Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser.
Volume 30, 2003, Pages 71–77
ISSN: 1223-6934

Fluide de Bingham dans une couche mince

Renata Bunoiu et Srinivasan Kesavan

Résumé. On considère un modèle nonlinéaire qui décrit le comportement d'un fluide de Bingham dans une couche de faible épaisseur représentée par l'ouvert $]0,1[\times]0,\varepsilon[$, où $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre. Après avoir transformé le problème en un problème défini sur l'ouvert fixe $]0,1[\times]0,1[$, on étudie la limite lorsque $\varepsilon \to 0$. On étudie l'existence et l'unicité du problème limite et on le compare avec un modèle unidimensionnel utilisé par les ingénieurs.

Classification AMS 2000 des sujets. 76A05,76A20.
Mots clef et phrases. fluide non newtonnien, couches minces.

1. Introduction

Un fluide de type Bingham, qui est un milieu visco-plastique, vérifie les lois générales de la mécanique des milieux continus et a une loi de comportement non linéaire particulière. Il est utilisé pour modéliser plusieurs types de fluides, comme par exemple des peintures et la lave volcanique, d'où le grand intérêt de son étude.

Dans ce travail, nous étudions le comportement asymptotique d'un fluide de Bingham dans un domaine mince, représenté par l'ouvert $]0,1[\times]0,\varepsilon[$, où ε est un petit paramètre strictement positif. Rappelons que ce type d'étude a déjà été faite et des résultats ont été obtenus pour plusieurs fluides. Le premier résultat, dû à Bayada et Chambat [2], justifie l'équation de Reynolds, obtenue à partir des équations de Stokes considérées dans un domaine mince. L'écoulement du type Navier-Stokes est traîté par Assemien, Bayada et Chambat [1], ainsi que par Nazarov [10], pour différentes conditions aux limites du domaine d'étude.

Pour les problèmes non linéaires, plusieurs résultats sont connus, mais aucun n'englobe le cas du fluide de Bingham. Ainsi, l'écoulement d'un fluide dont la viscosité est donnée par une loi de puissance a été traîté par Mikelic et Tapiéro [9] et par Bourgeat, Mikelic et Tapiéro [3]. Par ailleurs, Taous [11] a étudié une classe des fluides à viscosité non linéaire, le modèle de viscosité étant celui de Litvinov [7]. Enfin, Bunoiu et Saint Jean Paulin [4] ont étudié une classe des fluides à viscosité non linéaire, parmi lesquels ont trouve les fluides du type Cross, Carreau et Williamson.

Dans le travail présenté ici, à partir du modèle bidimensionnel considéré dans Duvaut - Lions [5] sous la forme d'une inéquation variationnelle, inéquation qui a comme inconnues la vitesse et la pression du fluide, on se ramène à un problème posé dans un domaine indépendant du paramètre ε. Dans ce problème, dans lequel les

Reçu: le 11 décembre 2002.

inconnues dépendent toujours de ε, on passe à la limite lorsque ε tend vers zéro. Le problème obtenu est étudié et comparé à un modèle utilisé par les ingénieurs.

2. Estimations *a priori*

Soit $\Omega_\varepsilon =]0,1[\times]0,\varepsilon[$, un ensemble ouvert bidimensionnel, où ε est un paramètre réel strictement positif. Soit $\Omega = \Omega_1$, l'ouvert de référence. Etant donné un point générique $(x_1,x_2) \in \Omega_\varepsilon$, on lui associe le point $(x,y) = (x_1,x_2/\varepsilon) \in \Omega$. Ceci nous donne une correspondance entre les fonctions $\varphi : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$ et les fonctions $\widehat{\varphi} : \Omega \to \mathbb{R}$, donnée par

$$\widehat{\varphi}(x,y) = \varphi(x_1,x_2).$$

Soit $\mathbf{f} = (f_1,f_2) \in (L^2(\Omega))^2$ une fonction donnée. On pose $\mathbf{f}_\varepsilon \in (L^2(\Omega_\varepsilon))^2$ telle que $\widehat{\mathbf{f}_\varepsilon} = \mathbf{f}$. On considère un fluide de Bingham de viscosité $\mu\varepsilon^2$ et de seuil de plasticité $g\varepsilon$ (cf. Lions et Sanchez-Palencia [6]), où $\mu > 0$ et $g > 0$ sont des constantes indépendantes de ε. Si $\mathbf{u}_\varepsilon$ est la vitesse et p_ε est la pression du fluide, alors le couple $(\mathbf{u}_\varepsilon,p_\varepsilon)$ vérifie l'inéquation variationnelle (cf. Duvaut et Lions [5]) :

$$\mu\varepsilon^2 \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla\mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla(\mathbf{v} - \mathbf{u}_\varepsilon) dx_1 dx_2 + g\varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\mathbf{v}| dx_1 dx_2 - g\varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\mathbf{u}_\varepsilon| dx_1 dx_2 \geq$$
$$\int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{f}_\varepsilon \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}_\varepsilon) dx_1 dx_2 + \int_{\Omega_\varepsilon} p_\varepsilon \operatorname{div}(\mathbf{v} - \mathbf{u}_\varepsilon) dx_1 dx_2, \tag{1}$$

pour tout $\mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega_\varepsilon))^2$, ainsi que la condition d'incompressibilité

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon. \tag{2}$$

On choisit des fonctions test particulières dans l'inéquation (1) et on utilise les inégalités de Poincaré et Cauchy-Schwartz pour obtenir des estimations *a priori* pour la vitesse et la pression. En considérant les fonctions $\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon$ et $\widehat{p}_\varepsilon$, qui sont les transformées sur Ω de la vitesse et de la pression respectivement, selon la règle décrite plus haut, on démontre le résultat suivant :

Lemme 2.1. *Il existe une constante $c > 0$, indépendante de ε, telle que*

$$\left|\frac{\partial \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon}{\partial x}\right|_{0,\Omega} \leq c\varepsilon^{-1}, \quad \left|\frac{\partial \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon}{\partial y}\right|_{0,\Omega} \leq c, \quad |\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon|_{0,\Omega} \leq c \tag{3}$$

$$|\widehat{p}_\varepsilon|_{0,\Omega} \leq c, \quad \left\|\frac{\partial \widehat{p}_\varepsilon}{\partial x}\right\|_{-1,\Omega} \leq c, \quad \left\|\frac{\partial \widehat{p}_\varepsilon}{\partial y}\right\|_{-1,\Omega} \leq c\varepsilon. \tag{4}$$

où $|\cdot|_{0,\Omega}$ désigne la norme dans $L^2(\Omega)$ (ou $(L^2(\Omega))^2$, selon le cas) et $||\cdot||_{s,\Omega}$ désigne celle de l'espace $H^s(\Omega)$. □

Des résultats classiques d'analyse fonctionnelle impliquent qu'on a, pour une sous-suite, les convergences suivantes :

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{u}, \quad \frac{\partial \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon}{\partial y} \rightharpoonup \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \quad \varepsilon\frac{\partial \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon}{\partial x} \rightharpoonup 0 \text{ dans } (L^2(\Omega))^2 \text{ faible} \\ \widehat{p}_\varepsilon \rightharpoonup p \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible.} \end{cases} \tag{5}$$

La convergence pour la dérivée par rapport à la variable x est justifiée par l'existence d'une fonction $\mathbf{z} \in (\mathbf{L^2}(\boldsymbol{\Omega}))^\mathbf{2}$ telle que $\varepsilon\frac{\partial \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon}{\partial x} \rightharpoonup \mathbf{v}$ dans $(L^2(\Omega))^2$ faible et par le fait que $\{\frac{\partial \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon}{\partial x}\}$ est borné dans $(H^{-1}(\Omega))^2$.

3. Quelques espaces fonctionnels

Ce paragraphe est consacré à la démonstration de deux résultats préliminaires, qui vont permettre de passer à la limite dans le problème de départ, d'une part, et de montrer l'équivalence entre le problème limite obtenu et un nouveau problème dans lequel la pression limite n'apparaît pas explicitement, d'autre part.

Grâce aux convergences détaillées en (5), on remarque que la limite $\mathbf{u}$, ainsi que sa dérivée par rapport à la variable y, appartiennent à l'espace $(L^2(\Omega))^2$, mais nous n'avons pas d'information sur la dérivée de $\mathbf{u}$ dans la direction x. C'est pourquoi, dans la suite, on est amené à étudier l'espace des fonctions $v \in L^2(\Omega)$ telles que $\dfrac{\partial v}{\partial y} \in L^2(\Omega)$. On montre que ces fonctions admettent une trace sur une partie du bord du domaine Ω, constituée par les droites

$$\Gamma_i = \{(x,y)|\ 0 \leq x \leq 1, y = i\}, \text{ pour } i = 0,1.$$

De plus, si v et w sont de telles fonctions, en utilisant un résultat de densité qu'on prouve, on déduit que l'on a la formule de Green suivante :

$$\int_\Omega v\frac{\partial w}{\partial y}dxdy + \int_\Omega w\frac{\partial v}{\partial y}dxdy = \int_{\Gamma_1} vwdx - \int_{\Gamma_0} vwdx. \tag{6}$$

Posons

$$Tv = \int_0^1 v(x,y)dy, v \in L^2(\Omega). \tag{7}$$

On prouve que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ on a l'égalité suivante :

$$\frac{d}{dx}(T(v)) \ = \ T\left(\frac{dv}{dx}\right). \tag{8}$$

On définit l'espace

$$W = \left\{ v \in L^2(\Omega) \,\middle|\, \frac{\partial v}{\partial y} \in L^2(\Omega), Tv \in H^1(]0,1[) \right\} \tag{9}$$

qui est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(v,w)_W = \int_\Omega vwdxdy + \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}dxdy + \int_0^1 \frac{d}{dx}(Tv)\frac{d}{dx}(Tw)dx. \tag{10}$$

On considère le sous-espace fermé

$$W_0 = \{v \in W | v = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \text{ et } Tv \in H_0^1(]0,1[)\},$$

pour lequel on a le résultat suivant :

Proposition 3.1. *$H_0^1(\Omega)$ est dense dans W_0.*

Idée de la démonstration : On voit facilement que T est continue de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(]0,1[)$ et de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(]0,1[)$. Donc $H_0^1 \subset W_0$. On choisit $v \in W_0$ tel que $(v,\varphi)_W = 0$ pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. On montrera que $v = 0$, ce qui achèvera la démonstration. En choisissant $\varphi(x,y) = w(x)\xi(y) \in \mathcal{D}(\Omega)$ où $w(x) \in \mathcal{D}(]0,1[)$ et $\xi(y) \in \mathcal{D}(]0,1[)$ avec $\int_0^1 \xi(y)dy = 1$, on montre que $\dfrac{d^2(Tv)}{dx^2} \in L^2(]0,1[)$. Ensuite on choisit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, et en utilisant le résultat précédent sur Tv, on montre que $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \in L^2(\Omega)$. Si $\varphi = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a $T\varphi = 0$. Ceci nous donne $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(v - \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = 0$, d'où on déduit que $v - \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = c(x)$, que l'on montre ensuite être égal à $\dfrac{d^2(Tv)}{dx^2}$.

Enfin, si $\varphi \in W_0$, on montre que

$$(v,\varphi)_W = \int_0^1 \left(c(x) - \frac{d^2(Tv)}{dx^2}\right) T\varphi dx = 0,$$

d'où l'on déduit que $v = 0$. □

C'est ce résultat de densité qui va nous permettre de passer à la limite quand ε tend vers zéro.

Enfin, on doit considérer aussi dans la suite l'espace

$$W_{00} = \{v \in W_0 | \, Tv = 0 \text{ dans }]0,1[\,\}. \tag{11}$$

On démontre un résultat du type "de Rham " dans un espace anisotrope, qui nous permet de justifier plus loin l'équivalence annoncée au début de ce paragraphe.

Proposition 3.2. *Soit $F \in W_0'$, le dual de l'espace W_0, tel que $F(v) = 0$ pour tout $v \in W_{00}$. Alors il existe $p \in L^2(]0,1[)$ tel que, pour tout $v \in W_0$,*

$$F(v) = \int_0^1 p(x) \frac{d}{dx}(Tv) dx.$$

Idée de la démonstration : Si $\xi \in \mathcal{D}(]0,1[)$, tel que $\int_0^1 \xi(y) dy = 1$ et si $v \in W_0$, alors $z \in W_{00}$, où

$$z(x,y) = v(x,y) - Tv(x)\xi(y).$$

D'après le théorème de Riesz, il existe $w \in W_0$ tel que

$$F(v) = (w,v)_W, \quad v \in W_0,$$

d'où on peut déterminer p. □

Remarque 3.1. *L'espace W_{00} joue ici un rôle analogue à celui de l'espace de fonctions vectorielles à divergence nulle (comme dans l'étude du problème de Stokes, par exemple).*

4. Passage à la limite

Dans la suite, nous allons passer à la limite dans le problème de départ.

On remarque d'abord que, à partir de la condition d'incompressibilité (2), on peut démontrer le résultat suivant.

Lemme 4.1. *Soit $\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{u} = (u_1,u_2)$ dans $(L^2(\Omega))^2$ faible. Alors $u_2 = 0$ et $Tu_1 = 0$.*

Comme la deuxiéme composante de la vitesse limite est nulle, on peut alors poser $\mathbf{u} = (u,0)$.

Soit $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)$. Dans la relation (1), on prend comme fonction test la fonction $\mathbf{v}_\varepsilon \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$ telle que $\widehat{\mathbf{v}}_\varepsilon = \mathbf{v}$ et ensuite on transforme les intégrales sur Ω_ε en intégrales sur l'ensemble Ω, indépendant du paramètre ε.

A partir des estimations *a priori* pour la pression données par le lemme 2.1, on obtient qu'il existe une sous-suite telle que $\widehat{p}_\varepsilon \rightharpoonup p$ dans $L^2(\Omega)$ faible et $\frac{\partial \widehat{p}_\varepsilon}{\partial y} \to 0$ dans $H^{-1}(\Omega)$. On déduit que $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ et ensuite on peut prouver que la pression limite est indépendante de la deuxième variable, donc $p(x,y) = p(x)$.

Par ailleurs, le lemme 4.1 implique l'appartenance de u à l'espace W_{00}. En passant à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$, on obtient, grâce aux résultats de convergence annoncés dans (5):

Proposition 4.1. *Soit* $(\mathbf{u}_\varepsilon,p_\varepsilon)$ *solution de (1) tel que* $\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{u} = (u,0)$ *et* $\widehat{p}_\varepsilon \rightharpoonup p$ *(pour une sous-suite). Alors* $(u,p) \in W_{00} \times L^2(\Omega)$ *vérifie :*

$$\mu \int\limits_\Omega \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}(v-u)dxdy + g\int\limits_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right| dxdy - g\int\limits_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| dxdy \geq \int\limits_\Omega f_1(v-u)dxdy + \int\limits_\Omega p\frac{\partial}{\partial x}(v-u)dxdy, \tag{12}$$

pour tout $v \in W_0$ *où* f_1 *est la première composante de la fonction* $\mathbf{f}$*. De plus,* $p = p(x)$*.*

La formulation du problème limite trouvé dans la proposition 4.1 ne permet pas de prouver un résultat d'unicité. En effet, si on suppose l'existence de deux solutions (u,p) et $(\bar{u},\bar{p})$, on ne peut pas conclure en utilisant les techniques habituelles. Mais si l'on choisit une fonction test $v \in W_{00}$ dans le problème limite, alors la dernière intégrale disparaît et on cherche $u \in W_{00}$ tel que pour tout $v \in W_{00}$ on ait :

$$\mu \int\limits_\Omega \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}(v-u)dxdy + g\int\limits_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right| dxdy - g\int\limits_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| dxdy \geq \int\limits_\Omega f_1(v-u)dxdy. \tag{13}$$

On peut prouver l'équivalence entre cette dernière formulation et le problème limite, car la pression p peut être retrouvée à partir de la relation (13) suivant des démarches analogues à celles décrites dans Duvaut et Lions [5]. Une application du théorème de Hahn-Banach et de la proposition 3.2, nous donne p à partir de u vérifiant (13), tel que (u,p) vérifie (12). Finalement, en utilisant un raisonnement par l'absurde, ainsi que l'appartenance de la vitesse limite à l'espace W_{00}, on montre le résultat suivant.

Proposition 4.2. *Le problème (13) admet une solution unique* u*.*

Grâce au résultat d'unicité, on déduit que toute la suite $\widehat{u}_{\varepsilon,1}$ converge vers u, mais nous n'avons pas obtenu de résultat d'unicité pour la pression p.

5. Interprétation des résultats

Si $\dfrac{\partial u}{\partial y} \neq 0$, on peut montrer à partir de (12) que u vérifie l'équation différentielle suivante :

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y} + g\ \mathrm{sgn}(\frac{\partial u}{\partial y})\right) = f_1 - \frac{\partial p}{\partial x}. \tag{14}$$

Soit maintenant σ_ε le tenseur de contraintes associé à $\mathbf{u}_\varepsilon$. Alors $\sigma^\varepsilon = -p_\varepsilon I + \sigma^{D,\varepsilon}$ et d'après la loi de comportement du fluide de Bingham :

$$\begin{cases} (\sigma^\varepsilon_{II})^{\frac{1}{2}} \leq g\,\varepsilon \Leftrightarrow D^\varepsilon_{ij} = 0,\ i,j = 1,2 \\ \\ (\sigma^\varepsilon_{II})^{\frac{1}{2}} > g\,\varepsilon \Leftrightarrow D^\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left(1 - \frac{g\,\varepsilon}{(\sigma^\varepsilon_{II})^{\frac{1}{2}}}\right)\sigma^{D,\varepsilon}_{ij}, \end{cases} \tag{15}$$

où $D^\varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_{\varepsilon,i}}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_{\varepsilon,j}}{\partial x_i}\right)$ et $\sigma^\varepsilon_{II} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \sigma^{D,\varepsilon}_{ij}\sigma^{D,\varepsilon}_{ij}$.

On peut montrer que $\{\varepsilon^{-1}\widehat{\sigma}^{D,\varepsilon}_{ij}\}$ est borné dans $L^2(\Omega)$ et donc (quitte à extraire une sous-suite) $\varepsilon^{-1}\widehat{\sigma}^{D,\varepsilon}_{ij} \rightharpoonup \sigma^*_{ij}$ dans $L^2(\Omega)$ faible.

On rappelle que les équations de mouvement s'écrivent :

$$-\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma^{D,\varepsilon}_{ij} \ = \ f_{\varepsilon,i} - \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial x_i},\ i = 1,2, \text{ dans } \Omega_\varepsilon.$$

En utilisant la correspondance entre les fonctions définies sur Ω_ε et celles définies sur Ω, on obtient dans Ω les égalitées suivantes :

$$-\frac{\partial}{\partial x}\widehat{\sigma}^{D,\varepsilon}_{11} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y}\widehat{\sigma}^{D,\varepsilon}_{12} = f_1 - \frac{\partial \widehat{p}_\varepsilon}{\partial x} \tag{16}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\widehat{\sigma}^{D,\varepsilon}_{21} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y}\widehat{\sigma}^{D,\varepsilon}_{22} = f_2 - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \widehat{p}_\varepsilon}{\partial x} \tag{17}$$

En passant à la limite dans les équations ci-dessus, on obtient :

$$-\frac{\partial}{\partial y}(\sigma^*_{12}) = f_1 - \frac{\partial p}{\partial x}. \tag{18}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{19}$$

En comparant avec (14) on obtient

$$\sigma^*_{12} = \mu\frac{\partial u}{\partial y} + g\ \operatorname{sgn}(\frac{\partial u}{\partial y}) \quad \text{si} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \neq 0 \tag{20}$$

(à une fonction en x additive près). On veut comparer cela avec un modèle unidimensionnel connu des ingénieurs (cf. Liu et Mei [8]), ou si τ est la contrainte, alors on a :

$$\mu\frac{\partial u}{\partial y} = \begin{cases} 0 \text{ si } |\tau| < g \\ \\ \tau - g\ \operatorname{sgn}(\frac{\partial u}{\partial y}) \text{ si } |\tau| > g. \end{cases} \tag{21}$$

Or, on remarque que pour une fonction additive identiquement nulle, si $\dfrac{\partial u}{\partial y} \neq 0$, alors la relation (20) indique que $|\sigma^*_{12}| > g$. Donc, si $|\sigma^*_{12}| \leq g$ on a $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ et on retrouve ainsi le modèle du [8]. Cette étude fait l'objet d'un travail en cours.

Références

[1] A. Assemien, G. Bayada, M. Chambat, Inertial effects in the asymptotic behavior of a thin film flow, *Preprint 121*, Equipe d'Analyse Numérique, Lyon-Saint-Etienne.

[2] G. Bayada, M. Chambat, The trannsition between the Stokes equations and the Reynolds equation: a mathematical proof, *Appl. Math. and Opt.*, **14**, 73-93 (1986).

[3] A. Bourgeat, A. Mikelic, R. Tapiéro, Dérivation des équations moyennées décrivant un écoulement non newtonien dans un domaine de faible épaisseur, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **316**(I), 965-970 (1993).

[4] R. Bunoiu, J. Saint Jean Paulin, Nonlinear viscous flow through a thin slab in the lubrication case, *Rev. Roum. Math. Pures et Appliquées*, **XLV**(4), 577-591 (2000).

[5] G. Duvaut, J.- L. Lions, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, 1972.

[6] J.- L. Lions, E. Sanchez - Palencia, Ecoulement d'un fluide viscoplastique de Bingham dans un milieu poreux, *J. Math. Pures Appl.*, **60**, 341-360 (1981).

[7] W.G. Litvinov, Models for Laminar and Turbulent Flows of Viscous and Nonlinear Viscous Fluids, *Recent developments in theoretical fluid mechanic*, Longman Scientific ad Technical, Galdi, J.P. et Necas, J. (éd.), Pitman Research Notes in Mathematics Series, 291, 1992.

[8] K.F. Liu, C.C. Mei, Approximate equations for the slow spreading of a thin sheet of Bingham plastic fluid, *Phys. Fluids A*, **2**(1), 30-36 (1990).

[9] A. Mikelic, R. Tapiero, Mathematical derivation of the power law describing polymer flow through a thin slab, *M2 A.N.*, **29**, 3-22 (1995).

[10] S.A. Nazarov, Asymptotic solution of the Navier-Stokes problem on the flow of a thin layer of fluid, *Siberian Math. J.*, **31**, 296-307 (1990).

[11] K. Taous, Equations de Reynolds pour une large classe de fluides non-newtoniens, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **322**(I), 1213-1218 (1995).

(Renata Bunoiu) Département de Mathématiques
Université de Metz
Ile du Saulcy, 57014, Metz, France
Tel: 33-(0)387547289
E-mail address: bunoiu@poncelet.sciences.univ-metz.fr

(Srinivasan Kesavan) The Institute of Mathematical Sciences
C.I.T, Campus
Taramani, Chennai, 600113, Inde
Tel/Fax: 91-44 2542588
E-mail address: kesh@imsc.res.in