Logica predicatelor

Semantica

Formule bine formate

- Avem 6 tipuri de simboluri in logica predicatelor:
  - Predicate: p, q, r, ..., p1, q2 etc.
  - Constante: a, b, c, ..., z, a1, b4, ..., ion, mihai, labus etc.
  - Variabile: x, y, z, x1, y1, z4 etc.
  - Conective: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
  - Paranteze: (,)
  - Cuantificatori: $\forall$, $\exists$

Formule bine formate

- Un termen din logica predicatelor este fie o constanta fie o variabila.
- O formula atomica din logica predicatelor este un predicat de aritate n urmat de n termeni intre paranteze si cu virgula intre ei.

Formule bine formata

- **Def.:** Formula bine formata (fbf):
  - Orice formula atomica este o fbf.
  - Daca A este o fbf atunci $\neg$A este o fbf.
  - Daca A si B sunt fbf, atunci (A $\wedge$ B) este o fbf.
  - Daca A si B sunt fbf, atunci (A $\vee$ B) este o fbf.
  - Daca A si B sunt fbf, atunci (A $\rightarrow$ B) este o fbf.
  - Daca A si B sunt fbf, atunci (A $\leftrightarrow$ B) este o fbf.

Formule bine formata

- **Def.:** Formula bine formata (fbf) - continuare:
  - Daca A este o fbf, x este o variabila, A contine cel putin o aparitie a lui x si niciun cuantificator de care x sa fie legat, atunci $\forall xA$ este o fbf.
  - Daca A este o fbf, x este o variabila, A contine cel putin o aparitie a lui x si niciun cuantificator de care x sa fie legat, atunci $\exists xA$ este o fbf.

Propozitii, substitutii

- O propozitie este o entitate care poate fi fie adevarata, fie falsa.
- **Def.:** O propozitie in logica predicatelor este o fbf din logica predicatelor care nu contine variabile libere (toate variabilele sunt legate sau instantiate).

- **Def.:** Daca A este o fbf, c o constanta si x o variabila, atunci substitutia A[c|x] este fbf care se obtine prin inlocuirea fiecarei instante a lui x in A prin c.

Semantica in logica predicatelor

- In logica predicatelor, precum in orice limbaj logic, exista doua tipuri de elemente:
  - Simboluri logice – semnificatia lor este specificata in cadrul limbajului. Ex.: conectivele, cuantificatorii.
  - Simboluri non-logice – semnificatia lor nu este definita de structura logica a limbajului. Ex.: predicatele, constantele.

- O interpretare da o semnificatie tuturor elementelor non-logice ale limbajului.

Interpretari si modele in logica predicatelor

- O interpretare in logica predicatelor necesita urmatoarele:
  - Un univers de definitie (domeniu).
  - O semnificatie schematica pentru fiecare predicat.
  - Un obiect care sa fie selectat de fiecare constanta.
- Sa luam urmatorul exemplu:
  - Universul de definitie: personaje de benzi desenate.
  - p(x) “x lupta impotriva crimei”.
  - b: Batman.
  - w: Bruce Wayne.

Interpretari si modele in logica predicatelor

- Exemplu:
  - Universul de definitie: personaje de benzi desenate.
  - p(x) “x lupta impotriva crimei”.
  - b: Batman.
  - w: Bruce Wayne.
- Propozitia p(b) e adevarata in aceasta interpretare, dar nu doar datorita acestei interpretari.
- p(b) e adevarata datorita acestei interpretari plus a unor cunostinte despre benzi desenate.

Interpretari si modele in logica predicatelor

- Exemplu:
  - Universul (domeniul) de definitie: personaje de benzi desenate.
  - $p(x)$ “x lupta impotriva crimei”.
  - b: Batman.
  - w: Bruce Wayne.
- Cum este $p(w)$?
- Fiindca Bruce Wayne e identitatea secreta a lui Batman, $b = w$, rezulta ca $p(w)$ e adevarata.
- Insa, aceasta fiind identitatea secreta, alte personaje nu stiu ca $p(w)$ e adevarata, desi stiu ca $p(b)$ e adevarata.

Interpretari si modele in logica predicatelor

- Daca am considera asignarea de valori de adevar precum in logica propozitiilor, am putea asigna F sau A fiecarei fbf atomice p(b), p(w) etc.
- Ar fi echivalent cu a inlocui p(b) si p(w) cu litere de propozitii.
  - Dar atunci am ignora toata structura logica a predicatelor si termenilor.
- In logica predicatelor, nu dam definitii separate pentru p(b) si p(w), ci dam semnificatii pentru p, b, w.
- Mai mult, vrem sa folosim si cuantificatori.

Interpretari si modele in logica predicatelor

- Cautam asadar un complementar al asignarii de valori de adevar din logica propozitiilor pentru o interpretare a predicatelor si constantelor.

- Nu se poate utiliza o asignare de valori de adevar pentru aceasta, fiindca un predicat nu e nici fals nici adevarat.

- In exemplul de mai devreme, p e adevarat daca e aplicat lui Batman, dar nu are sens sa ne intrebam daca e adevarat in general.

Interpretari si modele in logica predicatelor

- O interpretare ajuta in selectarea obiectelor asupra carora predicatul este aplicabil.
- Interpretand p(x) drept “x lupta impotriva crimei”, se selecteaza Batman, Superman, Spiderman etc.
- In mod formal, spunem ca aceasta e multimea membrilor universului de definitie asupra caruia predicatul este aplicabil.
- Aceasta multime poarta numele de extensia predicatului.

Interpretari si modele in logica predicatelor

- Multe predicate au domenii de definitie foarte largi.
- In exemplul de mai sus, nu putem enumera exhaustiv toti luptatorii impotriva crimei din benzile desenate, ci folosim limbajul natural pentru a interpreta predicatul.
- Insa interpretarea singura nu spune care membri ai universului sunt in extensia predicatului, ci mai trebuie cunostinte suplimentare despre benzi desenate.
- In general, extensia unui predicat este rezultatul unei interpretari si al catorva cunostinte.

Interpretari si modele in logica predicatelor

- Cateodata insa e posibil sa se listeze toate elementele din extensia predicatului.
- Sa mai adaugam predicatul q(x) “x traieste in locuinta Wayne” la exemplul de mai devreme.
- Atunci extensia lui q este multimea:
extensia(q) = {Bruce Wayne, Alfred majordomul, Dick Grayson}



Interpretari si modele in logica predicatelor

- Astfel, nu trebuie cunostinte despre benzi desenate pentru a determina ca, in aceasta interpretare, $q(w)$ e adevarat – Bruce Wayne e unul din membrii lui q.

- In mod similar, $\exists x q(x)$ e adevarat in aceasta interpretare: exista cel putin un membru din univers care este in extensia lui q.

- In schimb $\forall x q(x)$ e fals, fiindca nu este adevarat ca toti membrii din univers sunt in extensia lui q – mai sunt si alte personaje in benzile desenate decat acestea trei.

Interpretari si modele in logica predicatelor

- Am definit semnificatia formala a unui predicat prin extensia sa.
- Cum ramane insa cu constantele b si w?
- Intelesul unei constante determina ce membru din univers este ales de constanta.
- Individul ales de constanta se numeste referentul constantei.
- Ne putem gandi la litera constantei drept un nume si la referent drept lucrul numit.
- In exemplul nostru, b si w au acelasi referent, fiindca se refera la acelasi personaj.

Modele

- Un model in logica predicatelor este structura formala determinata de:
  - un univers,
  - o extensie pentru fiecare predicat
  - si un referent pentru fiecare constanta.

Modele - exemple

- Sa consideram urmatoarea interpretare:
  - Universul: Echipele spaniole din Champions League in 2009-2010.
  - h(x): “x este o echipa din orasul Madrid”.
  - f: Galacticii.
- Daca nu stim nimic despre fotbal, nu putem spune care propozitii in logica predicatelor sunt adevarate in aceasta interpretare.
- Este propozitia h(f) adevarata sau falsa? Depinde care dintre echipele spaniole din Champions League 2009-2010 este supranumita Galacticii. ☺
- Care este modelul care corespunde acestei interpretari?

Modele - exemple

- Erau patru echipe in Champions League 2009-2010: Real Madrid, Atletico Madrid, Barcelona si Sevilla.
- Dintre acestea Barcelona si Sevilla nu sunt din Madrid.
- Asadar avem modelul:
  - Universul U = {Real Madrid, Atletico Madrid, Barcelona, Sevilla}
  - extensia(h) = {Real Madrid, Atletico Madrid}
  - referent(f) = {Real Madrid}
- Acum nu mai trebuie sa stim nimic despre fotbal pentru a evalua daca o propozitie care il include pe h e falsa sau adevarata in acest model.

Modele - exemple

- Universul U = {Real Madrid, Atletico Madrid, Barcelona, Sevilla}
- extensia(h) = {Real Madrid, Atletico Madrid}
- referent(f) = {Real Madrid}
- h(f) e adevarat, fiindca referentul lui f, adica Real Madrid, este in extensia lui h.
- Atat $\exists x h(x)$ cat si $\exists x \neg h(x)$ sunt adevarate, fiindca
  - exista cel putin un element din U care este in extensia lui h
  - si exista cel putin un element din U care NU este in extensia lui h
- Astfel, modelul captureaza toata semnificatia formala a interpretarii.

Modele - exemple

- Sa consideram urmatoarea interpretare:
  - U: numerele naturale mai mari ca 0 si mai mici decat 10.
  - e(x): “x e par”.
  - n(x): “x este negativ”.
  - l(x, y): “x este mai mic decat y”.
  - t(x, y, z): “x inmultit cu y este egal cu z”.
- Care este modelul care se potriveste acestei interpretari?
- U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.
- Extensia predicatelor *e* sau *n* este submultimea lui U pentru care fiecare este adevarat.

Modele - exemple

- Sa consideram urmatoarea interpretare:
  - U: numerele naturale mai mari ca 0 si mai mici decat 10.
  - e(x): “x e par”.
  - n(x): “x este negativ”.
  - l(x, y): “x este mai mic decat y”.
  - t(x, y, z): “x inmultit cu y este egal cu z”.

- extensia(e) = {2, 4, 6, 8} – alegem elementele pare din U.

- extensia(n) = $\emptyset$ – nu exista numere negative in U.

e(x): "x e par".
n(x): "x este negativ".
l(x, y): "x este mai mic decat y".
t(x, y, z): "x inmultit cu y este egal cu z".

- U: numerele naturale mai mari ca 0 si mai mici decat 10.

- Pare ca extensia lui l:
  - Ar trebui sa il contina pe 1, fiindca 1 e mai mic decat toate celelalte numere
  - Ar trebui sa il contina si pe 2, fiindca 2 e mai mic decat toate celelalte mai putin 1.
  - Orice membru din U in afara de 9 e mai mic decat un alt membru din U.
  - Am putea deci scrie extensia(l) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}?

Modele - exemple

- Continuare:
  - Am putea deci scrie extensia(l) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}?
  - Insa intr-o multime, ordinea elementelor nu conteaza.
  - Deci extensia (l) = {8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1}.
  - Scrierea nu ne spune nimic despre care membri sunt mai mici decat alti membri.

Modele - exemple

- Solutia:
  - Trebuie sa aratam ca 1 e mai mic decat 8 dar si ca nu avem si situatia inversa.
  - Extensia lui l va trebui sa fie alcatuita din perechi ordonate de numere.
  - extensia(l) = {<1, 2>, <1, 3>, <1, 4>, <1, 5>, <1, 6>, <1, 7>, <1, 8>, <1, 9>, <2, 3>, <2, 4>, <2, 5>, <2, 6>, <2, 7>, <2, 8>, <2, 9>, <3, 4>, <3, 5>, <3, 6>, <3, 7>, <3, 8>, <3, 9>, <4, 5>, <4, 6>, <4, 7>, <4, 8>, <4, 9>, <5, 6>, <5, 7>, <5, 8>, <5, 9>, <6, 7>, <6, 8>, <6, 9>, <7, 8>, <7, 9>, <8, 9>}

Modele - exemple

- Continuare:
  - t(x, y, z): “x inmultit cu y este egal cu z”.
  - Extensia lui t va contine triplete ordonate de numere de tipul $<2, 4, 8>$, fiindca $2 * 4 = 8$.

- In general, extensia unui predicat de aritate *n* este o multime a tuturor n-tuplurilor ordonate $<a_1, a_2, \ldots, a_n>$ astfel incat
  - $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt membri ai universului
  - si predicatul aplicat lui $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este adevarat in aceasta ordine.

Lucrul cu modele

- Fie A si B doua propozitii in logica predicatelor. $A \vDash B$ (B se deduce din A) daca nu exista niciun model in care A sa fie adevarat si B fals.
  - $\vDash A$ inseamna ca A este adevarat in orice model.
- Definitii:
  - O tautologie in logica predicatelor este o propozitie A care este adevarata in orice model, $\vDash A$.
  - O contradictie in logica predicatelor este o propozitie A care este falsa in orice model, $\vDash \neg A$.
  - O propozitie este contingenta in logica predicatelor daca si numai daca nu este nici o tautologie nici o contradictie.

Lucrul cu modele

- Definitii:
  - Un rationament in care C se deduce din P_1, P_2, … este valid in logica predicatelor daca si numai daca nu exista niciun model in care toate premisele sa fie adevarate si concluzia falsa, $\{P_1, P_2, \ldots\} \models C$.
  - Altfel, este nevalid in logica predicatelor.
  - Doua propozitii A si B sunt logic echivalente in logica predicatelor daca si numai daca atat $A \models B$ cat si $B \models A$.
  - Multimea $\{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$ este consistenta in logica predicatelor daca si numai daca exista cel putin un model in care toate propozitiile sunt adevarate.
  - Multimea este inconsistenta daca si numai daca nu exista un astfel de model.

Constructia de modele

- Sa aratam ca $\forall x p(x, x) \rightarrow q(d)$ nu este o tautologie.
- Trebuie sa aratam asadar ca propozitia nu este adevarata in orice model, deci ca este falsa intr-un anumit model.
- Daca evidentiem un model in care propozitia sa fie falsa, atunci am demonstrat ca nu este tautologie.
- Pentru ca $\forall x p(x, x) \rightarrow q(d)$ sa fie falsa, $\forall x p(x, x)$ trebuie sa fie adevarata si q(d) falsa.
- Vrem ca $\forall x p(x, x)$ sa fie adevarata, inseamna ca fiecare membru al universului trebuie sa formeze pereche cu el insusi in extensia lui *p*.
- q(d) trebuie sa fie fals, deci referentul lui *d* nu trebuie sa se afle in extensia lui *q*.

Constructia de modele

- Vrem ca $\forall x p(x, x)$ sa fie adevarata, inseamna ca fiecare membru al universului trebuie sa formeze pereche cu el insusi in extensia lui *p*.
  - Sa consideram U = {Paris}
  - extensia(p) = {<Paris, Paris>}
- q(d) trebuie sa fie fals, deci referentul lui *d* nu trebuie sa se afle in extensia lui *q*.
  - extensia(q) = $\varnothing$
  - referent(d) = Paris – e singurul membru din U
- Avem astfel un model partial – nu am definit si alte predicate sau constante, ci doar cele necesare.
- In acest model, propozitia data este falsa.

Constructia de modele

- Care ar putea fi semnificatia predicatelor si a constantelor in limbaj natural?
  - U = {Paris}
  - extensia(p) = {<Paris, Paris>}
  - extensia(q) = ∅
  - referent(d) = Paris
- Modelul partial ar putea corespunde unei astfel de interpretari:
  - U = {Paris}
  - p(x, y): x este in aceeasi tara ca si y
  - q(x): x a fost fondat in sec. XX
  - d: Orasul Luminilor

Constructia de modele

- Sa aratam ca $\forall x p(x, x) \rightarrow q(d)$ nu este o contradictie.
- Trebuie sa specificam un model in care fie $\forall x p(x, x)$ este fals, fie q(d) e adevarat si $\forall x p(x, x)$ este tot adevarat.
- Un astfel de model partial ar fi:
  - U = {Paris}
  - extensia(p) = {<Paris, Paris>}
  - extensia(q) = {Paris}
  - referent(d) = Paris
- Fiindca $\forall x p(x, x) \rightarrow q(d)$ nu este nici tautologie, nici contradictie inseamna ca este contingenta.
- In general, pentru a arata ca o propozitie este contingenta, va trebui sa specificam doua modele: unul in care sa fie adevarata si unul in care sa fie falsa.

Constructia de modele

- Sa aratam ca $\forall x s(x)$ si $\exists x s(x)$ nu sunt logic echivalente.
- Trebuie sa construim un model in care cele doua propozitii sa aiba valori diferite de adevar.
- De data aceasta, ne va trebui un univers cu cel putin doi membri.
- Daca am avea un singur membru, cele doua ar avea aceeasi valoare de adevar.
- Il putem face pe $\exists x s(x)$ adevarat incluzand ceva din univers in extensia lui s, iar pe $\forall x s(x)$ fals omitand ceva din univers in extensia lui s.
  - U = {Paris, Londra}
  - extensia(s) = {Paris}
- Acest model partial arata ca cele doua propozitii nu sunt logic echivalente.

Constructia de modele

$$\frac{(r(c) \wedge k_1(c)) \wedge t(c)}{t(c) \wedge k_2(c)}$$

- Sa revedem un rationament despre care am spus ca este invalid.
- Pentru a arata ca este invalid, trebuie construit un model in care premisele sa fie adevarate si concluzia falsa.
  - U = {Mihai}
  - extensia(t) = {Mihai}
  - extensia(k_1) = {Mihai}
  - extensia(k_2) = $\varnothing$
  - extensia(r) = {Mihai}
  - referent(c) = Mihai
- In mod similar, putem arata ca o multime de propozitii este consistenta, construind un model in care toate propozitiile sunt adevarate.

Rationand despre toate modelele

- Pentru a arata ca o propozitie nu este o tautologie, construim un model in care propozitia e falsa.
- Cum aratam insa ca o propozitie e o tautologie?
- Exista o infinitate de modele, nu putem sa le precizam pe toate, aratand ca propozitia e adevarata in cadrul lor.
- Putem lua insa, spre exemplu, propozitia r(a, a) $\leftrightarrow$ r(a, a) si sa aratam ca este o tautologie printr-un rationament simplu.
- Exista doua feluri de modele:
  - cele in care <referent(a), referent(a)> e in extensia lui r
  - si cele in care nu este.

Rationand despre toate modelele

$r(a, a) \leftrightarrow r(a, a)$

- Exista doua feluri de modele:
  - cele in care <referent(a), referent(a)> e in extensia lui R
  - si cele in care nu este.
- In consecinta:
  - In primul caz, r(a, a) e adevarat si, din tabelul de adevar pentru $\leftrightarrow$, $r(a, a) \leftrightarrow r(a, a)$ e adevarat.
  - In al doilea caz, r(a, a) e fals si, din tabelul de adevar pentru $\leftrightarrow$, $r(a, a) \leftrightarrow r(a, a)$ e adevarat.
  - Din moment ce propozitia e adevarata in oricare din cele doua tipuri posibile de model, inseamna ca e o tautologie.
- Cu toate acestea, rationamentul este facut intr-un metalimbaj si nu in logica predicatelor.

Rationand despre toate modelele

- Consideram o alta tautologie evidenta: $\forall x(r(x, x) \rightarrow r(x, x))$
- Am putea fi tentati sa rationam astfel:
  - $r(x, x) \rightarrow r(x, x)$ e adevarata in orice model, deci si $\forall x(r(x, x) \rightarrow r(x, x))$ trebuie sa fie adevarata.
  - Dar $r(x, x) \rightarrow r(x, x)$ nu e adevarata in orice model!
  - Ea nu reprezinta o propozitie, deci nu poate fi nici adevarata, nici falsa!
- Pentru a considera si formulele atomice care nu sunt propozitii, vom defini conceptul de satisfiabilitate.

Rationament / Constructie

Intrebare	DA	NU
Este A o tautologie?	Arata ca A este adevarata in orice model.	Construieste un model in care A e falsa.
Este A o contradictie?	Arata ca A este falsa in orice model.	Construieste un model in care A e adevarata.
Este A contingenta?	Construieste doua modele, unul in care A este adevarata si altul in care este falsa.	Arata ca fie A e o tautologie, fie o contradictie.
Sunt A si B echivalente?	Arata ca A si B au aceeasi valoare de adevar in orice model.	Construieste un model in care A si B au valori diferite de adevar.
Este multimea A consistenta?	Construieste un model in care toate propozitiile din A sunt adevarate.	Arata ca propozitiile nu pot fi toate adevarate in orice model.
Este deductia lui C din P valida?	Arata ca in orice model in care P e adevarata, C este adevarata.	Construieste un model in care P e adevarata si C falsa.

Satisfiabilitate

- Cum se interpreteaza o variabila libera, de exemplu x in p(x)?
- Vom introduce o asignare de variabile – o functie care realizeaza potrivirea intre fiecare variabila si un membru al universului U.
- **Def. 1**: O formula p(x) este satisfiabila intr-un model M de o asignare de variabile *a* daca si numai daca a(x), obiectul pe care *a* il asigneaza lui *x*, este in extensia lui p(x) in M.
- Cand este acum $\forall$xp(x) satisfiabil?
- Nu e suficient ca p(x) e satisfiabil in M pentru *a*:
  - Aceasta inseamna ca a(x) e in extensie(p).
  - $\forall$xp(x) necesita ca fiecare membru al lui U sa fie in extensie(p).

Satisfiabilitate

- **Def. 2**: Pentru fiecare membru *o* al universului *U* si fiecare variabila *x*, fie a[x|o] asignarea de variabile care atribuie *o* lui *x*, dar respecta in celelalte cazuri definitia lui *a*.

- Formal: $a[x|o](y) = \begin{cases} o, daca\ y = x \\ a(y), altfel \end{cases}$

- **Def. 3**: ∀xp(x) e satisfiabil intr-un model M de o asignare de variabile *a* daca si numai daca, pentru fiecare obiect *o* din universul U al lui M, p(x) e satisfiabila in M prin a[x|o].

Satisfiabilitate

- **Def. 4**: Definim o functie *s* intr-un model M astfel incat, pentru orice fbf A si asignare de variabile *a*, s(A, a) = 1 daca A e satisfiabil in M de a; altfel s(A, a) = 0.
- 1. Daca A este o fbf atomica de forma p(t_1, ..., t_n) si o_i este obiectul selectat de t_i, atunci

$$s(A, a) = \begin{cases} 1, \text{daca} < o_1, \dots, o_n > \text{este in extensie}(P) \text{ in } M \\ 0, \text{altfel} \end{cases}$$

- Pentru fiecare termen t_i:
  - Daca t_i este o constanta, atunci o_i = referent(t_i).
  - Daca t_i este o variabila, atunci o_i = a(t_i).

Satisfiabilitate

- 2. Daca A este $\neg$B, cu B fbf, atunci:

$$s(A,a) = \begin{cases} 1, daca\ s(B,a) = 0 \\ 0, altfel \end{cases}$$

- 3. Daca A este B $\wedge$ C, pentru B si C fbf, atunci:

$$s(A,a) = \begin{cases} 1, daca\ s(B,a) = 1\ si\ s(C,a) = 1 \\ 0, altfel \end{cases}$$

- 4. Daca A este B $\vee$ C, pentru B si C fbf, atunci:

$$s(A,a) = \begin{cases} 0, daca\ s(B,a) = 0\ sau\ s(C,a) = 0 \\ 1, altfel \end{cases}$$

- 5. Daca A este B $\rightarrow$ C, pentru B si C fbf, atunci:

$$s(A,a) = \begin{cases} 0, daca\ s(B,a) = 1\ si\ s(C,a) = 0 \\ 1, altfel \end{cases}$$

Satisfiabilitate

- 6. Daca A este B $\leftrightarrow$ C, pentru B si C fbf, atunci:

$$s(A,a) = \begin{cases} 1, daca\ s(B,a) = s(C,a) \\ 0, altfel \end{cases}$$

- 7. Daca A este $\forall$xB, pentru B fbf si variabila x, atunci:

$$s(A,a) = \begin{cases} 1, daca\ s(B,a[x|o]) = 1\ pentru\ fiecare\ membru\ o\ \in U \\ 0, altfel \end{cases}$$

- 8. Daca A este $\exists$xB, pentru B fbf si variabila x, atunci:

$$s(A,a) = \begin{cases} 1, daca\ s(B,a[x|o]) = 1\ pentru\ cel\ putin\ un\ membru\ o\ \in U \\ 0, altfel \end{cases}$$

Adevarul

- Sa consideram o propozitie simpla precum $\forall x p(x)$:
  - Din punctul 7 de la definitia satisfiabilitatii, propozitia e satisfiabila daca a[x|o] satisface p(x) in M pentru fiecare *o* din U.
  - Din punctul 1, aceasta se intampla daca fiecare *o* se afla in extensia lui *p*.
- Faptul ca $\forall x p(x)$ e satisfiabil sau nu depinde de asignarea particulara de variabile *a*.
- Daca aceasta propozitie e satisfiabila, atunci ea este adevarata.
- Astfel formalizam faptul ca $\forall x p(x)$ e adevarata daca toate elementele din U sunt in extensia lui *p*.

Adevarul

- Asadar, in cazul fiecarei propozitii din logica predicatelor, din motivul ca toate variabilele sunt legate, aceasta este satisfiabila sau nu indiferent de detaliile asignarii de variabile.
- **Def. 5**: O propozitie A este adevarata in M daca si numai daca vreo asignare de variabile satisface pe A in M; altfel, A este falsa in M.
- Sa vedem acum cum putem folosi notiunile de satisfiabilitate si adevar pentru a realiza un rationament unde sunt implicate o infinitate de modele.

Demonstrati ca $\forall x(r(x, x) \rightarrow r(x, x))$ este o tautologie.

- Sa consideram un model arbitrar M si un membru *o* arbitrar din U.
  - Daca <o, o> se afla in extensia lui *r*, atunci r(x, x) este satisfiabil de asignarea de variabile care il atribuie pe *o* lui *x* (punctul 1 din def. 4).
    - Din moment ce consecinta lui $r(x, x) \rightarrow r(x, x)$ este satisfiabila, implicatia este satisfiabila (punctul 5).
  - Daca <o, o> nu se afla in extensia lui *r*, atunci r(x, x) nu este satisfiabil de asignarea de variabile care il atribuie pe *o* lui *x* (punctul 1).
    - Din moment ce conditia lui $r(x, x) \rightarrow r(x, x)$ este nesatisfiabila, implicatia este satisfiabila (punctul 5).

Demonstrati ca $\forall x(r(x, x) \rightarrow r(x, x))$ este o tautologie.

- $r(x, x) \rightarrow r(x, x)$ este satisfiabila pentru fiecare membru din U, deci $\forall x(r(x, x) \rightarrow r(x, x))$ este satisfiabila de orice asignare de variabile (punctul 7).
- Deci $\forall x(r(x, x) \rightarrow r(x, x))$ este adevarata in M (def. adevarului), pentru orice U si extensie a lui r, deci e adevarata in orice model, fiind asadar o tautologie.

Demonstrati ca $\forall x h(x)$ se deduce din $\forall x(h(x) \wedge j(x))$.

- Sa consideram un model arbitrar M in care premisa $\forall x(h(x) \wedge j(x))$ este adevarata (vezi tabel).
  - Conjunctia $h(x) \wedge j(x)$ e satisfiabila indiferent de asignarea pentru x, asadar asa este si h(x) (punctul 3 din def. 4).
  - Deci $\forall x h(x)$ este satisfiabila de orice asignare de variabile (punctul 7) si adevarata in M (def. adevarului).
  - M fiind arbitrar ales, rezulta ca $\forall x h(x)$ este adevarata in orice model in care $\forall x(h(x) \wedge j(x))$ e adevarata.
  - Deci $\forall x(h(x) \wedge j(x)) \vDash xh(x)$.
  - Chiar si pentru argumente simple, rationamentul e complicat.
  - Pentru a contracara acest aspect, vom studia in cursul urmator sistemele de demonstratie.

Exercitii

- 1. Determinati daca fiecare propozitie este adevarata sau falsa in modelul dat:
  - U = {Cristi, Alin}
  - Extensia(p) = {Cristi, Alin}
  - Extensia(q) = {Alin}
  - Extensia(r) = $\varnothing$
  - Referent(c) = Cristi

1. $q(c)$
2. $p(c) \leftrightarrow \neg r(c)$
3. $r(c) \rightarrow (p(c) \vee q(c))$
4. $\forall x p(x)$
5. $\forall x \neg q(x)$
6. $\exists x(p(x) \wedge q(x))$
7. $\exists x q(x) \rightarrow \forall x p(x)$

Exercitii

- **2.** Determinati daca fiecare propozitie este adevarata sau falsa in modelul dat:
  - U = {Cristi, Mihai, Ionut}
  - extensia(p) = {Cristi, Mihai, Ionut}
  - extensia(q) = {Cristi, Mihai}
  - extensia(r) = {<Cristi, Mihai>, < Mihai, Ionut>, <Ionut, Cristi>}
  - referent(c) = Ionut

1. $\exists x(r(x, c) \wedge r(c, x))$
2. $\forall x(p(x) \leftrightarrow q(x))$
3. $\forall x(r(x, c) \rightarrow q(x))$
4. $\forall x(q(x) \rightarrow (p(x) \wedge q(x)))$
5. $\forall x \forall y r(x, y)$
6. $\forall x \forall y(r(x, y) \vee r(y, x))$

Exercitii

- **3.** Determinati daca fiecare propozitie este adevarata sau falsa in modelul dat:
  - U = {Tiberiu, Cristina, Edi}
  - extensia(p) = {Tiberiu, Cristina, Edi}
  - extensia(q) = {Cristina}
  - extensia(r) = {Tiberiu, Edi}
  - referent(c) = Cristina
  - referent(e) = Edi

1. $q(c)$
2. $q(e)$
3. $r(c) \vee r(e)$
4. $r(c) \to p(c)$
5. $\exists x(p(x) \wedge q(x))$
6. $\exists x q(x) \wedge \exists x r(x)$
7. $\forall x(q(x) \leftrightarrow \neg r(x))$
8. $\forall x \exists y(p(x) \wedge q(y))$

Exercitii

- 4. Scrieti modelul care corespunde la urmatoarea interpretare:
- U: numere naturale de la 10 la 13
- p(x): x este impar
- q(x): despre x se spune ca poarta ghinion
- r(x, y): x este urmatorul numar dupa y
- s(x): x este mai mic decat 9
- t(x): x este un numar format din doua cifre

Exercitii

- 5. Aratati ca fiecare din urmatoarele este contingent:
  - $p(a) \wedge p(b)$
  - $\exists x(t(x, c))$
  - $p(c) \wedge \neg \forall x p(x)$
  - $\exists x(p(x) \rightarrow \forall y q(y))$

Exercitii

- 6. Aratati ca urmatoarele perechi de propozitii nu sunt logic echivalente:
  - $p(a)$, $q(a)$
  - $\exists x p(x)$, $p(x)$
  - $\forall x r(x, x)$, $\exists x r(x, x)$
  - $\exists x p(x) \rightarrow q(x)$, $\exists x (p(x) \rightarrow q(x))$
  - $\forall x \exists y r(x, y)$, $\exists x \forall y r(x, y)$

Exercitii

- 7. Aratati ca urmatoarele multimi de propozitii sunt consistente:
  - $\{p(a), \neg q(a), r(a), \neg s(a)\}$
  - $\{p(c, c), p(c, a), \neg p(a, c), \neg p(a, a)\}$
  - $\{p(a) \vee p(b), p(a) \rightarrow \forall x \neg p(x)\}$
  - $\{\exists x(q(x) \vee p(x)), \forall x \neg r(x), \forall x[(p(x) \wedge q(x)) \rightarrow r(x)]\}$

Exercitii

- 8. Construiti modele pentru a arata ca urmatoarele rationamente sunt nevalide:

$$\frac{\forall x(p(x) \rightarrow q(x))}{\exists x q(x)}$$

$$\frac{\forall x(p(x) \rightarrow q(x)) \qquad \forall x(p(x) \rightarrow r(x))}{q(x) \land r(x)}$$

$$\frac{p(a) \qquad p(b) \qquad p(c)}{\forall x p(x)}$$

$$\frac{q(a, b) \rightarrow \forall x q(x, b) \qquad \exists x q(x, b)}{q(b, b)}$$