

## Sur le modèle du gaz de Lorentz périodique

FLORIN P. BOCA, RADU N. GOLOGAN ET ALEXANDRU ZAHARESCU

RÉSUMÉ. Ce travail est un exposé des résultats obtenus par les auteurs dans le but de donner des formules précises pour les propriétés statistiques du libre parcours pour le modèle périodique du gaz de Lorentz en  $\mathbb{R}^2$  quant le diamètre des obstacles tends vers zéro et la particule part de l'origine du réseau. On utilise des techniques de la théorie des nombres où les estimations de Weil pour les sommes de Kloosterman jouent un rôle essentiel.

*Classification AMS 2000 des sujets.* 11B57, 11L05, 65C50, 82C40, 82D05.

*Mots clef et phrases.* gaz de Lorentz, sommes de Kloosterman, libre parcours.

### 1. Introduction

La littérature dédiée aux propriétés statistiques du gaz de Lorentz périodique est très riche (voir par exemple [21], [1], [7], [8], [9], [10], [18], [13], [11], [12], [15], [16], [14], [6]). Pour le problème en dimension 2 on considère en  $\mathbb{R}^2$  des obstacles circulaires de rayon  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$  centrés aux points à coordonnées entières et l'espace des configurations

$$Z_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2; \text{dist}(x, \mathbb{Z}^2) > \varepsilon\}.$$

Le “temps de sortie” (first exit time) ou “libre parcours” (free path length) est défini par

$$\tau_\varepsilon(x, \omega) = \inf\{\tau > 0; x + \tau\omega \in \partial Z_\varepsilon\}, \quad x \in Y_\varepsilon = Z_\varepsilon/\mathbb{Z}^2, \omega \in \mathbb{T}.$$

Le problème est équivalent à celui d'un billiard sur une table carrée  $Y_\varepsilon$ , où on considère des trous circulaires de rayon  $\varepsilon$  centrés aux sommets. Un point mobil se déplace dans  $Y_\varepsilon$  de manière rectiligne et uniforme avec réflexion spéculaire sur les arêtes. La trajectoire se termine quand le point rencontre l'un des trous. En identifiant  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  avec  $[0,1]^2$ , la table du billiard  $Y_\varepsilon$  devient un tore percé. La quantité  $\tau_\varepsilon(x, \omega)$  coïncide dans ce cas avec le temps quand la particule disparaît dans l'un de ces trous. On peut évaluer le temps de sortie moyen ([11] (voir aussi [12], [16])

$$l_\varepsilon = \iint_{\Sigma_\varepsilon^+} \tau_\varepsilon(x, \omega) d\nu_\varepsilon(x, \omega),$$

où  $\Sigma_\varepsilon^+ = \{(x, \omega) \in \partial Y_\varepsilon \times \mathbb{T}; \omega \cdot n_x > 0\}$  est l'espace de phase,  $n_x$  est la normale intérieure à  $x \in \partial Y_\varepsilon$  et  $\nu_\varepsilon$  la mesure de Liouville sur  $\Sigma_\varepsilon^+$ , à l'aide de la formule de Santaló. On trouve

$$l_\varepsilon = \frac{1 - \pi^2}{2\varepsilon} = \frac{1}{2\varepsilon} + O(\varepsilon).$$

Reçu: le 11 décembre 2002.

L'espace  $(\Sigma_\varepsilon^+, \nu_\varepsilon)$  se relève en  $(Y_\varepsilon \times \mathbb{T}, \mu_\varepsilon)$ , où  $d\mu_\varepsilon(x, \omega) = \frac{dx d\omega}{|Y_\varepsilon \times \mathbb{T}|}$ . Il est donc naturel d'étudier la distribution des temps de sortie, définie par

$$\phi_\varepsilon(t) = \iint_{Y_\varepsilon \times \mathbb{T}} \chi_{[t, \infty)}(\tau_\varepsilon(x, \omega)) d\mu_\varepsilon(x, \omega) = \mu_\varepsilon(\{(x, \omega) \in Y_\varepsilon \times \mathbb{T}; \tau_\varepsilon(x, \omega) > t\}).$$

Bourgain, Golse et Wennberg [6], ont prouvé qu'il existent des constantes  $C_1, C_2 > 0$  telles que

$$\frac{C_1}{\varepsilon t} \leq \phi_\varepsilon(t) \leq \frac{C_2}{\varepsilon t}, \quad \forall t > \frac{1}{\varepsilon}. \quad (1)$$

Dans ce travail on remplace au début les obstacles circulaires par des croix. Dans le cas du billiard ceci correspond à percer les petits segments de longueur  $\varepsilon$  issus de chaque sommet. Cette simplification permet d'utiliser des techniques de la théorie des nombres, plus précisément des résultats sur la distribution des nombres de Farey, ou les estimations de Weyl pour les sommes partielles de Kloosterman sont essentielles.

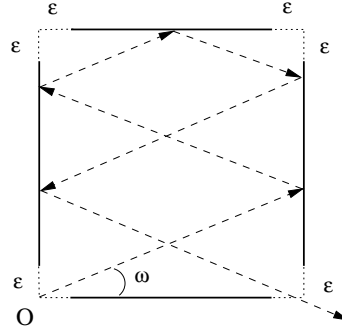


FIG. 1 -. *Le billiard en  $\mathbb{T}_\varepsilon^2$*

Soit  $\varepsilon > 0$  et la croix  $C_\varepsilon = [-\varepsilon, \varepsilon] \times \{0\} \cup \{0\} \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ , reproduite en chaque point de  $\mathbb{Z}^2$ , à l'exception de l'origine. La table du billiard  $\mathbb{T}_\varepsilon^2$  est obtenue du carré  $[0, 1]^2$  par l'élimination des segments de longueur  $\varepsilon > 0$  autour de chaque sommet. Nous allons considérer seulement des trajectoires issues de l'origine  $O = (0, 0)$  dans des directions  $\omega \in [0, \frac{\pi}{2}]$  et de longueur  $\tilde{\tau}_\varepsilon(\omega)$ . On va calculer les moyennes par rapport à  $\omega$  seulement.

La question d'évaluer

$$c_r = \int_0^{\pi/2} \tilde{\tau}_\varepsilon(\omega)^r d\omega, \quad r > 0,$$

a été posée par Ya. G. Sinai dans un séminaire à l'Université de Moscou en 1981. Pour les moments de  $\tilde{\tau}_\varepsilon$  on démontre le résultat suivant.

**Théorème 1.1.** *Pour chaque  $\alpha < \beta \leq \frac{\pi}{4}$  et  $r > 0$  on a*

$$\int_\alpha^\beta \tilde{\tau}_\varepsilon(\omega)^r d\omega = c_{r, \alpha, \beta} \varepsilon^{-r} + O_{r, \delta}(\varepsilon^{-r + \frac{1}{6} - \delta}), \quad \forall r > 0, \forall \delta > 0, \quad (2)$$

où on pose

$$c_{r,\alpha,\beta} = \frac{12D_r}{\pi^2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\omega}{\cos^r \omega}$$

et

$$D_r = \frac{1 - \frac{1}{2^r} + \ln 2}{r(r+1)} - \frac{1 - \frac{1}{2^r}}{r^2} + \frac{1 - \frac{1}{2^{r+1}}}{(r+1)^2} - \frac{1}{r(r+1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} (k-1) \binom{r+1}{k}}{k2^k}.$$

En particulier, la valeur moyenne des temps de sortie est dans ce cas

$$\int_0^{\pi/2} \tilde{\tau}_{\varepsilon}(\omega) d\omega \approx \frac{0.742792}{\varepsilon}.$$

Une autre manière d'étude est de considérer les mesures de probabilité  $\mu_{\alpha,\beta,\varepsilon}$  définies par

$$\mu_{\alpha,\beta,\varepsilon}(f) = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varepsilon \tilde{\tau}_{\varepsilon}(\omega)) d\omega, \quad f \in C_c([0, \infty)).$$

On tire de l'égalité (2) que la suite  $\{\mu_{\alpha,\beta,\varepsilon}\}_{\varepsilon}$  converge faiblement vers une mesure de probabilité  $\mu_{\alpha,\beta}$  lorsque  $\varepsilon \searrow 0$  et que

$$\int_{\alpha}^{\beta} \omega^r d\mu_{\alpha,\beta}(\omega) = c_{r,\alpha,\beta}, \quad r > 0.$$

La fonction de répartition  $F_{\alpha,\beta,\varepsilon}$  de  $\mu_{\alpha,\beta,\varepsilon}$  est définie par

$$F_{\alpha,\beta,\varepsilon}(t) = \mu_{\alpha,\beta,\varepsilon}([0, t]) = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \chi_{[0, t]}(\varepsilon \tilde{\tau}_{\varepsilon}(\omega)) d\omega = \frac{|\{\omega \in [\alpha, \beta]; \varepsilon \tilde{\tau}_{\varepsilon}(\omega) \leq t\}|}{\beta - \alpha}.$$

Soit  $\psi$  la fonction

$$\psi(s) = \frac{1-s}{s} \left( 1 + \ln \frac{s}{1-s} \right). \quad (3)$$

Le résultat principal de cette note est énoncé ensuite.

**Théorème 1.2.** *Pour chaque*  $0 \leq \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{4}$  *et*  $t \geq 0$ , *la limite*  $\lim_{\varepsilon \searrow 0} F_{\alpha,\beta,\varepsilon}(t)$  *existe et est donnée par*

$$F_{\alpha,\beta}(t) = \frac{12}{\pi^2(\beta - \alpha)} \int_0^1 L(s)W(s) ds + O_{\delta}(\varepsilon^{\frac{1}{6}-\delta}),$$

où on pose

$$L(s) = L(s,t) = \begin{cases} \beta - \alpha, & s \in [0, t \cos \beta], \\ \arccos \frac{s}{t} - \alpha, & s \in [t \cos \beta, t \cos \alpha], \\ 0, & s \in [t \cos \alpha, \infty), \end{cases}$$

et

$$W(s) = W(s,t) = \begin{cases} 1, & s \in [0, \min(t \cos \alpha, \frac{1}{2})], \\ \psi(s), & s \in [\frac{1}{2}, \min(1, t \cos \alpha)], \\ 0, & s \in [\min(1, t \cos \alpha), \infty). \end{cases}$$

Ici  $\psi$  est donné par (3).

Il est facile à observer que la fonction  $F_{\alpha,\beta}$  donne la répartition d'une mesure absolument continue  $\mu_{\alpha,\beta}$  dont le support est en  $[0, \frac{1}{\cos \beta}]$ . Il s'en suit que  $F_{\alpha,\beta}(t) = \int_0^t f_{\alpha,\beta}(s) ds$  où la densité est déterminée ensuite.

**Corollaire 1.1.** *Pour  $\varepsilon \searrow 0$ , les mesures de probabilité  $\mu_{\alpha,\beta,\varepsilon}$  convergent faiblement vers la mesure de probabilité à support compact  $\mu_{\alpha,\beta}$  de densité*

$$f_{\alpha,\beta}(t) = \frac{12}{\pi^2(\beta - \alpha)} \cdot \begin{cases} \sin \beta - \sin \alpha, & t \in [0, \frac{1}{2 \cos \alpha}], \\ \sin \beta - \frac{\sqrt{4t^2 - 1}}{2t} + \int_{\alpha}^{\arccos 1/(2t)} \psi(t \cos x) \cos x dx, & t \in [\frac{1}{2 \cos \alpha}, \frac{1}{2 \cos \beta}], \\ \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t \cos x) \cos x dx, & t \in [\frac{1}{2 \cos \beta}, \frac{1}{\cos \alpha}], \\ \int_{\arccos 1/t}^{\beta} \psi(t \cos x) \cos x dx, & t \in [\frac{1}{\cos \alpha}, \frac{1}{\cos \beta}], \\ 0, & t \in [\frac{1}{\cos \beta}, \infty). \end{cases}$$

Pour évaluer le nombre  $r_\varepsilon(\omega)$  de collisions spéculaires avec les arêtes avant de toucher un obstacle on raisonne par analogie. Soit  $\nu_{\alpha,\beta,\varepsilon}$  la mesure de probabilité sur  $[0, \infty)$  définie par

$$\nu_{\alpha,\beta,\varepsilon}(f) = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varepsilon r_\varepsilon(\omega)) d\omega,$$

ayant comme fonction de répartition

$$G_{\alpha,\beta,\varepsilon}(t) = \nu_{\alpha,\beta,\varepsilon}([0,t]) = \frac{|\{\omega \in [\alpha,\beta]; \varepsilon r_\varepsilon(\omega) \leq t\}|}{\beta - \alpha}, \quad t \in [0, \infty).$$

Le résultat suivant contient une évaluation précise des mesures limites.

**Théorème 1.3.** *Pour chaque  $0 \leq \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{4}$  et  $t \geq 0$ , la limite  $\lim_{\varepsilon \searrow 0} G_{\alpha,\beta,\varepsilon}(t)$  existe et est donnée par*

$$G_{\alpha,\beta}(t) = \frac{12}{\pi^2(\beta - \alpha)} \int_0^1 L_1(s)W_1(s)dt + O_\delta(\varepsilon^{\frac{1}{6}-\delta}),$$

où on pose

$$L_1(s) = L_1(s,t) = \begin{cases} \beta - \alpha, & s \in [0, \min(\frac{t}{1+\tan\beta}, \frac{1}{2})], \\ \arctan\left(\frac{t}{s} - 1\right) - \alpha, & s \in [\frac{1}{2}, \min(1, \frac{t}{1+\tan\alpha})], \\ 0, & s > \min(1, \frac{t}{1+\tan\alpha}), \end{cases}$$

et

$$W_1(s) = W_1(s,t) = \begin{cases} 1, & s \in [0, \min(\frac{t}{1+\tan\alpha}, \frac{1}{2})], \\ \psi(s), & s \in [\frac{1}{2}, \min(1, \frac{t}{1+\tan\alpha})], \\ 0, & s > \min(1, \frac{t}{1+\tan\alpha}). \end{cases}$$

Le comportement de ces mesures quand  $\varepsilon \searrow 0$  est décrit par le résultat suivant.

**Corollaire 1.2.** *Quand  $\varepsilon \searrow 0$ , les mesures  $\nu_{\alpha,\beta,\varepsilon}$  convergent faiblement vers  $\nu_{\alpha,\beta}$ . La densité de  $\nu_{\alpha,\beta}$  est donnée par*

$$g_{\alpha,\beta}(t) = \frac{12}{\pi^2(\beta - \alpha)} \begin{cases} \int_\alpha^\beta \frac{dx}{1+\tan x}, & t \in [0, \frac{1+\tan\alpha}{2}], \\ \int_\alpha^\beta \frac{dx}{1+\tan x} + \int_\alpha^{\arctan(2t-1)} \frac{\psi(\frac{t}{1+\tan x})}{1+\tan x}, & t \in [\frac{1+\tan\alpha}{2}, \frac{1+\tan\beta}{2}], \\ \int_\alpha^\beta \frac{\psi(\frac{t}{1+\tan x})}{1+\tan x} dx, & t \in [\frac{1+\tan\beta}{2}, 1+\tan\alpha], \\ \int_\alpha^\beta \frac{\psi(\frac{t}{1+\tan x})}{1+\tan x} dx, & t \in [1+\tan\alpha, 1+\tan\beta], \\ \arctan(t-1), & t \in [1+\tan\beta, \infty). \\ 0, & t \in [1+\tan\beta, \infty). \end{cases}$$

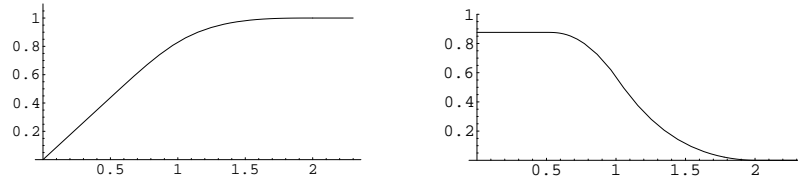


FIG. 2 – La fonction de répartition  $G_{0, \frac{\pi}{4}}$  et la fonction de densité  $g_{0, \frac{\pi}{4}}$

On obtient des résultats similaires dans le cas où les obstacles sont circulaires ([BGZ1],[BGZ2]).

## 2. Techniques de la théorie des nombres utilisées

Il est facile à voir que pour qu'un rayon de pente  $\tan \omega$  issu de l'origine intersecte un segment vertical de longueur  $2\varepsilon$  centré en  $(q, a) \in \mathbb{Z}^2$ , l'inégalité  $|q \tan \omega - a| \leq \varepsilon$  doit être vérifiée. A cause de cette remarque, les nombres de Farey joueront un rôle essentiel dans toutes les considérations. Pour chaque entier  $Q \geq 1$ ,  $\mathcal{F}_Q$  dénotera dans la suite l'ensemble des nombres de Farey d'ordre  $Q$ , i.e. les fractions irréductibles de l'intervall  $(0,1]$  à dénominateurs inférieures à  $Q$ .

Les propriétés élémentaires des nombres de Farey montrent que chaque rayon issu de l'origine, ayant une pente entre 0 et 1, doit intersecter l'ensemble

$$\mathcal{C}_\varepsilon = C_\varepsilon + \{(q, a); a/q \in \mathcal{F}_Q\},$$

qui contient

$$N_Q = \#\mathcal{F}_Q = \sum_{n=1}^Q \varphi(n) = \frac{3Q^2}{\pi^2} + O(Q \ln Q)$$

copies identiques de l'obstacle  $C_\varepsilon$ , centrés en  $(q, a)$ , où  $\frac{a}{q} \in \mathcal{F}_Q$ . En effet, on démontre facilement le résultat suivant.

**Lemme 2.1.** *Pour  $\omega \in (0, \frac{\pi}{4}]$  on a*

$$\{\lambda\omega; \lambda > 0\} \cap C_\varepsilon \neq \emptyset.$$

Une des plusieurs situations géométriques est considérée dans la figure suivante.

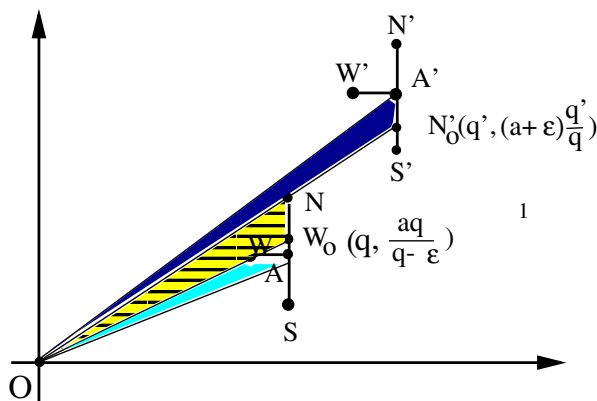


FIG. 3 –. Le cas  $q < q'$

Pour déterminer les mesures considérées, il faut évaluer les sommes

$$S_{\alpha, \beta}(t, \varepsilon) = \sum_{\substack{a/q \in \mathcal{F}_Q \cap [\tan \alpha, \tan \beta] \\ q^2 + a^2 < t^2 Q^2}} \omega_{q, a},$$

où  $\omega_{q, a}$  est l'angle déterminé par les trajectoires qui s'arrêtent dans un segment centré en  $(q, a)$ .

Pour estimer les fonctions de répartition  $F_{\alpha,\beta}$  et  $G_{\alpha,\beta}$ , et par conséquent les sommes  $S_{\alpha,\beta}(t,\varepsilon)$ , on utilise le résultat suivant ([4, Lemma 2.2]) qui est une conséquence de [2, Lemma 1.7].

**Lemme 2.2.** *Soit  $q \geq 1$  un nombre entier et soit  $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subset \mathbb{R}$  des intervalles de longueur moins que  $q$ . Si  $f : \mathcal{I} \times \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction  $C^1$  et  $T > 1$ ,  $\delta > 0$ , alors*

$$\sum_{\substack{a \in \mathcal{I}, b \in \mathcal{J} \\ ab \equiv 1 \pmod{q}}} f(a,b) = \frac{\varphi(q)}{q^2} \iint_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} f(x,y) dx dy \\ + O_\delta \left( T^2 q^{\frac{1}{2} + \delta} \|f\|_\infty + T q^{\frac{3}{2} + \delta} \|Df\|_\infty + \frac{|\mathcal{I}| |\mathcal{J}| \|Df\|_\infty}{T} \right),$$

où on pose  $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_{\infty, \mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ .

## Références

- [1] P. Bleher, Statistical properties of the Lorentz gas with infinite horizon, *J. Stat. Phys.* **66**(1/2), 315-373 (1992).
- [2] F.P. Boca, C. Cobeli, A. Zaharescu, Distribution of lattice points visible from the origin, *Commun. Math. Phys.*, **213**, 433-470 (2000).
- [3] F.P. Boca, C. Cobeli, A. Zaharescu, A conjecture of R.R. Hall on Farey arcs, *J. Reine Angew. Mathematik*, **535**, 207-236 (2001).
- [4] F.P. Boca, R.N. Gologan, A. Zaharescu, The average length of a trajectory in a certain billiard in a flat two-torus, *preprint math.NT/0110208*.
- [5] F.P. Boca, R.N. Gologan, A. Zaharescu, The statistics of the trajectory of a certain billiard in a flat two-torus, *Commun. Math. Phys.* **240**, 53-73 (2003).
- [6] J. Bourgain, F. Golse, B. Wennberg, On the distribution of free path lengths for the periodic Lorentz gas, *Commun. Math. Phys.* **190**, 491-508 (1998).
- [7] L.A. Bunimovich, Ya.G. Sinai, Statistical properties of the Lorentz gas with periodic configuration of scatterers. *Commun. Math. Phys.* **78**, 479-497 (1980/81).
- [8] L.A. Bunimovich, Ya.G. Sinai, Markov partitions for dispersed billiards, *Commun. Math. Phys.* **78**, 247-280 (1980/81).
- [9] L.A. Bunimovich, Ya.G. Sinai, N.I. Chernov, Markov partitions for two-dimensional hyperbolic billiards, *Russ. Math. Surv.* **45**(3), 105-152 (1990).
- [10] L.A. Bunimovich, Ya.G. Sinai, N.I. Chernov, Statistical properties of two-dimensional hyperbolic billiards. *Russ. Math. Surv.* **46**(4), 47-106 (1991).
- [11] N. Chernov, New proof of Sinai's formula for the entropy of hyperbolic billiard systems. Application to Lorentz gases and Bunimovich stadium, *Funct. Anal. and Appl.* **25**(3), 204-219 (1991).
- [12] N. Chernov, Entropy, Lyapunov exponents, and mean free path for billiards, *J. Stat. Phys.* **88**(1/2), 1-29 (1997).
- [13] N.I. Chernov, S. Troubetzkoy, Measures with infinite Lyapunov exponents for the periodic Lorentz gas, *J. Stat. Phys.* **83**, 193-202 (1996).
- [14] P. Dahlqvist, The Lyapunov exponent in the Sinai billiard in the small scatterer limit, *Nonlinearity* **10**, 159-173 (1997).
- [15] H.S. Dumas, L. Dumas, F. Golse, On the mean free path for a periodic array of spherical obstacles, *J. Stat. Phys.* **82**, 1385-1407 (1996).
- [16] H.S. Dumas, L. Dumas, F. Golse, Remarks on the notion of mean free path for a periodic array of spherical objects, *J. Stat. Phys.* **87**(3/4), 943-950 (1997).
- [17] T. Estermann, On Kloosterman's sums, *Mathematika*, **8**, 83-86 (1961).
- [18] G.A. Galperin, Asymptotic behaviour of a particle in a Lorentz gas, *Russ. Math. Surv.* **47**(1), 258-259 (1992).
- [19] G.H. Hardy, E.M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, 4th Ed., Oxford: Clarendon Press, 1960.

- [20] C. Hooley, An asymptotic formula in the theory of numbers, *Proc. London Math. Soc.* **7**, 396-413 (1957)
- [21] Ya.G. Sinai, Dynamical systems with elastic reflections. Ergodic properties of dispersing billiards, *Russ. Math. Surveys* **25**, 137-189 (1970).
- [22] A. Weil, On some exponential sums, *Proc. Nat. Acad. USA* **34**, 204-207 (1948).

(Florin P. Boca) DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
UNIVERSITY OF ILLINOIS AT URBANA-CHAMPAIGN  
URBANA, IL 61801, USA;  
INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE ROMANIAN ACADEMY  
P.O. BOX 1-764, BUCHAREST RO-70700, ROMANIA  
*E-mail address:* `fboca@math.uiuc.edu`

(Radu N. Gologan) INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE ROMANIAN ACADEMY  
P.O. BOX 1-764, BUCHAREST RO-70700, ROMANIA  
*E-mail address:* `Radu.Gologan@imar.ro`

(Alexandru Zaharescu) DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
UNIVERSITY OF ILLINOIS AT URBANA-CHAMPAIGN  
URBANA, IL 61801, USA;  
INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE ROMANIAN ACADEMY  
P.O. BOX 1-764, BUCHAREST RO-70700, ROMANIA  
*E-mail address:* `zaharesc@math.uiuc.edu`