Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser.
Volume 30, 2003, Pages 53–62
ISSN: 1223-6934

Etalabilité - Vulnérabilité

Abdes-Samed Bernoussi et Mina Amharref

Résumé. La notion d'étalabilité a été introduite pour étudier certains phénomènes à expansion spatiale dans le temps. Ce travail est motivé par des problèmes de l'environnement et de la pollution. Un système est dit $\mathcal{P}$-étalable pendant un intervalle de temps I si la famille ω_t, des points où l'état du système satisfait une certaine propriété $\mathcal{P}$ donnée, est croissante dans le temps. Une extension a été donnée dans [6] en considérant la mesure des domaines ω_t. Diverses relations avec la notion d'évolution du front et une application à la dynamique de population ont été étudiées dans [4, 5]. Dans le cas d'une migration d'un produit polluant, la notion de vulnérabilité a été introduite pour déterminer les zones susceptibles d'être atteintes par cette pollution [2, 3]. Dans ce travail, nous étudions certaines relations entre ces deux notions (étalabilité et vulnérabilité). Une application en hydrogéologie est donnée.

Classification AMS 2000 des sujets. 37N99, 93A30, 93B99.
Mots clef et phrases. systèmes distribués, etalabilité, vulnérabilité, hydrogéologie.

1. Introduction/Motivation

Les problèmes de sauvegarde et de gestion des ressources en eaux sont devenus de plus en plus pressants. Les besoins en ces ressources, toujours croissants, augmentent malheureusement les risques de les perdre. En effet, les activités à la surface sol ne cessent de s'accroître augmentant ainsi la consommation en eaux et les rejets des polluants. Cela augmente alors le risque de contamination de ces ressources. La notion de vulnérabilité à été utilisée pour déterminer les zones susceptibles d'être atteintes par la pollution. Concrètement, considérons un domaine Ω qui contient une nappe souterraine localisée en σ (figure 1). A cause des activités à la surface, et grâce à la recharge il y'aurait une infiltration des produits polluants vers la nappe σ à partir de la zone polluée ω_0. Le problème est alors de déterminer les zones vulnérables à cette pollution. Nous retrouvons alors le problème de l'étalabilité. En effet la notion d'étalabilité a été introduite pour étudier certains phénomènes à expansion spatiale dans le temps. Un système est dit $\mathcal{P}$-étalable pendant un intervalle de temps I si la famille ω_t, des points où l'état du système satisfait une certaine propriété $\mathcal{P}$ donnée, est croissante dans le temps. Une extension a été donnée dans [6] en considérant la mesure des domaines ω_t. En effet nous dirons que le système est étalable au sens des aires (ou $\mathcal{A}$-étalable) si au cours de l'évolution du système la mesure des domaines que l'on gagne est plus importante que celle que l'on perde. Diverses relations avec la notion d'évolution du front et des applications à la dynamique de population et d'évolution des épidémies ont été étudiées dans [4, 5]. Le problème de la migration d'un produit polluant peut être vu comme un problème d'étalabilité. En effet il suffit de considérer que la propriété $\mathcal{P}$ est équivalente à ce que la concentration en produit

Reçu: le 11 décembre 2002.

polluant au point x à l'instant t est supérieure à une concentration minimal c^*. Le domaine ω_t est alors l'ensemble des points où cette propriété est satisfaite à l'instant t. Intuitivement, la zone σ serait vulnérable à la pollution s'il exite un instant t au bout duquel les domaines ω_t atteignent σ. Cela dépond aussi de la capacité de la zone σ de "resister" à cette contamination. Dans ce cas divers autres problèmes se posent tels que "le degré" de vulnérabilité et le comportement "asymptotique" du système étudié.

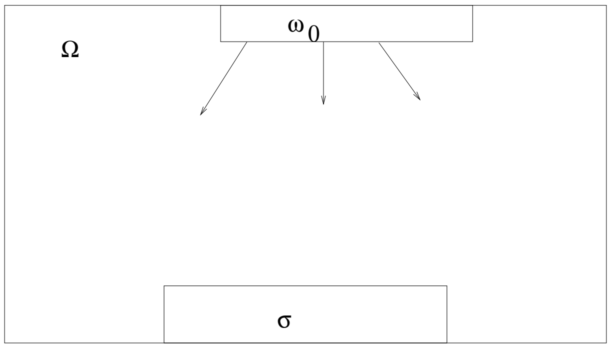

FIG. 1 –. *Région ciblée et vulnérabilité*

Le but de ce travail est d'étudier certaines relations entre ces deux notions. Nous commençons par un rappel de la notion d'étalabilité. Ensuite nous allons étudier certaines relations entre l'étalabilité et la vulnérabilité. En dernière partie et comme application nous allons étudier un exemple en hydrogéologie à savoir la vulnérabilité à la pollution des eaux souterraines.

2. Etalabilité

Considérons un système dynamique, (S), définit sur $\Omega \subset R^n$ $(n = 1{,}2$ ou $3)$ dont l'état est noté par $z(x,t) = z(x,t,t_0,z_0)$, $t \geq t_0$, $x \in \Omega$, $z_0(x) = z(x,t_0)$ est l'état initial à l'instant initial t_0. Nous considérons la propriété d'évolution suivante :

$$z(x,t,t_0,z_0) = z(x,t,s,z(\cdot,s,t_0,z_0)), \quad t_0 \leq s \leq t. \tag{1}$$

Posons ω_t l'ensemble des points $x \in \Omega$, où l'état du système $z(x,t)$ satisfait à l'instant t, une certaine propriété $\mathcal{P}$, donnée

$$\omega_t = \omega_t(t_0,z_0;\mathcal{P}) = \{x \in \Omega \mid \mathcal{P}z(x,t,t_0,z_0)\}. \tag{2}$$

Nous nous interessons à l'évolution dans le temps des domaines ω_t.

2.1. Etalabilité au sens de l'inclusion. Nous commençons par rappeller la définition de l'étalabilité telle qu'elle a été donnée dans [7]. On se donne une certaine propriété $\mathcal{P}$, et on considére les domaines ω_t définis comme dans (2).

Définition 2.1. • *Le système (S) est dit $\mathcal{P}$-étalable (réspectivement strictement étalable) à partir de ω_{t_0} pendant l'intervalle de temps $I = [t_0,T]$ $(T > t_0)$ si la famille des ensembles $(\omega_t)_{t \in I}$ est croissante (respectivement strictement croissante) au sens de l'inclusion, i.e. $\omega_s \subset \omega_t, 0 \leq s \leq t \leq T$.*

• *Le système* (S) *est dit* $\mathcal{P}$*-résorbable si la famille des domaines* $(\omega_t)_{t\in I}$ *est décroissante.*

• *Dans le cas particulier où* $\mathcal{P}$ *est la propriété* $z(x,t) = 0$ *, le système* (S) *est dit nul-étalable.*

Dans [7] divers exemples ont été étudiés et une caractérisation des systèmes étalables à l'aide d'une équation non linéaire a été donnée. Nous donnons maintenant une extension de la définition de l'étalabilité telle qu'elle a été introduite par A. Bernoussi, 1998 [6, 5].

2.2. La $\mathcal{A}$-étalabilité. Au lieu de considérer une croissance au sens de l'inclusion des domaines ω_t comme dans la définition 2.1, dans cette partie, on s'interesse à la mesure des domaines $(\omega_t)_{t\in I}$. Nous considérons la mesure de Lebesgue

$$\mu\,(\omega_t) = \int_{\omega_t} dx.$$

Il est claire que l'étalabilité dépend de la nature du domaine initial ω_{t_0} et il est possible d'avoir l'étalabilité à partir d'un domaine initial de mesure nulle ($\mu\,(\omega_{t_0}) = 0$), comme c'est le cas par exemple où ω_{t_0} est réduit à un point b, $b \in \Omega$ [6].

Définition 2.2. *Le système* (S) *est dit* $\mathcal{A}$*-étalable (ou étalable au sens des aires) à partir de* ω_{t_0} *pendant l'intervalle de temps* $I = [t_0,T]$, $T > t_0$*, si :*

$$\mu\,(\omega_t \setminus \omega_s) \geq \mu(\omega_s \setminus \omega_t) \;\; \forall t\,,s,\;\; t_0 \leq s \leq t \leq T.$$

Remarque 2.1. *Cette définition veut dire que lors de l'évolution du système ce que l'on gagne est plus important que ce que l'on perde. Dans le cas d'un domaine* Ω *de mesure finie, cela est équivalent à ce que la mesure des domaines* ω_t *est croissante. Dans le cas général ce n'est pas toujours vraie, voir* [6].
Il est claire que tout système étalable (au sens de l'inclusion) est $\mathcal{A}$*-étalable. La réciproque n'est pas vraie en général, voir* [5].

Exemple 2.1. *Considérons le système :*

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial t}(x,t) = b(x,t)z(x,t) \quad t > 0,\, x < a \\ z(x,0) \;=\; z_0(x) \;=\; h(x+1) \end{array}\right. \tag{3}$$

avec

$$h(x) = \left\{\begin{array}{ll} exp\left(-\dfrac{1}{1-x}\right) & si \;\; 0 < x < 1 \\ 0 & si \;\; 1 \leq x \leq 2 \\ exp\left(\dfrac{1}{2-x}\right) & si \;\; x > 2 \end{array}\right.$$

et

$$b(x,t) = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{1}{(x-t)^2} & si \;\; 0 < x < t \\ 0 & si \;\; t \leq x \leq 1+t+\sin t \\ -\dfrac{1+\cos t}{[x-(1+t+\sin t)]^2} & si \;\; x > 1+t+\sin t \end{array}\right.$$

Pour $x > 0$ et $t > 0$, la solution est donnée par :

$$z(x,t) = \begin{cases} exp\left(\dfrac{1}{x-t}\right) & si \quad 0 < x < t \\ 0 & si \;\; t \leq x \leq 1 + t + \sin t \\ exp - \left(\dfrac{1}{x - (1 + t + \sin t)}\right) & si \;\; x > 1 + t + \sin t \end{cases} \tag{4}$$

Considérons le cas de la nulle-étalabilité avec :

$$\omega_t = \{x \in \Omega \;\mid\; z(x,t) \; = 0\}$$

On a

$$\omega_0 \;=\; [0,1] \quad et \;\; \omega_t = \; [t,1 + t + \sin t]$$

Dans ce cas, $mes(w_t) = 1 + \sin t$ et par conséquent :

$$\frac{d}{dt} mes(w_t) = \cos t$$

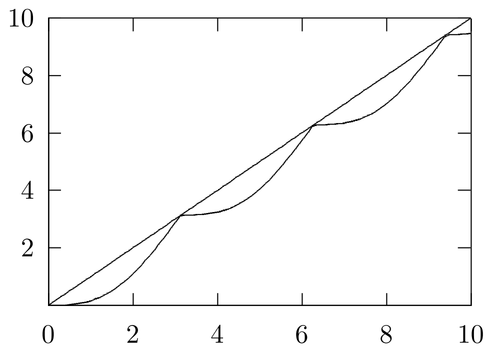

FIG. 2 –. *Système alternativement $\mathcal{A}$-étalable et $\mathcal{A}$-résorbable*

Nous avons une caractérisation des systèmes $\mathcal{A}$-étalables en introduisant une famille de transformations qui permet de décrire l'évolution géomètrique des domaines ω_t à partir de la dynamique du système. Pour plus de détails, voir [6, 5]. Nous considérons le cas de la nulle-étalabilité.

Définition 2.3. *La famille de transformations $(F(.,t,s))_{t \geq s}$, où $F : \Omega \times \Delta \longrightarrow \Omega$, est dite adaptée à l'évolution du système (S) s'il existe une fonction $\eta : \Omega \times \Delta \longrightarrow I\!R$ telle que :*

$$z[F(x,t,s),t] = \eta(x,t,s) z(x,s), \quad t \geq s \geq t_0, \quad x \in \Omega. \tag{5}$$

où $\Delta = \{(t,s) \in I \times I, t \geq s\}$.

Proposition 2.1. *Le système (S) est $\mathcal{A}$-étalable si et seulement si il existe une famille de transformations $(F(.,s,t))_{s \geq t}$ adaptée à l'évolution du système et satisfaisant :*

$$mes(F(w_t,s,t)) \geq mes(w_t) \; pour \; tout \; s \geq t \geq t_0$$

ou si $(F(.,s,t))_{s \geq t}$ est une famille de difféomorphismes Ω,

$$\int_{\omega_t} [|\mathcal{J}F(x_t,s,t)| - 1] dx_t \geq 0 \; ; \; \forall s,t, \; s \geq t \geq t_0. \tag{6}$$

De façon équivalente si

$$F(w_t,s,t) = w_s \quad \forall s,t,\ s \geq t \geq t_0$$

on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\omega_{t_0}} |\mathcal{J}F(x_t,t,t_0)| dx_{t_0} \geq 0 \ ; \quad \forall\ s \geq t \geq t_0 \tag{7}$$

Dans le cas de l'étalabilité au sens de l'inclusion, $F(.,s,t) = Id_\Omega$ (injection de ω_t dans ω_s), la condition 7 est satisfaite et le système est alors étalable si et seulement si $F(.,s,t) = Id_\Omega$ est adaptée à l'évolution du système.

3. Etalabilité et Vulnérabilité

3.1. Définition et exemple. Considérons un système dynamique (S) définit dans $\Omega \subset R^n$ $(n = 1{,}2$ ou $3)$ dont l'état est noté par $z(x,t) = z(x,t,t_0,z_0)$, $t \geq t_0$, $x \in \Omega$. $z_0(x) = z(x,t_0)$ est l'état initial à l'instant initial t_0 et $\mathcal{P}$ est une propriété donnée. Posons

$$\omega_t = \omega_t(t_0,z_0;\mathcal{P}) = \{x \in \Omega \ | \ \mathcal{P}z(x,t,t_0,z_0)\}.$$

On considère une région σ de Ω.

Définition 3.1. *On dit que σ est $\mathcal{P}$-vulnérable s'il existe un instant $t \in]t_0,T[$ telle que $\mathring{\sigma} \cap \omega_t \neq \emptyset$.*

Nous avons les remarques suivantes :

Remarque 3.1. *1. La vulnérabilité peut être vue à deux niveaux selon deux aspects: un aspect externe (les effets subis par l'extérieure) et un aspect interne (la réaction de la zone considérée face à l'agression externe). La définition 3.1 veut dire qu'une zone est vulnérable si elle est atteinte par des effets externes (étalabilité). Nous étudierons plus loin l'effet interne. Aussi nous avons considéré dans cette définition l'intérieur de σ au lieu de σ car la frontière de σ peut être une "barrière naturelle" qui pourra arrêter l'étalabilité.*

2. La vulnérabilité, telle qu'elle a été définie en 3.1, est liée à celle de l'étalabilité. En effet, si on considère le cas de l'étalabilité au sens de l'inclusion , alors si une zone σ est vulnérable alors il existe un instant $t_1 \in I$ telle que $\mathring{\sigma} \cap \omega_t \neq \emptyset$ pour tout $t \in]t_1,T[$. Dans le cas de l'étalabilité au sens des aires ($\mathcal{A}$-étalabilité), nous pouvons trouver, pour une zone σ vulnérable, deux instants t_1 et t_2 dans $]t_0,T[$ telle que $\mathring{\sigma} \cap \omega_t \neq \emptyset$ seulement pour $t_1 \leq t \leq t_2$. Cela dépend aussi des actions exercées sur le système.

Pour illustrer ces situations, considérons l'exemple suivant :

Exemple 3.1. : 1. Système autonome : *Nous considérons le système donné par l'équation suivante :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} = b(x,t)z(x,t) & x > 0 \ ; \ \ 0 < t < T \\ \\ z(x,0) = z_0(x) & x > 0 \end{cases} \tag{8}$$

avec

$$z_0(x) = \begin{cases} exp(-\dfrac{1}{1-x}) & ; \ 0 < x < 1 \\ \\ 0 & ; \ x \geq 1 \end{cases} \tag{9}$$

et

$$b(x,t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(1-x+t)^2} & ;\ t < x < 1+t \\ \\ 0 & ;\ x \geq 1+t. \end{cases} \tag{10}$$

La solution est alors donnée par :

$$z(x,t) = \begin{cases} exp(-\dfrac{1}{1-x+t}) & ;\ t < x < 1+t \\ \\ 0 & ;\ x \geq 1+t \end{cases} \tag{11}$$

Considérons le cas où la propriété $\mathcal{P}$ est $z(x,t) > 0$, i.e.

$$\omega_t = \{x : z(x,t) > 0\}$$

Ce qui donne,

$$\omega_0 =]0,1[\quad et \ \ \omega_t =]t,1+t[$$

Alors, $\sigma =]\alpha,\beta[$ (avec $\beta > \alpha$) est vulnérable pour tout $\alpha > 0$. En effet, pour $\alpha \geq 1$, il existe deux instants $t_1 = \alpha - 1$ et $t_2 = \beta$ telle que pour tout $t \in]t_1,t_2[$, $\mathring{\sigma} \cap \omega_t \neq \emptyset$. Pour $\alpha < 1$, $\mathring{\sigma} \cap \omega_0 =]\alpha,inf(1,\beta)[\neq \emptyset$.

2. Système excité : *Considérons maintenant le cas du même système excité par un contrôle u :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} = b(x,t)z(x,t) + u(x,t) & ; x > 0;\ \ 0 < t < T \\ z(x,0) = z_0(x) & x > 0 \end{cases} \tag{12}$$

et une zone $\sigma =]\alpha,\beta[$ avec $\alpha > 1$. La zone σ est vulnérable dans le cas où le système est autonome ($u(x,t) = 0$). Considérons maintenant le contrôle u donné par :

$$u(x,t) = -\frac{c'(t)a(t) - a'(t)(x-c(t))}{a(t)^2}\dot{z}_0\left(\frac{x-c(t)}{a(t)}\right) - b(x,t)z_0\left(\frac{x-c(t)}{a(t)}\right)$$

avec

$$\begin{cases} a(t) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{1}{\alpha-1}\right)t^2 + 1 \\ c(t) = -\dfrac{1}{2\alpha}t^2 + t \end{cases}$$

Dans ce cas

$$\omega_t^u =]c(t),a(t) + c(t)[$$

Alors pour $\alpha > 1$, la zone $\sigma =]\alpha,\beta[$ n'est plus vulnérable car $a(t)+c(t) < \alpha$ et $c(t) < \alpha$ pour tout $t \in]0,T[$.

3.2. Indice de vulnérabilité. Comme nous l'avons signalé auparavant, la notion de vulnérabilité, telle qu'elle a été définie en 3.1, est liée à l'étalabilité. Elle dépend certes de la condition initiale, de la dynamique du système, de l'horizon du temps, des actions exercés sur le système mais aussi de la nature de la zone σ. En effet, face à un même phénomène, deux zones données peuvent réagir de deux manières différentes. Il est alors intéressant de pouvoir comparer "le degré" de vulnérabilité de ces deux zones. On a la définition suivante :

Définition 3.2. *Soit σ une partie de Ω. L'indice instantané de vulnérabilité est défini par :*

$$I_v\sigma(t) \ = \ \frac{1}{mes(\sigma)}\frac{d}{dt}\left(mes(\sigma \cap \omega_t)\right). \tag{13}$$

L'indice moyen de vulnérabilité est défini par :

$$I_v\sigma \;=\; \frac{1}{mes(\sigma)}\frac{1}{t_2-t_1}mes\left(\cup_{t\in]t_1,t_2[}(\mathring{\sigma}\cap\omega_t)\right) \tag{14}$$

avec $t_1 = \inf\{t \in I/\mathring{\sigma} \,\cap\, \omega_t \,\neq \emptyset\}$ *(le premier instant ou la zone* σ *est atteinte).*
$t_2 = \inf\left\{t > t_1/ \cup_{s\in]t_1,t[}\,(\mathring{\sigma}\cap\omega_s) = \cup_{s\in]t_1,T[}(\mathring{\sigma}\cap\omega_s)\right\}$ *(le premier instant où la plus grande partie de* σ *est atteinte, qui pourra être tout* σ*).*

Remarque 3.2. *1. Les indices* $I_v\sigma(t)$ *et* $I_v\sigma$ *représentent respectivement les vitesses instantanée et moyenne de l'étalabilité des domaines* ω_t *dans la zone* σ*. Ainsi si une zone* σ *n'est pas vulnérable, alors pour tout* $0 < t < T$, $I_v\sigma(t) = I_v\sigma = 0$ *car* $\sigma \,\cap\, \omega_t \,= \emptyset$ *pour tout* $t \in I$.

2. L'indice de vulnérabilité dépend aussi de la nature de l'étalabilité considérée (au sens de l'inclusion ou au sens des aires; i.e. maintient de la propriété là où elle est satisfaite ou non). Ici nous avons considéré les deux situations en même temps. Cependant nous pouvons déduire, pour le cas de l'étalabilité au sens des aires un autre indice qui tiendra en compte de ce que l'on gagne et ce que l'on perde au cours de l'évolution (des parties de σ *peuvent "retrouver" leurs états après le passage des* ω_t*).*

3. l'indice de vulnérabilité traduit dans un certain sens la capacité de résistance de la zone σ *face à l'étalabilité des* ω_t*. Nous dirons qu'une zone* σ_1 *est plus vulnérable qu'une zone* σ_2 *si* $I_v\sigma_1 \;\geq\; I_v\sigma_2$ *(on peut faire une compraison instantanée à l'aide des indices instantanés).*

Reprenons l'exemple 3.1. Nous avons vu que toutes les zones $\sigma =]\alpha,\beta[$, avec $\alpha > 0$, sont vulnérables. Pour comparer le degré de vulnérabilité de deux zones données, on va calculer l'indice de vulnérabilité.

Considérons une zone $\sigma =]\alpha,\beta[$. Si $\alpha < 1$ et $\beta > 1$, alors $t_1 = 0$ et $t_2 = \beta - 1$ et par suite :

$$I_v\sigma = \frac{1}{\beta-1}.$$

La zone est d'autant plus vulnérable que β est proche de 1. Rappelons que $\omega_0 =]0,1[$.
Dans le cas où $\alpha > 1$, alors, $t_1 = \alpha - 1$ et $t_2 = \beta - 1$ et par suite :

$$I_v\sigma = \frac{1}{\beta-\alpha}.$$

En posant $l = \beta - \alpha$ la longueur de la zone σ, on voit que l'indice de vulnérabilité est inversement proportionnel à cette longeur. Ainsi une zone σ_1 est plus vulnérable qu'une zone σ_2 si la longeur de σ_1 est plus petite que celle de σ_2. Cela s'explique par le fait que les ω_t se déplacent avec une vitesse constante.

4. Application : Vulnérabilité à la pollution des nappes souterraines

Considérons un produit polluant qui s'infiltre, à partir de la Zone Interface Sol (ZIS), avec une concentration initiale C vers une nappe σ (figure 3.).
Au cours de l'infiltration à travers la Zone Non Saturée (ZNS), il y'aurait une épuration (totale ou partielle) due aux propriétés du milieu traversé. Au bout d'un certain temps, T, appelé temps de transit, le produit polluant peut atteindre la nappe avec une concentration C'. A cause de la complexité du problème étudié et du grand nombre de paramètres qui entrent en jeux, différentes approches ont été proposées et utilisées pour la vulnérabilité initialement introduite par J. Margat dans les années 60 [9]. Aussi au niveau de la terminologie des termes comme "sensibilité" ou "risque" ont

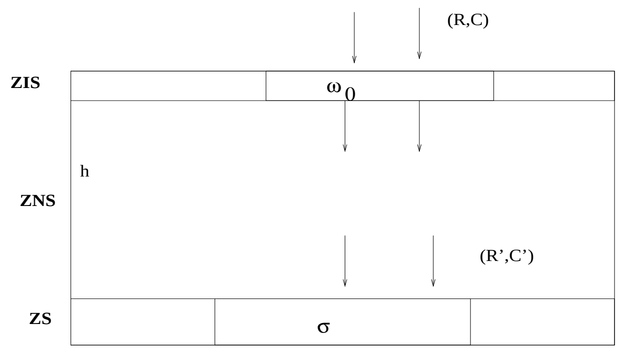

FIG. 3 –. *Transfert d'un polluant*

été utilisés. Sans être exhaustive, nous allons analyser trois approches proposées pour ce problème.

4.1. Approche Rehse. L'approche proposée par Rehse, en 1977 [10], est basée sur le pouvoir épurateur du sol, lors du transfert d'un polluant, de la surface sol jusqu'a l'aquifère par infiltration verticale, puis en direction horizontale dans l'aquifère. Ainsi il a considéré le pouvoir épurateur sur la totalité du transfert

$$M_x = M_d + M_r$$

où M_d est le pouvoir épurateur sur le trajet verticale (ZNS) et M_r est le pouvoir épurateur sur la direction horizontale (dans l'aquifère).

Pour la ZNS (trajet verticale), il a considéré deux cas :

1. Le cas où le produit polluant, grâce à l'effet de l'épuration de la Zone Non Saturée, n'atteint pas la nappe σ.

2. Le cas où le produit polluant atteint la nappe.

Pour cela, il a introduit "le pouvoir d'épuration"

$$M_d = hI$$

où I est "l'indice d'épuration" qui dépond de la nature de la couche considérée; $I = \frac{1}{h_{min}}$, avec h_{min} est la hauteur minimale de la Zone Non Saturée nécessaire pour avoir une épuration totale. Elle dépend naturellement de la nature des lithologique des terrains constituant la Zone Non Saturée. h est la hauteur de la Zone Non Saturée considérée. Ainsi si $h \geq h_{min}$ il y'aura une épuration totale, sinon il n'y aura qu'une épuration partielle. Ce qui correspond aux deux cas : $M_d \geq 1$ et $M_d < 1$. Dans le premier cas ($M_d \geq 1$), l'épuration est totale, donc il n'y aura pas de contamination. Dans le deuxième cas ($M_d < 1$), il a déterminé le pouvoir d'épuration sur la distance horizontale (Zone saturée) par

$$M_r = lI_a = 1 - M_d$$

où I_a est un index correspondant au materiaux aquifère; $I_a = \frac{1}{L}$ où L est la distance minimale nécessaire pour avoir une épuration totale dans le cas où il n' y a pas de couverture (sans ZNS). l est la distance minimale nécessaire pour avoir une épuration totale en considérant la zone Non Saturée. Ainsi, les zones se situants au dela de la distance l ne seront pas contaminées.

Remarque 4.1. *1. Nous retrouvons dans cette approche la définition 3.1 qui traduit le fait qu'une zone est vulnérable si elle est atteinte ou pas par une pollution donnée. Ainsi nous pouvons dire qu'une zone (nappe), σ, est vulnérable si $M_x < 1$ et qu'elle n'est pas vulnérable dans le cas contraire.*
2. Cette approche considére le comportement "asymptotique" du système. En effet cela consiste à déterminer des distances minimales au dela desquelles il y aura une épuration totale (i.e. les ω_t se réduisent à l'ensemble vide).

4.2. Approche DRASTIC. L'approche DRASTIC [1] consiste à tenir compte en plus de la Zone Non Saturée de la Zone Saturée (la nappe)(effet interne). En effet, l'indice de vulnérabilité suivant (Indice de DRASTIC) a été introduit :

$$I_v = \Sigma_{j=1}^{7}(w_j R_j)$$

où w_j est un poids accordé au facteur d'indice j et R_j est la classe (ou le rang) accordé au facteur d'indice j. Les sept classes sont la distance à la nappe c'est à dire l'épaisseur de la Zone Non Saturée, la recharge, la nature de la Zone Non Saturée (milieu aquifère saturé), la nature du sol, la nature de la Zone Non Saturée, la topographie et la perméabilité de l'aquifère. Cette approche tiens compte d'un nombre important de paramètres mais elle reste assez empirique à cause de la relation linéaire qui a été proposée entre ces paramètres. Cependant elle est la plus utilisée grâce à sa simplicité relative.

4.3. Une autre approche : Approche TCR. Le principe de cette méthode, proposée dans [2], consiste à définir l'indice de vulnérabilité à travers les trois paramètres qui caractérisent le transfert d'un polluant de la Zone Interface Sol vers la nappe. Ce sont le temps de transit T, le rapport de la concentration en produit polluant à l'arrivée à la nappe C' par rapport à la concentration initiale C à la surface Sol et le rapport de la recharge effective R' par rapport à la quantité d'eau R disponible à la surface Sol (Approche TCR : Approche tenant compte du Temps, Concentration et Recharge). Il est claire que ces trois paramètres dépendent de plusieurs paramètres liés à la nature des couches traversées et aussi à la nature du produit polluant. L'indice de vulnérabilité a été définit comme étant la somme de l'effet de ces trois paramètres sur la vulnérabilité. Il traduit en outre le principe communément admis en hydrogéologie, c'est qu'une zone est vulnérable si le produit polluant l'atteint en un temps court et avec une concentration élevée. Cet indice est donné par :

$$I_v = \alpha\frac{1}{T} + \beta\frac{R'}{R} + \gamma\frac{C'}{C}$$

où α, β et γ sont des coefficients introduits de sorte à favoriser l'un ou l'autre des paramètres. Pour plus de détails, voir [2].

Remarque 4.2. *1. Dans cette approche on retrouve l'indice de vulnérabilité moyen (ou le degré moyen de protection) de la nappe par la Zone Non Saturée . En effet, posons h : la hauteur de la Zone Non Saturée. Alors $T = v_m/h$ où v_m est la vitesse moyenne d'infiltration. De la même manière, en introduisant des coefficients moyens d'épuration C_m et de recharge R_m, on obtient :*

$$I_v = \frac{1}{h}(\alpha v_m + \beta C_m + \gamma R_m).$$

2. Cet indice de vulnérabilité nous permet de comparer le degré de vulnérabilité de deux nappes données. Voir [2].

5. Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté une approche de la vulnérabilité en relation avec l'étalabilité à travers une application en hydrogéologie. Cela nous a permis de dégager certaines relations intéressantes entre ces deux notions. Outre les applications que nous pouvons étudier en considérant d'autres phénomènes tels que l'expansion des épidémies ou des feux de forêts, d'autres problèmes méritent d'être étudiés. Parmi ces problèmes celui du contrôle. En effet, comme nous l'avons signalé, nous pouvons rendre une zone non vulnérable en appliquant un contrôle convenable. C'est ce que nous appelons contrôle "protecteur". Aussi et pour mieux protéger une zone donnée, il faut la mieux observer; ce qui pose le problème de l'observation. Dans cette approche, nous avons considéré des systèmes dynamiques modélisés par des équations aux dérivées partielles mais une autre approche, utilisant les Automates Cellulaires, parait assez prometteuse pour l'étude d'un tel problème. Ce sont des travaux en cours.

Références

[1] L. Aller, T. Bennet, J. H. Lehr, R. J. Petty, G. Hackett, *DRASTIC: a standarized system for evaluating dround water pollution potential using hydrogeologic settings* U.S. Environmental Protection Agency, 1987.

[2] M. Amharref, S. Assine, A. Bernoussi, *Cartographie de la vulnérabilité à la pollution des eaux souterraines: Application à la plaine du Gharb (Maroc)* Proceeding du Congés Int. JANO7, Tanger, 17-19 avril, 2002.

[3] M. Amharref, M. Mania, B. Haddouchi, *Adaptation of an evaluation vulnerability method to groundwater pollution*, Proc. Of Salt Water Intrusion in Coastal Aquifer (SWICA), 23-25, April, Essaouira, Morocco, 2001.

[4] A. Bernoussi, A. El Jai, A. J. Pritchard, Spreadability and evolving interfaces, *International Journal of Systems Sciences*, **32**(10), 1217-1232 (2001).

[5] A. Bernoussi, *Vers un nouveau concept dans les systèmes distribués: l'étalabilité*, HDR, Université de Perpignan, 2001.

[6] A. Bernoussi, A. El Jai, New approach of spreadability, *Journal of Mathematical and Computer Modelling*, **31**, 3-109 (2000).

[7] A.El Jai, K.Kassara, Spreadability of transport systems, *International Journal of Systems Science*, **27**(7), 681-688 (1996).

[8] A. El Jai, K. Kassara, Spreadable distributed systems, *Mathematical and Computer modelling*, **20**(1), 47-64 (1996).

[9] J. Margat, *Vulnérabilité des nappes d'eau souterraines à la pollution (Ground water vulnerability to contamination)*, Bases de la cartographie, (Doc.) BRGM, 68SGL 198 HYD, Orléans, France, 1968.

[10] W. Rehse, 1977, *Abbaubare organische veruneinigungen pathogene keim und viren.* Rapport n. 40177 Eidgenossiches. Amt fur Umweltschutz (office de l'environnement à Berne).

(Abdes-Samed Bernoussi) Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences et Techniques
B.P 416, Tanger, Maroc, Tel/Fax: 00 212 39 39 39 54/55 (Fax 53)
et LTS, Université de Perpignan, France
E-mail address: samed@univ-perp.fr

(Mina Amharref) Département de Géologie, Faculté des Sciences et Techniques
B.P 416, Tanger, Maroc