Demonstratii.
Deductia naturala

Scurta recapitulare

- O ***evaluare booleana*** este o functie *v* al carei domeniu este multimea tuturor formulelor din logica propozitiilor, iar codomeniul este multimea de valori de adevar {A, F} a.i.
  - v(*p*) este definit pentru orice formula atomica *p*.
  - Pentru orice formula α,
    - $v(\neg \alpha)$ = A, daca $v(\alpha)$ = F
    - $v(\neg \alpha)$ = F, daca $v(\alpha)$ = A …
- Dintr-o multime de formule Σ spunem ca se ***deduce*** o formula φ, (sau φ este ***consecinta logica*** pentru Σ), notat $\Sigma \models \varphi$, daca fiecare evaluare booleana v care satisface Σ il satisface si pe φ.

Scurta recapitulare

- Fie formulele $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Formula P este consecinta logica a multimii $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ daca si numai daca $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \wedge \neg P$ este nesatisfiabila.
- Propozitiile compuse p si q se numesc ***echivalente logic*** daca si numai daca $p \leftrightarrow q$ este o tautologie. Notatie: $p \equiv q$.
- $\neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
- $\neg (p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
- Cand este nevoie sa construim tabele complete de adevar si cand nu.

Folosirea echivalentelor logice

- **Ex1**: Sa se arate ca $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ este o tautologie.

- $$\begin{aligned}(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) &\equiv (\neg (p \wedge q)) \vee (p \vee q)\\ &\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q)\\ &\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q)\\ &\equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q)\\ &\equiv \mathrm{A} \vee \mathrm{A}\\ &\equiv \mathrm{A}\end{aligned}$$

Folosirea echivalentelor logice

- **Ex2**: Aratati ca $p \leftrightarrow q$ si $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ sunt echivalente.
- $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

  $\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

  // not $(\neg p \vee q)$ cu X, deci vom avea $X \wedge (\neg q \vee p)$

  // adica $(X \wedge \neg q) \vee (X \wedge p)$

  $\equiv ((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \vee ((\neg p \vee q) \wedge p)$

  $\equiv ((\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge q)) \vee ((p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q))$

  //$(\neg q \wedge q) \equiv$ F, la fel $(p \wedge \neg p)$

  $\equiv (\neg q \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)$

Exercitii

- **Exc1**: Sa se arate prin tabele de adevar ca urmatoarele formule propozitionale sunt tautologii:

1. $\neg p \to (p \to q)$
2. $(p \wedge q) \to p$
3. $(\neg p \wedge (p \vee q)) \to q$
4. $(p \wedge (p \to q)) \to q$
5. $(\neg p \wedge (p \to q)) \to \neg q$

- **Exc2**: Sa se arate fara sa se foloseasca tabele de adevar ca formulele de la exercitiul 6 sunt tautologii.

Exercitii

- **Exc3**: Verificati prin tabele de adevar daca urmatoarele formule sunt echivalente:
  1. $(p \wedge q) \to r$, $(p \to r) \wedge (q \to r)$
  2. $\neg (p \leftrightarrow q)$, $p \leftrightarrow \neg q$
  3. $\neg (p \oplus q)$, $p \leftrightarrow q$
  4. $\neg p \to (q \to r)$, $q \to (p \vee r)$
  5. $(p \to q) \to r$, $p \to (q \to r)$
- **Exc4**: Verificati fara tabele de adevar daca formulele de la exercitiul 3 sunt echivalente.
  - Pentru punctul 3 al exc 3 este necesara si cunoasterea echivalentei:

$$p \oplus q \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

Un numar minim de conective

- Ce s-ar intampla daca
  - din logica propozitiilor eliminam echivalenta ($\leftrightarrow$) si o inlocuim cu varianta ei echivalenta: $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$?
  - s-ar obtine un limbaj echivalent logic cu logica propozitiilor.
- Simplificarea poate merge si mai departe, a.i. orice propozitie compusa poate fi scrisa folosind numai negatia, o alta conectiva logica si paranteze.

Un numar minim de conective

- **Exc5**: Utilizand numai negatia, implicatia si paranteze scrieti propozitii care sunt logic echivalente cu cele de mai jos:

1. $p \vee q$
2. $p \wedge q$
3. $p \leftrightarrow q$

- **Exc6**: Utilizand numai negatia, disjunctia si paranteze scrieti propozitii care sunt logic echivalente cu cele de mai jos:

1. $p \wedge q$
2. $p \rightarrow q$
3. $p \leftrightarrow q$
4. $\neg p \wedge \neg q$

Demonstratii – silogism disjunctiv

$$\frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \end{array}}{q}$$

- p = “Afara ploua”
- q = “Afara este insorit”
- Stim ca:
  - $p \vee q$ = “Afara ploua sau este insorit.”
  - $\neg p$ = “Afara nu ploua.”
- Rezulta:
  - q = “Afara este insorit.”

Demonstratii – modus ponens

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ p \end{array}}{q}$$

- p = "Ai o parola."
- q = "Te poti loga la calculator."
- Stim ca
  - $p \rightarrow q$ = "Daca ai o parola, atunci te poti loga la calculator."
  - p = "Ai o parola."
- Rezulta
  - q = "Te poti loga la calculator."

Demonstratii

- Forme precum silogismul disjunctiv sau modus ponens pot fi combinate pentru a crea demonstratii mai complicate:

$$\frac{\neg P \rightarrow (Q \vee P) \qquad \neg P}{Q}$$

- Din modus ponens, pornind de la ceea ce stim, obtinem $Q \vee P$, o concluzie intermediara.
- Din $Q \vee P$, si $\neg P$, prin silogism disjunctiv se obtine Q.

Demonstratii

- D.p.d.v. formal, o demonstratie este o secventa de propozitii.
  - Primele propozitii din secventa se numesc ***premise***.
  - Fiecare propozitie ulterioara se deduce din cele anterioare printr-o regula de demonstratie.
  - Ultima propozitie din secventa (cea de sub linie) reprezinta ***concluzia***.

Deductia naturala

- Intr-un sistem de deductie naturala, avem 2 reguli pentru fiecare operator logic:
  - O regula de ***introducere*** (notata cu I) care ne permite sa demonstram o propozitie care are operatorul ca si conectiva principala.
  - O regula de ***eliminare*** (notata cu E) care ne permite sa demonstram ceva cand se da o propozitie care are operatorul ca si conectiva principala.
- In plus, avem si regula de ***reiterare*** (notata cu R) .
  - Daca ceva a fost deja demonstrat , reiterarea permite reluarea acelei reguli intr-o line noua.

Reiterarea

m	P	
n	P	R m

- Cand adaugam o linie la o demonstratie, specificam:
  - Ce regula (R, I sau E) justifica linia.
  - Numerele liniilor la care s-a aplicat regula.
- R1 in exemplul de mai sus arata ca linia *n* este justificata prin reiterare aplicata liniei *m*.
- Reiterarea nu demonstreaza nimic nou, doar aminteste o propozitie de mai sus (de obicei, mai multe linii mai sus).

Conjunctia – introducerea ($\wedge$I)

- De ce ar fi nevoie pentru a demonstra $P \wedge Q$?
  - Ar trebui sa demonstram separat ca P este adevarat, la fel, Q.

$$
\begin{array}{l|ll}
m & P & \\
n & Q & \\
 & P \wedge Q & \wedge\mathrm{I}\ m,n
\end{array}
$$

- $\wedge$I m,n inseamna ca introducerea conjunctiei se aplica pentru liniile m si n.
  - Liniile pot fi orice linii existente intr-o demonstatie, nu neaparat consecutive, lucru valabil pentru toate celelalte reguli.
- Evident, P si Q pot fi propozitii complexe (din acest motiv le-am notat cu litere mari).

Conjunctia – eliminarea ($\wedge$E)

- Ce se poate deduce din o propozitie precum $P \wedge Q$?
  - Se poate deduce P. La fel, se poate deduce Q.

m	$P \wedge Q$	
	P	$\wedge$E m
	Q	$\wedge$E m

- Cand avem o conjunctie pe o linie, se poate utiliza $\wedge$ E pentru a deriva oricare din propozitiile implicate in conjunctie.
- $\wedge$ E necesita o singura propozitie, deci scriem un singur numar de linie ca justificare pentru aplicarea acestei reguli.

Conjunctia

- **Ex3**: Aratati ca:

$$\frac{[(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)] \wedge [(t \vee u) \leftrightarrow (v \wedge w)]}{[(t \vee u) \leftrightarrow (v \wedge w)] \wedge [(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)]}$$

- Incepem prin a scrie premisa pe prima linie si a trage o linie sub ea.
  - Tot ce apare sub aceasta linie este justificat de o regula a demonstratiei.

1 $\quad [(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)] \wedge [(t \vee u) \leftrightarrow (v \wedge w)]$

Conjunctia

- **Ex3** (cont): Aratati ca:

$$\frac{[(p \wedge q) \to (r \vee s)] \wedge [(t \vee u) \leftrightarrow (v \wedge w)]}{[(t \vee u) \leftrightarrow (v \wedge w)] \wedge [(p \wedge q) \to (r \vee s)]}$$

- Din premisa, putem deduce oricare din cele doua propozitii complexe, prin eliminarea conjunctiei.

1	$[(p \wedge q) \to (r \vee s)] \wedge [(t \vee u) \leftrightarrow (v \wedge w)]$	
2	$[(p \wedge q) \to (r \vee s)]$	$\wedge$ E 1
3	$[(t \vee u) \leftrightarrow (v \wedge w)]$	$\wedge$ E 1

Conjunctia

- **Ex3** (cont): Aratati ca:

$$\frac{[(p \wedge q) \to (r \vee s)] \wedge [(t \vee u) \leftrightarrow (v \wedge w)]}{[(t \vee u) \leftrightarrow (v \wedge w)] \wedge [(p \wedge q) \to (r \vee s)]}$$

- $\wedge$I necesita ca fiecare din elementele care vor fi adaugate la conjunctie sa fie disponibile in demonstratie.
  - Ele nu trebuie sa fie neaparat in ordine.

1	$[(p \wedge q) \to (r \vee s)] \wedge [(t \vee u) \leftrightarrow (v \wedge w)]$	
2	$[(p \wedge q) \to (r \vee s)]$	$\wedge$E 1
3	$[(t \vee u) \leftrightarrow (v \wedge w)]$	$\wedge$E 1

Conjunctia

- **Ex3** (cont): Aratati ca:

$$\frac{[(p \wedge q) \to (r \vee s)] \wedge [(t \vee u) \leftrightarrow (v \wedge w)]}{[(t \vee u) \leftrightarrow (v \wedge w)] \wedge [(p \wedge q) \to (r \vee s)]}$$

- $\wedge$I necesita ca fiecare din elementele care vor fi adaugate la conjunctie sa fie disponibile in demonstratie.
  - Ele nu trebuie sa fie neaparat in ordine.

1	$[(p \wedge q) \to (r \vee s)] \wedge [(t \vee u) \leftrightarrow (v \wedge w)]$	
2	$[(p \wedge q) \to (r \vee s)]$	$\wedge$E 1
3	$[(t \vee u) \leftrightarrow (v \wedge w)]$	$\wedge$E 1
4	$[(t \vee u) \leftrightarrow (v \wedge w)] \wedge [(p \wedge q) \to (r \vee s)]$	$\wedge$I 3,2

De observat ordinea liniilor

Disjunctia – introducerea ($\vee$ I)

- Daca propozitia p este adevarata, atunci si $p \vee q$ este adevarata.
  - Deci, daca avem o propozitie P adevarata, putem introduce o disjunctie in care sa apara si P.

m	P	
	$P \vee Q$	$\vee$ I m
	$Q \vee P$	$\vee$ I m

- Q poate fi orice alta propozitie, simpla sau complexa.
  - Asadar, o demonstratie corecta este si cea de mai jos.

1	p	
2	$p \vee [(r \rightarrow q) \leftrightarrow (r \vee s)]$	$\vee$ I 1

Disjunctia – introducerea ($\vee$ I)

- Stiindu-se P adevarat, se poate introduce disjunctia cu Q.
  - Aceasta se poate interpreta ca: daca P este adevarat, atunci si $P \vee Q$ este adevarat, indiferent ce valoarea de adevar a lui Q.
  - Deci concluzia nu poate fi falsa daca premisa este adevarata, deci demonstratia este corecta.

Disjunctia – eliminarea ($\vee$ E)

- Ce se poate concluziona daca se stie ca $P \vee Q$ este adevarata?
  - Nu se poate spune ca P este adevarata.
    - Nu stim daca P face $P \vee Q$ adevarata sau Q o face adevarata.
  - Analog, nu se poate concluziona nimic despre Q.
- Nu se poate trage nicio concluzie doar din premisa $P \vee Q$.
- Daca stim insa si ca P este falsa, atunci putem concluziona ca este adevarata Q.
  - Am ajuns la ***silogismul disjunctiv***.

$$
\begin{array}{r|ll}
m & P \vee Q & \\
n & \neg P & \\
 & Q & \vee\mathrm{E}\ m, n
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|ll}
m & P \vee Q & \\
n & \neg Q & \\
 & P & \vee\mathrm{E}\ m, n
\end{array}
$$

Implicatia – introducerea ($\rightarrow$ I)

$$\frac{P \vee Q}{\neg P \rightarrow Q}$$

- Se observa ca cele doua sunt logic echivalente.
- Scriem demonstratia incepand cu premisa, dupa care tragem o linie orizontala.

$$\begin{array}{l|l} 1 & P \vee Q \\ \hline \end{array}$$

- Daca am fi stiut ca $\neg P$ este adevarat, am fi putut concluziona Q prin $\vee$ E.
  - Dar nu stim acest fapt...

Implicatia – introducerea ($\rightarrow$ I)

- Putem incepe o ***subdemonstratie*** (subdem), adica o demonstratie in cadrul demonstratiei principale.
  - Se mai trage o linie verticala pentru a indica faptul ca nu ne mai aflam in cadrul demonstratiei principale.
  - Apoi scriem in cadrul subdem o presupunere.
  - In cazul nostru, ar fi util sa presupunem $\neg$ *P.*

$$
\begin{array}{r|l}
1 & P \vee Q \\
\hline
2 & \quad \begin{array}{|l} \neg P \\ \hline \end{array}
\end{array}
$$

Implicatia – introducerea ($\rightarrow$ I)

- Este important sa mentionam ca nu pretindem ca $\neg P$ este demonstrat.
  - Nu este nevoie insa sa demonstram nicio presupunere din subdem.
  - Poate fi interpretata ca: ce s-ar putea demonstra daca $\neg P$ ar fi adevarat?
    - Se poate demonstra Q.

1	$P \vee Q$	
2	$\neg P$	
3	Q	$\vee$E 1,2

Implicatia – introducerea ($\rightarrow$ I)

- Am demonstrat asadar ca daca avem premisa $\neg P$, putem demonstra Q.
  - Altfel spus, am demonstrat ca $\neg P \rightarrow Q$.
- Prin urmare, putem iesi din subdem cu concluzia $\neg P \rightarrow Q$.
- Notatia de la introducerea implicatiei cuprinde toate liniile din subdem, care desigur pot fi mai multe de doua.

1	$P \vee Q$	
2	$\quad \neg P$	
3	$\quad Q$	$\vee$ E 1,2
4	$\neg P \rightarrow Q$	$\rightarrow$ I 2-3

Implicatia – introducerea ($\rightarrow$ I)

- Din faptul ca putem presupune absolut orice, poate parea ca se merge spre haos.
  - Totusi, presupunerile se leaga de afirmatiile adevarate din afara demonstratiei.
- O subdem se incheie atunci cand se incheie linia verticala.
- Pentru a se termina o demonstratie, trebuie incheiate toate subdem.
- Cand inchidem o subdem, nu ne mai putem referi inapoi la afirmatii din liniile din subdem (care contin presupuneri).

Implicatia – introducerea (→ I)

- Cand introducem o subdem, incepem cu ceea ce vrem sa deducem in coloana.
- Asadar, pentru a obtine o implicatie prin → I, incepem presupunerea cu antecedentul implicatiei pe care vrem sa o realizam.
- Ultima linie a subdem va contine elementul din dreapta implicatiei.

$$
\begin{array}{r|c|cl}
m & & P & \\ \cline{3-3}
n & & Q & \\
 & \multicolumn{2}{l}{P \to Q} & \to \mathrm{I}\ m\text{-}n
\end{array}
$$

Implicatia – eliminarea ($\rightarrow$ E)

- Nu obtinem nimic doar dintr-o implicatie $P \rightarrow Q$.
  - Daca am sti insa si P, am putea concluziona Q.
- $\rightarrow$ E se mai numeste si ***modus ponens***.

$$
\begin{array}{l|ll}
m & P \rightarrow Q & \\
n & \quad P & \\
 & \quad Q & \rightarrow \mathrm{E} \\
 & & m, n
\end{array}
$$

Implicatia

- **Ex4**: Aratati ca:

$$\frac{\begin{array}{c} P \to Q \\ Q \to R \end{array}}{P \to R}$$

- Devreme ce concluzia contine o implicatie, va trebui sa se utilizeze regula $\to$I.
  - Pentru aceasta, avem nevoie de o subdem care sa inceapa cu *P*.

Implicatia

1	$P \to Q$	
2	$Q \to R$	
3		P

- Presupunand P adevarat, avem posibilitatea sa utilizam $\to$ E asupra primei premise.
  - Aceasta ne permite sa-l determinam pe *Q*.
  - $\to$ E aplicat premisei 2 ne conduce la *R*.
  - Din presupunerea lui *P* am ajuns sa demonstram *R* si aplicam $\to$ I.

Implicatia

1	$P \rightarrow Q$		
2	$Q \rightarrow R$		
3		P	
4		Q	$\rightarrow$E 1, 3
5		R	$\rightarrow$E 2, 4
6	$P \rightarrow R$		$\rightarrow$I 3-5

- Presupunand P adevarat, avem posibilitatea sa utilizam $\rightarrow$E asupra primei premise.
  - Aceasta ne permite sa-l determinam pe *Q*.
  - $\rightarrow$E aplicat premisei 2 ne conduce la *R*.
  - Din presupunerea lui *P* am ajuns sa demonstram *R* si aplicam $\rightarrow$I.

Echivalenta – introducerea (↔ I)

- Pentru a demonstra ca $P \leftrightarrow Q$, trebuie sa aratam ca presupunand P obtinem Q si viceversa.
  - Deci trebuie sa aratam ca $P \to Q$ si $Q \to P$.
  - Prin urmare, trebuie sa avem doua subdem, una in care presupunem P si obtinem Q si una in care presupunem Q si obtinem P.

$$
\begin{array}{l|ll}
m & & \underline{P} \\
n & & Q \\
 & \dots & \dots \\
p & & Q \\
q & & P \\
 & P \leftrightarrow Q & \qquad \leftrightarrow \mathrm{I}\ m\text{-}n,\ p\text{-}q
\end{array}
$$

Echivalenta – eliminarea ($\leftrightarrow$ E)

- Daca stim $P \leftrightarrow Q$ si de asemenea stim P, atunci putem concluziona Q.
  - Analog, stiind $P \leftrightarrow Q$ si Q putem concluziona P.

m	$P \leftrightarrow Q$	
n	P	
	Q	$\leftrightarrow$ E m, n

m	$P \leftrightarrow Q$	
n	Q	
	P	$\leftrightarrow$ E m, n

Negatia – introducerea ($\neg$ I)

- Se face prin reducere la absurd.
- Se face in cadrul unei subdem o presupunere si, daca se ajunge la o contradictie, am demonstrat negatia presupunerii initiale.

m	P	RA
n	Q	
$n + 1$	$\neg Q$	
$n + 2$	$\neg P$	$\neg$ I m-n + 1

Reducere la absurd.

De la m pana la n + 1.

Negatia – introducerea ($\neg$ I)

- Ultimele doua propozitii ale subdem trebuie sa fie o contradictie clara, adica o propozitie urmata de negatia ei.
- **Ex5**: Aratati ca $\neg(P \wedge \neg P)$ este o tautologie.
  - Demonstratia se poate face incepand cu o subdem prin presupunerea ca $P \wedge \neg P$.

1	$\quad \| \; P \wedge \neg P$	RA
2	$\quad \| \; P$	$\wedge$ E 1
3	$\quad \| \; \neg P$	$\wedge$ E 1
4	$\neg(P \wedge \neg P)$	$\neg$ I 1-3

Negatia – eliminarea (¬ E)

- Se presupune o afirmatie negata si daca se ajunge la o contradictie, afirmatia fara negatie este considerata adevarata.

$$
\begin{array}{r|l|l}
m & \quad \neg P & \text{RA} \\
n & \quad Q & \\
n+1 & \quad \neg Q & \\
n+2 & P & \neg \text{E } m\text{-}n+1
\end{array}
$$

Negatia

- **Ex6**: Demonstrati ca:

$$\frac{P \vee Q \qquad P \to R \qquad Q \to R}{R}$$

1	$P \vee Q$	
2	$P \to R$	
3	$Q \to R$	
4	$\neg R$	RA
5	P	RA
6	R	$\to$E 2, 5
7	$\neg R$	R 4
8	$\neg P$	$\neg$I 5-7
9	Q	RA
10	R	$\to$E 3, 9
11	$\neg R$	R 4
12	$\neg Q$	$\neg$I 9-11
13	Q	$\vee$E 1, 8
14	R	

Reguli de inlocuire

- Avem o serie de reguli care sunt permise in cadrul unor propozitii complexe.
- Comutativitatea (notata in cadrul demonstratiilor ***com***)
  - $P \wedge Q \equiv P \wedge Q$
  - $P \vee Q \equiv Q \vee P$
  - $P \leftrightarrow Q \equiv Q \leftrightarrow P$
- Dubla negatie (***DN***)
  - $\neg\neg P \equiv P$
- Legile lui De Morgan (***DeM***)
  - $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
  - $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

Reguli de inlocuire

- Implicatia (***Impl***)
  - $P \to Q \equiv \neg P \vee Q$
  - $P \vee Q \equiv \neg P \to Q$
- Echivalenta (***Echiv***)
  - $P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)$

Reguli de inlocuire

- **Ex7**: Aratati ca: $\dfrac{\neg(P \to Q)}{P \wedge \neg Q}$

1	$\neg(P \to Q)$	
2	$\neg(\neg P \vee Q)$	Impl 1
3	$\neg\neg P \wedge \neg Q$	DeM 2
4	$P \wedge \neg Q$	DN 3

Exercitii

- **Exc7**: Adaugati justificarile (regula aplicata si numerele de linii) pentru fiecare linie a demonstratiilor urmatoare.

$$
\begin{array}{l|l}
1 & T \to \neg Q \\
2 & P \wedge T \\
3 & Q \vee (R \wedge S) \\
\hline
4 & T \\
5 & \neg Q \\
6 & R \wedge S \\
7 & S
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|ll}
1 & P \leftrightarrow \neg Q & \\
2 & P \vee \neg Q & \\
\hline
3 & & \multicolumn{1}{|l}{\neg P} \\
\cline{3-3}
4 & & \multicolumn{1}{|l}{\neg Q} \\
5 & & \multicolumn{1}{|l}{P} \\
6 & & \multicolumn{1}{|l}{\neg P} \\
7 & P &
\end{array}
$$

Exercitii

- **Exc8**: Demonstrati ca:

$$\frac{P \wedge Q}{P \leftrightarrow Q} \qquad \frac{P \to (Q \to R)}{(P \wedge Q) \to R} \qquad \frac{P \to (P \wedge \neg P)}{\neg P}$$

$$\frac{P \to \neg P}{\neg P} \qquad \frac{(P \wedge Q) \vee R}{R \vee Q} \qquad \frac{P \vee (Q \to P)}{\neg P \to \neg Q}$$

$$\frac{\begin{matrix} P \wedge (Q \vee R) \\ P \to \neg R \end{matrix}}{Q} \qquad \frac{\begin{matrix} \neg P \to Q \\ P \to R \end{matrix}}{Q \vee R} \qquad \frac{\begin{matrix} P \leftrightarrow Q \\ Q \leftrightarrow R \end{matrix}}{P \leftrightarrow R}$$

Exercitii

- **Exc9 tema**: Demonstrati ca:

$$\frac{\begin{array}{c}(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \\ \neg (P \wedge S) \\ S \vee T\end{array}}{T}$$

- **Exc10**: Demonstrati ca urmatoarele propozitii sunt tautologii:
  - $P \rightarrow P$
  - $P \vee \neg P$
  - $\neg (P \rightarrow \neg Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$

Exercitii

- **Exc11**: Aratati ca urmatoarele perechi de propozitii sunt demonstrabil echivalente:
  - $\neg\neg\neg\neg P, P$
  - $P \rightarrow Q, \neg Q \rightarrow \neg P$
  - $\neg P \leftrightarrow Q, \neg (P \leftrightarrow Q)$
- **Exc12**: Demonstrati ca:
  - $P \wedge (\neg Q \rightarrow \neg P) \models (P \wedge Q) \vee \neg P$
  - $\{P \rightarrow (Q \wedge R), (\neg P \rightarrow R)\} \models \{ R \}$