

Echivalente propositionale

Scurta recapitulare

- O propozitie este **valida** (sau tautologie) iff este adevarata in toate interpretarile posibile.
- O propozitie este **satisfiabila** iff exista cel putin o interpretare in care este adevarata.
- O propozitie este **nesatisfiabila** (sau contradictie) iff este falsa in toate interpretarile.
- O propozitie este **contingenta** iff exista cel putin o interpretare in care este adevarata si una in care este falsa.
- O multime de propozitii este **consistenta** daca exista cel putin o linie dintr-o tabela de adevar in care toate propozitiile sunt concomitent adevarate.

Tema de data trecuta? 0.5 puncte

Termen limita 17 martie

- Faceti un program in limbajul dorit (C, Java, Prolog etc.) pentru a calcula AND, OR si XOR pentru doua siruri date de biti (ca in exemplul de mai jos).

1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	
1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	
1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	OR
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	AND
0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	XOR

Consistentă

- **Exc1:** Determinati daca fiecare set de propozitii este consistent sau inconsistent:
 1. $p \rightarrow \neg p, \neg p \rightarrow \neg p, p \wedge p, p \vee p$
 2. $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r$
 3. $p \vee q, q \vee r, r \rightarrow \neg p$
 4. $p \rightarrow (q \vee r), r \rightarrow \neg p, p \rightarrow \neg q$

Evaluarea definita formal

- **Def1:** O *evaluare booleana* este o functie v al carei domeniu este multimea tuturor formulelor din logica propozitiilor, iar codomeniul este multimea de valori de adevar $\{A, F\}$ a.i.
 - $v(p)$ este definit pentru orice formula atomica p .
 - Pentru orice formula α ,
 - $v(\neg \alpha) = A$, daca $v(\alpha) = F$
 - $v(\neg \alpha) = F$, daca $v(\alpha) = A$
 - Pentru orice formule α si β ,
 - $v(\alpha \wedge \beta) = A$ daca $v(\alpha) = A$ si $v(\beta) = A$
 - $v(\alpha \wedge \beta) = F$, altfel
 - Pentru orice formule α si β ,
 - $v(\alpha \vee \beta) = F$ daca $v(\alpha) = F$ si $v(\beta) = F$
 - $v(\alpha \vee \beta) = A$, altfel

Evaluarea definita formal

■ Def1 cont

- Pentru orice formule α si β ,
 - $v(\alpha \oplus \beta) = F$ daca $v(\alpha) = v(\beta)$
 - $v(\alpha \oplus \beta) = A$, altfel
- Pentru orice formule α si β ,
 - $v(\alpha \rightarrow \beta) = F$ daca $v(\alpha) = A$ si $v(\beta) = F$
 - $v(\alpha \rightarrow \beta) = A$, altfel
- Pentru orice formule α si β ,
 - $v(\alpha \leftrightarrow \beta) = A$ daca $v(\alpha) = v(\beta)$
 - $v(\alpha \leftrightarrow \beta) = F$, altfel

Evaluari booleene

- Pentru orice doua formule propozitionale α si β avem:
 - $v(\neg \alpha) = \neg v(\alpha)$
 - $v(\alpha \wedge \beta) = v(\alpha) \wedge v(\beta)$
 - $v(\alpha \vee \beta) = v(\alpha) \vee v(\beta)$
 - $v(\alpha \oplus \beta) = v(\alpha) \oplus v(\beta)$
 - $v(\alpha \rightarrow \beta) = v(\alpha) \rightarrow v(\beta)$
 - $v(\alpha \leftrightarrow \beta) = v(\alpha) \leftrightarrow v(\beta)$
- **Ex1:** Stiind ca $v(p) = A$ si $v(q) = F$, ce valoare de adevar va avea formula $(\neg p \vee q) \rightarrow (q \wedge p)$?
 - Rezolvarea (la tabla) poate fi facuta cu o tabela partiala de adevar sau aplicand direct (ca mai sus) functia v pentru intreaga formula.

Evaluari booleene

- **Exc2:** Daca $v(p) = v(r) = A$ si $v(q) = F$, atunci calculati $v(\alpha)$, unde α este:
 - $\neg(p \rightarrow q)$
 - $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$
 - $p \rightarrow (q \wedge r)$
 - $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$
 - $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
 - $\neg(p \rightarrow \neg q)$

Validitatea, (ne)satisfiabilitatea revizitate

- Dacă v este o evaluare booleană și φ o formulă propozitională, v **satisface** φ dacă $v(\varphi) = A$.
- Dacă Σ este o mulțime de formule propozitionale, v **satisface** Σ dacă $v(\varphi) = A$ pentru orice φ din Σ .
- Spunem că φ (sau Σ) este **satisfiabilă** dacă există o evaluare booleană care să o satisfacă.
- O formulă φ este **validă** sau tautologie dacă este satisfăcută de toate evaluările booleene.
- O formulă φ este **insatisfiabilă** sau contradicție dacă nu există o evaluare booleană care să o satisfacă.

Deductia

- **Def2:** Dintr-o multime de formule Σ spunem ca se *deduce* o formula φ , (sau φ este *consecinta logica* pentru Σ), notat $\Sigma \models \varphi$, daca fiecare evaluare booleana v care satisface Σ il satisface si pe φ .
- **Ex2:** Aratati ca $\neg q$ este consecinta logica pentru $\{p, p \rightarrow \neg q\}$.
 - $v(p) = A$ si $v(p \rightarrow \neg q) = A$.
 - Stiind ca $v(p) = A$, pentru ca $v(p \rightarrow \neg q)$ sa fie adevarata, trebuie ca $v(\neg q) = A$.
 - Prin urmare, $\{p, p \rightarrow \neg q\} \models \neg q$

Deductia

- Daca Σ este multime vida, atunci vom nota $\models \varphi$, iar φ in acest caz este o tautologie pentru ca este adevarata pentru orice evaluare booleana posibila.
- **Def3**: Daca Σ si Ω sunt doua multimi de formule propozitionale, spunem ca Ω se deduce din Σ , notat $\Sigma \models \Omega$, daca fiecare evaluare booleana care satisface Σ satisface si Ω .
 - Daca $\Omega \subseteq \Sigma$, fireste ca $\Sigma \models \Omega$.

Deductia

- **Prop1:** Fie formulele P_1, P_2, \dots, P_n . Formula P este consecinta logica a multimii $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ daca si numai daca $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \wedge \neg P$ este nesatisfiabila.
 - Dem (la tabla) se face prin reducere la absurd.
- **Ex3:** Aratati ca din $\{p \vee q, \neg p\}$ se deduce q .
 - Solutia (la tabla) arata ca $(p \vee q) \wedge \neg p \wedge \neg q$ este nesatisfiabila.
 - Fireste, se poate rezolva si precum exercitiul anterior.

Tabelele de adevar – uneori ineficiente

- Cand numarul de variabile este mare, devin nepractice.
 - De ex, pentru 20 de variabile, avem 2^{20} linii, adica 1 048 576.
 - Desigur, e nevoie de un calculator pentru a verifica o tautologie pentru 20 de variabile.
 - Dar daca avem 1000 de variabile? 2^{1000} linii (un numar cu peste 300 de cifre)?
 - Niciun computer nu poate rezolva tabela de adevar decat in trilioane de ani.

Echivalente logice

- **Def4:** Propozitiile compuse p si q se numesc *echivalente logic* daca si numai daca $p \leftrightarrow q$ este o tautologie. Notatie: $p \equiv q$.
- **Prop2:** Propozitiile compuse care sunt *echivalente logic* au aceleasi valori de adevar in toate interpretarile.
 - Dem (la tabla) se face prin reducere la absurd.
 - Pe ultima coloana a tablei de adevar au exact aceleasi valori de adevar.
- Simbolul \equiv nu este o conectiva logica.
- Echivalenta logica se mai noteaza si \Leftrightarrow .

Echivalente logice

- Contrapozitiva pentru $A \rightarrow B$ este $\neg B \rightarrow \neg A$, unde A si B sunt propozitii complexe.
 - Care este contrapozitiva pentru $p \rightarrow (q \wedge \neg r)$?
- **Prop3**: Aratati ca orice formula conditionala este logic echivalenta cu contrapozitiva sa. (dem)

Legile lui De Morgan

$$\neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg (p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

Legile lui De Morgan

- **Ex4:** Folositi legile lui de Morgan pentru a nega:

- Radu are un celular **si** el are un laptop.

- $p = \text{"Radu are un celular"}, q = \text{"Radu are un laptop"}$

- Avem $p \wedge q$. Negatia $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$. Asadar, negatia afirmatiei initiale va fi:

"Radu **nu** are un celular **sau** el **nu** are un laptop."

- Ana va merge la concert **sau** Mihai va merge la concert.

- $r = \text{"Ana va merge la concert"}, s = \text{"Mihai va merge la concert"}$

- Avem $p \vee q$. Negatia $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$. Negatia afirmatiei initiale va fi:

"Ana **nu** va merge la concert **si** Mihai **nu** va merge la concert."

Legile lui De Morgan

- **Exc3:** Folosind legile lui De Morgan, negati urmatoarele propozitii:
 1. Radu este bogat si fericit.
 2. Ana vine pe jos sau ia autobuzul catre Universitate.
 3. Ovidiu se va angaja in industrie sau va preda in invatamant.
 4. Anca stie C si logica computationala.

Echivalente logice

- O metoda de a determina daca doua propozitii compuse sunt echivalente este prin tabela de adevar.
 - Sa aratam ca doua propozitii *sunt logic echivalente* necesita o *tabela* de adevar *completa*.
 - Sa aratam ca *nu sunt logic echivalente* necesita o tabela de adevar cu *o singura linie* in care una din propozitii este A, iar cealalta F.
- **Ex5:** Sa se demonstreze echivalenta:

$$\neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

Exercitii

- **Exc4:** Sa se arate ca:

1. $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
2. $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$ (contrapozitiva)
3. $p \rightarrow q \not\equiv q \rightarrow p$ (reciproca)
4. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
5. $(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q) \equiv \text{T}$

- **Exc5:** Sa se verifice daca urmatoarele perechi de propozitii sunt logic echivalente:

1. $p, p \vee p$
2. $\neg(p \wedge q), \neg p \vee \neg q$
3. $p \vee (q \wedge r), (p \vee q) \wedge r$

Echivalente logice

- Cu **A** notam o propozitie compusa care este totdeauna adevarata, iar cu **F** una care este falsa.
- Identitate
 - $p \wedge A \equiv p$
 - $p \vee F \equiv p$
- Dominatie
 - $p \vee A \equiv A$
 - $p \wedge F \equiv F$
- Idempotentia
 - $p \vee p \equiv p$
 - $p \wedge p \equiv p$
- Dubla negatie
 - $\neg \neg p \equiv p$
- Negatie
 - $p \vee \neg p \equiv A$
 - $p \wedge \neg p \equiv F$
- Comutativitate
 - $p \vee q \equiv q \vee p$
 - $p \wedge q \equiv q \wedge p$
- Asociativitate
 - $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
 - $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

Asociativitatea

- $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
- $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
 - Din echivalentele de mai sus rezulta ca $p \vee q \vee r$ si $p \wedge q \wedge r$ sunt bine definite.
- Prin urmare, legile lui De Morgan pot fi generalizate la
 - $\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \equiv \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \dots \vee \neg p_n$
 - $\neg(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \equiv \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \dots \wedge \neg p_n$
- **Ex6:** Calculati **negatia** pentru urmatoarea formula propozitionala (rez la tabla): $(p \vee q \wedge r)$

Echivalente logice

- Distributivitate (de verificat)

- $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

- $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

- Absortie (de verificat)

- $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

- $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

- Legile lui De Morgan

- $\neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

- $\neg (p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

Echivalente logice legate de implicatie

- $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
- $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$
- $p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$
- $p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg q)$
- $\neg(p \rightarrow \neg q) \equiv p \wedge \neg q$
- $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$
- $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$
- $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r)$
- $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$

Echivalente logice legate de conectiva echivalenta

- $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- $p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$
- $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
- $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

Tabele de adevar – complete sau incomplete, dupa caz

- Indiferent de ce trebuie demonstrat,
 - (ne)validitate,
 - (ne)satisfiabilitate,
 - (ne)contingenta,
 - (in)consistenta, sau
 - (ne)echivalenta a doua formule
- se poate construi o tabela completa de adevar.
- Daca se ajunge pana la completarea tablei la demonstrarea proprietatii, ne putem opri.

Tabele de adevar: complete sau incomplete?

- In functie de proprietatea de demonstrat, (de ex daca o formula este valida sau nevalida - linia 1 din tabel), avem nevoie sa construim intreaga tabela, sa gasim o linie sau doua linii cu proprietatile de mai jos.

Proprietatea de verificat	Prezenta	Absenta
Validitate	intreaga	o singura linie (F)
Nesatisfiabilitate	intreaga	o singura linie (A)
Contingenta	doua linii – una cu A si una cu F	intreaga
Consistenta	o singura linie (A)	intreaga
Echivalenta	intreaga	o singura linie (F)

Folosirea echivalentelor logice

- Propozitiile compuse (sau parti ale lor) pot fi inlocuite cu alte propozitii compuse cu care sunt logic echivalente fara sa li se schimbe valorile de adevar.
- **Ex7:** Aratati ca $\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$
- Se poate face o tabela de adevar sau se pot folosi echivalente.
- $$\begin{aligned}\neg(p \rightarrow q) &\equiv \neg(\neg p \vee q) \\ &\equiv \neg(\neg p) \wedge \neg q \\ &\equiv p \wedge \neg q\end{aligned}$$

Folosirea echivalentelor logice

■ **Ex8:** Aratati ca $\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg p \wedge \neg q$

■
$$\begin{aligned}\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) &\equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) \\ &\equiv \neg p \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q) \\ &\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q) \\ &\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) \\ &\equiv F \vee (\neg p \wedge \neg q) \\ &\equiv \neg p \wedge \neg q\end{aligned}$$

Folosirea echivalentelor logice

- **Ex9:** Sa se arate ca $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ este o tautologie.

- $$\begin{aligned}(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) &\equiv (\neg(p \wedge q)) \vee (p \vee q) \\ &\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q) \\ &\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q) \\ &\equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q) \\ &\equiv A \vee A \\ &\equiv A\end{aligned}$$

Folosirea echivalentelor logice

- **Ex10:** Aratati ca $p \leftrightarrow q$ si $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ sunt echivalente.

- $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

$$\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$$

// not $(\neg p \vee q)$ cu X , deci vom avea $X \wedge (\neg q \vee p)$

// adica $(X \wedge \neg q) \vee (X \wedge p)$

$$\equiv ((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \vee ((\neg p \vee q) \wedge p)$$

$$\equiv ((\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge q)) \vee ((p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q))$$

// $(\neg q \wedge q) \equiv F$, la fel $(p \wedge \neg p)$

$$\equiv (\neg q \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)$$

Exercitii

- **Exc6:** Sa se arate prin tabele de adevar ca urmatoarele formule propozitionale sunt tautologii:
 1. $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$
 2. $(p \wedge q) \rightarrow p$
 3. $(\neg p \wedge (p \vee q)) \rightarrow q$
 4. $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$
 5. $(\neg p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg q$
- **Exc7:** Sa se arate fara sa se foloseasca tabele de adevar ca formulele de la exercitiul 6 sunt tautologii.

Exercitii

- **Exc8:** Verificati prin tabele de adevar daca urmatoarele formule sunt echivalente:
 1. $(p \wedge q) \rightarrow r, (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$
 2. $\neg(p \leftrightarrow q), p \leftrightarrow \neg q$
 3. $\neg(p \oplus q), p \leftrightarrow q$
 4. $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r), q \rightarrow (p \vee r)$
 5. $(p \rightarrow q) \rightarrow r, p \rightarrow (q \rightarrow r)$
- **Exc9:** Verificati fara tabele de adevar daca formulele de la exercitiul 8 sunt echivalente.
 - Pentru punctul 3 al exc 8 este necesara si cunoasterea echivalentei:

$$p \oplus q \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

Un numar minim de conective

- Ce s-ar intampla daca
 - din logica propozitiilor eliminam echivalenta (\leftrightarrow) si o inlocuim cu varianta ei echivalenta: $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$?
 - s-ar obtine un limbaj echivalent logic cu logica propozitiilor.
- Simplificarea poate merge si mai departe, a.i. orice propozitie compusa poate fi scrisa folosind numai negatia, o alta conectiva logica si paranteze.

Un numar minim de conective

- **Exc10:** Utilizand numai negatia, implicatia si paranteze scrieti propozitii care sunt logic echivalente cu cele de mai jos:
 1. $p \vee q$
 2. $p \wedge q$
 3. $p \leftrightarrow q$
- **Exc11:** Utilizand numai negatia, disjunctia si paranteze scrieti propozitii care sunt logic echivalente cu cele de mai jos:
 1. $p \wedge q$
 2. $p \rightarrow q$
 3. $p \leftrightarrow q$
 4. $\neg p \wedge \neg q$