;
- dacă diferențele absolute cu baza în lanț de ordinul doi sunt constante,  $\Delta_{t/t-1}^{(2)} = k_2$ , se apreciază că seria cronologică are o tendință de forma parabolei de gradul doi.

Dacă fenomenul cercetat s-a dezvoltat în progresie geometrică, adică indicii cu baza în lanț sunt constanți, admitem că seria cronologică respectivă prezintă o tendință exponențială.

După alegerea funcției de ajustare se impune estimarea parametrilor funcției, estimare realizată utilizând metoda celor mai mici pătrate. Această metodă are ca

funcție obiectiv minimizarea sumei pătratelor abaterilor valorilor reale de la cele ajustate, adică:

$$\min \sum (y_i - Y_i)^2.$$

Vom prezenta în continuare modul de estimare a parametrilor funcției liniare.

- **Funcția liniară** - face parte din metodele analitice de ajustare a seriilor dinamice și se bazează pe ecuația:

$$Y_i = a + b \cdot t_i,$$

unde:  $Y_i$  – valorile teoretice ale uneia dintre variabilele seriei cronologice;

$a$  – sintetizează valoarea acestei variabile determinată în afara variației factorului timp din interiorul intervalului delimitat de seria cronologică supusă analizei;

$b$  – are rol de spor mediu și reprezintă creșterea (pentru semnul +) sau descreșterea (pentru semnul -) a nivelurilor  $Y_i$  ca urmare a variației factorului timp;

$t_i$  – reprezintă factorul timp, care este exprimat, de regulă, prin rangul termenilor seriei cronologice.

Vom determina cei doi parametrii,  $a$  și  $b$ , utilizând metoda celor mai mici pătrate:

$$\min \sum (y_i - Y_i)^2 \Rightarrow \min \sum [y_i - (a + b \cdot t_i)]^2$$

Pentru ca această funcție să atingă minimumul trebuie ca derivatele parțiale de ordinul I, în raport cu  $a$  și  $b$ , să fie nule. Rezultă sistemul:

$$\begin{cases} na + b \sum t_i = \sum y_i \\ a \sum t_i + b \sum t_i^2 = \sum t_i y_i \end{cases}$$

Prin rezolvarea acestui sistem se obțin valorile celor doi parametri. Volumul de lucru poate fi mult redus dacă pentru determinarea parametrilor vom folosi calculul simplificat. Acesta se aplică în mod diferit dacă seria are un număr par sau impar de termeni.

Dacă seria dinamică are un *număr impar de termeni*, anul de origine este ales în centrul seriei și are rangul 0. Pentru termenii care preced anul de origine,  $t$  va lua valorile -1, -2, -3, ..., iar pentru termenii care urmează după anul de origine,  $t$  va lua valorile 1, 2, 3, ..., astfel încât  $\sum_{\square} t_i = 0$ .

Dacă seria are un *număr par de termeni*, anul de origine este ales între termenii centrali. Pentru termenii care preced anul de origine,  $t$  va lua valorile -1, -3, -5, ..., iar pentru termenii care urmează după anul de origine,  $t$  va lua valorile 1, 3, 5, ..., astfel încât și în acest caz  $\sum_{\square} t_i = 0$ .

Sistemul de ecuații devine:

$$\begin{cases} na = \sum y_i \\ b \sum t_i^2 = \sum t_i y_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\sum y_i}{n} \\ b = \frac{\sum t_i y_i}{\sum t_i^2} \end{cases}$$

În cadrul metodei este evidențiată proprietatea  $\sum y_i = \sum Y_i \Rightarrow \bar{y} = \bar{Y}$ , proprietate folosită și ca test de control.

**Exemplul 3.6.**

Considerând datele de la exemplul 3.2., valorile ajustate cu ajutorul funcției liniare sunt prezentate în tabelul 3.7.

Tabelul 3.7.

Luna	Vânzări (buc.) – $y_i$	$t_i$	$t_i^2$	$t_i \cdot y_i$	$Y_i$
1	100	-7	49	-700	99,99
2	90	-5	25	-450	105,35
3	110	-3	9	-330	110,71
4	120	-1	1	-120	116,07
5	140	1	1	140	121,43
6	150	3	9	450	126,79
7	110	5	25	550	132,15
8	130	7	49	910	137,51
$\Sigma$	950	0	168	450	-

Parametrii  $a$  și  $b$  vor avea valorile:

$$a = \frac{950}{8} = 118,75 \text{ și } b = \frac{450}{168} = 2,68,$$

iar ecuația de ajustare este:

$$Y_i = 118,75 + 2,68 \cdot t_i.$$

Valorile ajustate sunt trecute în coloana 6 a tabelului 3.7. și reprezentate grafic în figura 3.2.

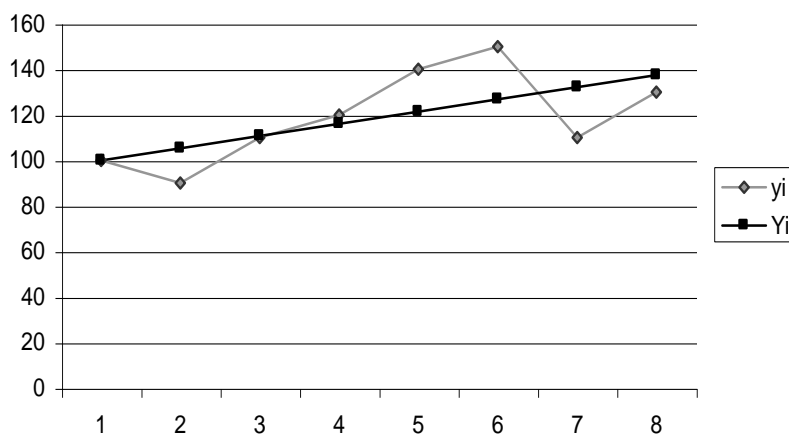


Figura 3.2. Valorile reale și cele ajustate prin funcția liniară.

Într-o manieră similară se ajustează seriile cronologice și cu ajutorul celorlalte funcții statistico-matematice.

<b>ANALIZA SERIILOR CRONOLOGICE</b> .....	97
3.1. Indicatorii dinamicii .....	97
3.2. Ajustarea seriilor cronologice .....	103