Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series
Volume 44(2), 2017, Pages 173–178
ISSN: 1223-6934

Do we need Mathematics?

Gheorghe Moroşanu

AVEM NEVOIE DE MATEMATICĂ?

Menţionez de la bun început că ceea ce voi spune se adresează publicului larg, evitând informaţii şi formulări excesiv de riguroase.

Matematica, în formele ei elementare, s-a născut probabil chiar înainte de apariţia scrierii şi a coexistat cu societatea umană încă de la începuturi. Era necesară la măsurarea suprafeţelor cultivate, la gestionarea bunurilor, în activităţile comerciale etc. Ne putem închipui că, atunci când au aparut mulţimi tot mai mari de bunuri materiale, au apărut imediat şi *sistemele de numeraţie*.

Se consideră că începuturile matematicii mai avansate sunt în Egiptul antic (după cum afirma Aristotel (384–322, î. Hr.), elev al lui Platon (428/427 sau 424/423–348/347, î. Hr.), profesor al lui Alexandru Macedon (356–323, î. Hr.)).

De la egipteni moştenim în particular *sistemul de numeraţie zecimal*, astăzi valabil în toată lumea (au existat şi alte sisteme de numeraţie; de exemplu, sumerienii foloseau sistemul de numeraţie cu baza 60).

Egiptenii au inventat (în mileniul IV, î. Hr.) cel mai bun calendar din antichitate, care a fost apoi folosit în timpul lui Iulius Cesar (Gaius Iulius Caesar, aprox. 100–44, î. Hr.) la crearea calendarului iulian.

Pentru construcţii (inclusiv a piramidelor) şi pentru măsurarea pamântului egiptenii foloseau lungimile de 3, 4 şi 5 unităţi pentru construirea unghiului drept (în limbajul actual, putem spune că era vorba despre folosirea reciprocei teoremei lui Pitagora (Samos, 570-495, î. Hr.)).

Desigur, se poate vorbi despre multe cunoştinţe de matematică elementară şi astronomie, acumulate de-a lungul antichităţii, nu numai in Egipt, ci şi în Mesopotamia, India, China, Grecia antică.

Oricum, la începuturile ei, matematica (se pare că primul care a folosit termenul *matematica* a fost Pitagora, însemnând *ceea ce se învaţă*) s-a dezvoltat ca o **necesitate a societăţii umane**. Folosirea matematicii, în forme mai mult sau mai puţin avansate, pentru rezolvarea unor probleme practice, a continuat mereu şi va continua şi în viitor. Este vorba despre ceea ce numim azi **matematici aplicate**.

Însă omul nu se mulţumeşte să-şi asigure doar existenţa. În perioade de linişte şi prosperitate, oamenii au simţit nevoia de spiritualitate, în particular de filosofie şi artă. Matematica, în forme din ce în ce mai avansate, a mers împreună cu filosofia, care în antichitate îngloba toate ştiinţele. De exemplu, Pitagora spunea ca *totul este*

Original title "Avem nevoie de matematică?". This dissertation has been given at the ceremony of awarding the DOCTOR HONORIS CAUSA title of the University of Craiova to Professor GHEORGHE MOROŞANU, from Central European University, Budapest & Babeş-Bolyai University, Cluj-Napoca, on October 20, 2017, at University of Craiova.

număr şi că universul este discret; a întemeiat o şcoală, încercând să explice ştiinţa, filosofia şi chiar religia prin intermediul numerelor. În particular, a descoperit teorema referitoare la triunghiuri dreptunghice care îi poartă numele. Se spune că, pentru a sărbători această descoperire, a jertfit un taur.

Cei care se ocupau cu matematica au început să întâlnească probleme dificile. De exemplu, au observat că diagonala unui pătrat şi latura sa sunt segmente incomensurabile; astfel, lungimea diagonalei unui pătrat cu latura unitate nu poate fi exprimată cu un numar raţional (o fracţie de numere întregi); astăzi ştim că e vorba de rădăcina pătrată a lui 2, sau radical din 2, notat $\sqrt{2}$, un număr care nu este raţional şi e numit *iraţional*. În mod similar, lungimea cercului cu diametrul unitate este un număr iraţional, cunoscut acuma ca fiind numărul π.

Faptul că numerele raţionale nu pot exprima întotdeauna mărimi din lumea reală a creat o mare problemă. Se simţea nevoia extinderii mulţimii numerelor raţionale (notată cu $\mathbb{Q}$) la o mulţime de numere mai amplă care să poată fi folosită în orice fel de problemă practică. Astăzi se cunoaşte că o asemenea mulţime este *mulţimea numerelor reale*, notată de regulă cu $\mathbb{R}$. În acelaşi timp, era şi o problemă teoretică, care se incadrează în ceea ce numim azi **matematică pură**. Construcţia riguroasă (axiomatică) a numerelor reale (ca un corp ordonat complet) a venit foarte târziu, abia în secolul al XIX-lea. $\mathbb{R}$ se defineşte ca o completare a lui $\mathbb{Q}$ (satisfacând aşa-numita axiomă a completitudinii), adăugându-se la $\mathbb{Q}$ o mulţime amplă, aceea a numerelor iraţionale. Există mai multe modele pentru $\mathbb{R}$, de exemplu, modelele create de Cantor–Méray, Dedekind, Stolz–Weierstrass (Georg Cantor, 1845-1918, german; Charles Méray, 1835-1911, francez; Richard Dedekind, 1831-1916, german; Otto Stolz, 1842-1905, austriac; Karl Weierstrass, 1815-1897, german), toate echivalente între ele. În particular, modelul lui Cantor-Méray se bazează pe şiruri Cauchy de numere raţionale (Augustin Louis Cauchy, 1789–1857, francez). Un şir de numere raţionale $(r_1, r_2, ..., r_n, ...)$ este Cauchy dacă $|r_n - r_m|$ devine oricât de mic dorim pentru n, m suficient de mari. Pe scurt, *limitele* tuturor acestor şiruri compun mulţimea $\mathbb{R}$ (noţiunea de limită este amintită puţin mai jos).

Orice numar raţional r se obţine ca limita şirului constant $(r, r, ...)$. Dacă se consideră, de exemplu, şirul definit prin

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{2}{x_n}\big), \quad n = 1, 2, ... ,$$

acesta este un şir Cauchy de numere raţionale, limita sa fiind soluţia pozitivă a ecuaţiei $x^2 = 2$, adică $\sqrt{2}$. De fapt, există mai multe şiruri Cauchy cu aceeaşi limită, astfel încât, în modelul lui Cantor–Méray, un element se identifică cu clasa tuturor şirurilor de numere raţionale *echivalente* în sens Cauchy. Amintim că $(r_1, r_2, ..., r_n, ...)$, $(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, ..., \tilde{r}_n, ...)$ sunt echivalente în sens Cauchy dacă $|r_n - \tilde{r}_n|$ devine oricât de mic dorim pentru orice n suficient de mare. Această identificare a unui element (număr) cu un şir Cauchy, mai exact cu clasa sa de echivalenţă, este necesară deoarece nu se poate defini un număr prin el însuşi. Cred că s-a înţeles deja ideea de construire a lui $\mathbb{R}$ ca o completare a lui $\mathbb{Q}$. Nu intrăm în alte amănunte.

Pentru înţelegerea modelului avem nevoie de conceptul de *infinit*, care este esenţial în *analiza matematică*. În particular, limita unui şir Cauchy de numere raţionale $(r_1, r_2, ..., r_n, ...)$ este numărul (unic) de care se apropie r_n pentru n suficient de mare (adică, pentru n tinzând la infinit). În prezent, conceptul de infinit este acceptat şi folosit în mod uzual. Însă, începând din antichitate până târziu, în secolul XIX, au existat dispute aprinse asupra acestui concept. Unul dintre paradoxurile lui Zenon (enunţat cam pe la anul 450, î. Hr.) spunea aşa: ca să ajungi dintr-un punct A în alt punct, B (distanţa dintre cele două puncte fiind cunoscută, să zicem d unităţi de lungime), trebuie să parcurgi întâi jumătate din distanţă, adică $d/2$, apoi jumătate din distanţa rămasă, adică $d/4$, apoi $d/8$ ş. a. m. d. Conform acestui raţionament, în concepţia lui Zenon, nu vei putea ajunge niciodată în punctul B, pentru că mereu rămâne o distanţă care trebuie parcursă. Fiind un număr nelimitat de distanţe de parcurs se credea atunci ca *suma* timpilor necesari parcurgerii acestor distanţe se tot măreşte, deci punctul B nu poate fi niciodată atins. De fapt, în limbajul de astăzi, considerând că viteza de deplasare este egală cu unitatea (ceea ce nu retrânge generalitatea), avem de fapt o serie (geometrică) convergentă,

$$d/2 + d/4 + d/8 + \cdots = d\,,$$

deci punctul B se poate atinge în timp finit (adică, distanţa d poate fi acoperită). Remarcăm că, în această explicaţie, se foloseşte esenţial conceptul de infinit, mai exact avem o sumă infinită (serie), sumele sale parţiale constituind un şir cu limita d.

Un paradox similar, formulat tot de Zenon, spune că Ahile nu poate ajunge niciodată o broască ţestoasă, deşi evident Ahile merge mai repede. Anume, să zicem că iniţial Ahile se află în punctul A, iar broasca în punctul B; Ahile parcurge distanţa AB, timp în care broasca parcurge o distanţa mai mică, BC; apoi, Ahile parcurge distanţa BC, timp în care broasca parcurge o distanţă mai mică, CD ş. a. m. d. Zenon concluzionează că Ahile nu ajunge broasca niciodată, deoarece pentru el ramâne mereu o distanţă de parcurs pentru a ajunge la broască. Se rezolvă şi acest paradox uşor folosind noţiunea de infinit (de fapt, noţiunea de serie). Aşadar, paradoxurile discutate nu sunt cu adevărat paradoxuri.

În general, prin **matematică pură** se înţelege acea parte a matematicii care nu are legătură directă cu experienţa practică a omului. Ca şi filosofia, are existenţa ei proprie şi se dezvoltă independent de societate, cel puţin în prima instanţă. Adevărurile matematice sunt acolo, aşteaptă să fie descoperite, rând pe rând.

În particular, este cunoscută istoria postulatului al V-lea al lui Euclid (Sec. IV-III, î. Hr., grec), al paralelelor, despre care s-a crezut multă vreme că este o teoremă care ar rezulta din celelate postulate/axiome ale lui Euclid. Abia în prima jumătate a secolului XIX, Janos Bolyai (n. la Cluj, 1802-1860, maghiar) şi Nikolai Lobacevski (1792-1856, rus) au arătat, în mod independent şi aproape în acelaşi timp, că este vorba de o axiomă. Prin negarea acestei axiome se obţin geometrii diferite de cea clasică (euclidiană), numite geometrii ne-euclidiene. Evident, crearea geometriilor ne-euclidiene ţine de matematica pură. La bază a stat efortul de a clarifica dacă postulatul paraleleor este teoremă sau axiomă. Totuşi, chiar Lobacevski spunea că *nu există nici un domeniu al matematicii, oricât de abstract, care să nu se aplice cândva la fenomene din lumea reală*. În particular, geometria hiperbolică (neeuclidiană) a fost folosită mai târziu (în 1916) de Einstein (Albert Einstein, 1879-1955) la formularea teoriei generalizate a relativităţii.

De fapt, se poate spune că unele părţi ale matematicii sunt mai aproape de aplicaţii decât altele şi că nu există o frontieră precisă între matematica pură şi cea aplicată.

Uneori aplicaţiile conduc la rezultate teoretice semnificative, alteori teorii matematice îşi găsesc ulterior aplicaţii importante.

În matematică se întâlneşte deseori noţiunea de *spaţiu liniar (vectorial)*. Un exemplu simplu este mulţimea vectorilor liberi din spaţiul fizic. Această mulţime, notată de exemplu cu V_3, formează un spaţiu liniar (în raport cu operaţiile uzuale: adunarea vectorilor şi înmulţirea cu scalari). Orice vector $\mathbf{v}$ poate fi caracterizat de un triplet ordonat $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, numerele x, y, z fiind coordonatele lui $\mathbf{v}$ în raport cu un sistem cartezian dat (după numele lui René Descartes, latinizat Cartesius (1596–1650), matematician şi filosof francez). Se spune ca Descartes a inventat sistemul de coordonate (care îi poartă numele) când stătea în pat (fiind bolnav), încercând să găsească o modalitate de a caracteriza poziţia unei muşte care zbura prin cameră. Aşa s-a ajuns la crearea geometriei analitice. Astfel, spaţiul V_3 poate fi identificat cu $\mathbb{R}^3$. Orice vector (triplet ordonat) $\mathbf{v} \equiv (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se poate exprima ca o combinaţie liniară de vectorii $\mathbf{i}= (1, 0, 0)$, $\mathbf{j}= (0, 1, 0)$, $\mathbf{k}= (0, 0, 1)$: $\mathbf{v}= x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$. Se spune că $B = \{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ este o bază în $V_3 \equiv \mathbb{R}^3$ şi dimensiunea acestui spaţiu este 3. Astfel, dimensiunea definită în acest fel coincide cu imaginea intuitivă a tri-dimensionalităţii spaţiului fizic. Când vorbim însă de dimensiuni mai mari, deja apare o rezistenţă din partea publicului larg, deoarece în acest caz nu ne mai putem baza pe ceea ce se poate vizualiza prin desen. Totuşi nu este dificil de înţeles. Iată, să considerăm acum mulţimea polinoamelor cu coeficienţi numere reale, de grad cel mult 9, să zicem. Orice asemenea polinom poate fi identificat cu un vector cu zece componente, coeficienţii polinomului. Deci acest spaţiu se poate identifica cu $\mathbb{R}^{10}$ si are dimensiunea 10, o bază fiind $\{(1, 0, 0, ..., 0), (0, 1, 0, ..., 0), ..., (0, 0, ..., 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^{10}$.

În general, se pot imagina diverse spaţii vectoriale cu dimensiunea n, adică spaţii finit-dimensionale. Mai mult, se pot defini chiar spaţii infinit dimensionale. De exemplu, mulţimea tuturor polinoamelor (de orice grad) cu coeficienţi reali este un asemenea spaţiu: orice asemenea polinom se poate identifica cu un şir de numere reale $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, ...)$ şi o bază în acest spaţiu este $\{(1, 0, 0, ...), (0, 1, 0, 0, ...), (0, 0, 1, 0, 0, ...), ...\}$. Fără să intrăm în detalii, menţionăm că tot spaţii infinit dimensionale sunt spaţiile Lebesgue şi spaţiile Sobolev, care sunt foarte utile în rezolvarea problemelor legate de ecuaţii cu derivate parţiale (de exemplu, ecuaţia căldurii, ecuaţia undelor, sistemul Navier-Stokes etc.).

Pentru exemplificare, ecuaţiile Navier-Stokes modelează multe fenomene din mecanica fluidelor, cum ar fi: mişcarea curenţilor atmosferici, curgerea aerului în jurul unei aripi de avion, curgerea sângelui prin vene etc. În particular, ecuaţiile Navier-Stokes se folosesc la proiectarea avioanelor. Atunci când călătorim cu un transatlantic, apreciem performanţele piloţilor, ceea ce este natural. Dar trebuie sa fim conştienţi că principalii autori sunt fizicienii, inginerii şi matematicienii care au contribuit la realizarea acestor aparate de zbor excepţionale. Acesta este doar un exemplu de felul cum ştiinţa, în particular matematica, vine în sprijinul societăţii umane.

De menţionat că studiul problemelor Navier-Stokes (formulate în secolul XIX) nu este complet, în sesul că existenţa şi unicitatea soluţiilor nu este cunoscută în cazul general. Demonstrarea acestor fapte ar aduce certitudine şi inţelegere completă a fenomenelor respective. Datorită importanţei deosebite, această problemă a fost inclusă pe o listă de şapte probleme deschise ale mileniului nostru (*Millenium Prize Problems*), propuse de Clay Mathematics Institute. Premiile (în valoare de câte un milion dolari pentru fiecare din cele 7 probleme) au fost anunţate la o întalnire din 2000 de la College de France (Paris).

Menţionăm că una din cele 7 probleme a fost deja rezolvată în 2002 de Grigori Perelman (Sankt Petersburg, n. 1966), care refuză premiul de 1 milion de dolari (în treacăt fie spus, Perelman refuză - în 2006 - şi medalia Fields, premiu pentru matematică, considerat echivalent cu Premiul Nobel, care nu se oferă pentru matematică). Este vorba de conjectura lui Poincaré (Henri Poincaré, 1854-1912, matematician francez) formulată în 1904, care spune că: orice varietate tridimensională închisă şi simplu conexă este homeomorfă (adică, echivalentă topologic) cu sfera tridimensională. Celelalte 6 probleme nu sunt încă rezolvate.

Mai sunt şi alte probleme deschise celebre, care nu sunt incluse în lista celor 7 probleme ale mileniului, spre exemplu, conjectura lui Goldbach (propusă de germanul Christian Goldbach în 1742 şi inlocuită de Euler (Leonhard Euler, 1707-1783, matematician elveţian) cu o variantă mai tare: orice număr par > 2 se poate scrie ca suma a două numere prime. În ciuda simplităţii enunţului, ea nu a fost încă rezolvată.

O altă problermă celebră, care a fost însă rezolvată, este Marea Teoremă a lui Fermat (Pierre de Fermat, 1607-1665), enunţată în 1637: pentru orice n număr întreg > 2, nu există nici un triplet de numere întregi pozitive (x, y, z) care să verifice ecuaţia $x^n + y^n = z^n$. Deşi enunţul e foarte uşor de înţeles pentru oricine, conjectura aceasta a rezistat 357 ani, fiind rezolvată în 1994 de englezul Andrew Wiles (acesta fiind recompensat, în 2016, de Academia Norvegiană de Ştiinţe şi Litere cu Premiul Abel (după numele matematicianului norvegian Niels Henrik Abel, 1802-1829), în valoare de aprox. 700 mii dolari). De fapt Wiles anunţase soluţia în 1993, ca o parte a unei teorii mai generale, dar s-a dovedit imediat că soluţia sa avea o eroare. Wiles a reuşit să dea soluţia completă în anul următor. Desigur, presa vremii a discutat mult acest subiect de interes maxim, nu numai pentru matematicieni, ci şi pentru publicul larg. Menţionăm că cercetările pentru demonstrarea Marii Teoreme a lui Fermat au condus la crearea unui nou domeniu în matematică, anume teoria algebrică a numerelor.

Matematica exercită o atracţie deosebită pentru mulţi şi satisfacţiile provocate de descoperirile matematice sunt poate mai puternice decât cele care însoţesc creaţiile muzicale, literare etc. De altfel, matematica nu este incompatibilă cu literatura şi arta. Se ştie că Eminescu a avut înclinaţii, nu numai spre filosofie, ci şi spre matematică (mai ales în ultimii ani de viaţă). Ion Barbu (Dan Barbilian) a creat atât în matematică, cât şi în poezie. Regretatul Cezar Avramescu, fost membru al Departamenului de Matematică al Universităţii din Craiova, a fost nu numai un matematician distins, dar şi jurnalist şi poet, continuând tradiţia lui Ion Barbu.

Uneori matematica poate să inspire creaţii artistice. Cunosc un pictor, Victor Foca (Botoşani), care foloseşte în picturile D-sale *secţiunea de aur* (sau *secţiunea divină*) precum şi diverse forme geometrice regulate pentru a descrie - în concepţia D-sale - universul iniţial perfect.

Matematica nu este incompatibilă nici cu religia. Există matematicieni, chiar în zilele noastre, care cred în Dumnezeu. Unii consideră ca adevărurile matematice sunt de inspiraţie divină. De exemplu, Srinivasa Ramanujan (1887-1920, matematician indian) spunea ca Dumnezeu îi dezvăluia teoremele pe care le enunţa (majoritatea rezultatelor sale fiind legate de teoria numerelor).

Mai mult, unii consideră că matematica este o cale spre Dumnezeu: frumuseţea şi perfecţiunea ei poate induce transcedenţa spre lumea divină.

Matematica este una din principalele discipline în şcoală, jucând un rol important şi în înţelegerea altor discipline. În plus, matematica, inclusiv elementele de logică aferente, are un rol formator în educaţia copiilor.

În incheiere, putem spune că matematica este utilă societăţii umane şi este minunată ca regină a ştiinţelor, cum o numea Gauss (Carl Friedrich Gauss, 1777–1855, matematician, fizician şi astronom german); aduce beneficii imense si produce satisfacţii extraordinare celor care îi calcă pragul. Iubirea de matematică îi traspune pe cei împătimiţi într-o lume minunată, o adevarată grădină spirituală a raiului.

(Gheorghe Moroşanu) Central European University, Budapest, Hungary
& Babeş-Bolyai University, Cluj-Napoca, Romania