

Un schéma de prédiction-correction pour un problème hypervisco-élastique en grandes déformations avec contact et frottement

THIERRY-VINCENT HOARAU-MANTEL ET MICHAËL BARBOTEU

RÉSUMÉ. Nous présentons dans ce travail un algorithme de type prédiction-correction pour le traitement numérique des problèmes hypervisco-élastiques de contact frottant.

Classification AMS 2000 des sujets. 65M06, 65M60, 90C53, 74S05, 74S20, 74M10, 74M15.

Mots clef et phrases. milieux cellulaires, comportement hypervisco-élastique, grandes déformations, autocontact, méthode de Newton généralisée, quasi-Lagrangien augmenté.

1. Introduction

La motivation de ce travail vient de l'étude du comportement du bois soumis à de fortes compressions. La microstructure d'un tel matériau se modélise sous la forme d'un réseau de cellules hexagonales disposées en nid d'abeilles. Soumise à de fortes compressions, la structure cellulaire est caractérisée par des phénomènes de flambement et d'autocontact des parois supérieures et inférieures des cellules hexagonales. Afin de mettre en oeuvre de telles simulations, nous donnons, dans un premier temps, une modélisation du comportement mécanique de la structure cellulaire ; pour se faire nous allons utiliser des lois hypervisco-élastiques, dont la description est faite à la première section. Par ailleurs le phénomène d'autocontact est modélisé par une loi de contact unilatéral et loi de frottement sec de Coulomb (section 2). Formulées en terme de pseudo-potentiels, ces lois de contact et de frottement s'intègrent parfaitement dans un processus quasi-statique. Le problème peut alors se formuler (section 3) sous forme variationnelle incrémentale. Une technique de quasi-lagrangien augmenté, précisée à la section 4, introduite par Alart et Curnier (voir [1]), est utilisée pour résoudre ce problème non différentiable et non linéaire. L'algorithme mise en oeuvre, détaillé à la section 5, repose sur un schéma de type prédiction-correction couplant différences finies (méthode de point milieu) et itérations linéaires (méthode de Newton généralisée aux opérateurs non différentiables). La robustesse de l'algorithme est évaluée (section 6) sur des tests en dimension 2 de compression pilotées aussi bien en forces qu'en déplacements. Les simulations pilotées en déplacements demandent cependant un traitement numérique spécifique lors de la phase de prédiction.

Reçu: le 11 décembre 2002.

2. Lois constitutives

Nous allons travailler avec des matériaux de type Kelvin-Voigt hypervisco-élastiques. Pour de tels matériaux, la densité d'énergie \hat{W} se définit comme la somme d'une densité d'énergie hyperélastique \hat{W}^e et d'une densité visqueuse \hat{W}^ν , (voir [5] ou [7])

$$\hat{W}(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}}) = \hat{W}^e(\mathbf{F}) + \hat{W}^\nu(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}}), \quad (1)$$

ou encore

$$\tilde{W}(\mathbf{C}, \dot{\mathbf{C}}) = \tilde{W}^e(\mathbf{C}) + \tilde{W}^\nu(\mathbf{C}, \dot{\mathbf{C}}),$$

où

- $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})$,
- \mathbf{u} : champ de déplacements,
- $\dot{\mathbf{F}}$: dérivée temporelle de \mathbf{F} .

Cette densité d'énergie permet d'engendrer le tenseur de Piola-Kirchoff $\hat{\mathbf{T}}$:

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}}) = \hat{\mathbf{T}}^e(\mathbf{F}) + \hat{\mathbf{T}}^\nu(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}})$$

avec

- $\hat{\mathbf{T}}^e(\mathbf{F}) = \frac{\partial \hat{W}^e(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} = \mathbf{F} \frac{\partial \tilde{W}^e(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}}$,
- $\hat{\mathbf{T}}^\nu(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}}) = \mathbf{F} \frac{\partial \tilde{W}^\nu(\dot{\mathbf{C}})}{\partial \dot{\mathbf{C}}}$, en analogie avec le calcul du tenseur élastique $\hat{\mathbf{T}}^e$.

Des exemples de lois hypervisco-élastiques peuvent se trouver notamment dans [5], [8]–[10]. Comme exemple de lois (voir [5, 8]), nous pourrions combiner par la suite les densités hyperélastiques et visqueuses suivantes :

$$\tilde{W}_{\text{K-S}^t\text{V}}^e = \hat{W}_{\text{K-S}^t\text{V}}^e(\mathbf{F}) = \frac{\lambda}{8} (I_1 - 2)^2 + \frac{\mu}{4} (I_1^2 - 2I_1 - 2J^2 + 2), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{\text{Ogden}}^e &= \hat{W}_{\text{Ogden}}^e(\mathbf{F}) = C_1 (I_1 - 2) + C_2 (I_1 + J^2 - 1) \\ &\quad + a (J^2 - 1) - (2C_1 + 4C_2 + 2a) \ln J, \end{aligned} \quad (3)$$

les coefficients C_i et a dépendent du matériau,

$$\tilde{W}_{\text{Rob}}^e = \hat{W}_{\text{Rob}}^e(\mathbf{F}) = \lambda (J - 1 - \ln J) + \frac{\mu}{4} (I_1^2 - 2I_1 - 2J^2 + 2), \quad (4)$$

$$\tilde{W}^\nu_1 = \hat{W}^\nu(\dot{\mathbf{C}}) = \frac{\eta}{2} J_2, \quad (5)$$

$$\tilde{W}^\nu_2 = \hat{W}^\nu(\dot{\mathbf{C}}) = \frac{\eta}{4} J_2 (I_1 - 2), \quad (6)$$

où

- λ et μ sont les constantes de Lamé,
- les deux invariants $I_1 = \text{tr}(\mathbf{F}^T \mathbf{F})$ et $J = \det(\mathbf{F})$ du tenseur Green-Cauchy en dimension 2,
- $J_2 = \text{tr} \dot{\mathbf{C}}^2$,
- η n'est autre que le paramètre de viscosité.

3. Lois de contact et de frottement

En ce qui concerne les lois de contact et de frottement, nous optons pour les lois classiques de contact unilatéral et frottement sec de Coulomb. Ces lois sont formulées en terme de pseudo-potentiels, liant respectivement le champ des écarts normaux g_ν à la contrainte normale Π_ν et les vitesses tangentielles $\dot{\mathbf{g}}_t$ à la contrainte tangentielle Π_τ

$$\Pi_\nu \in \partial\Psi_{\mathbb{R}^+}(g_\nu) \text{ et } \Pi_\tau \in \partial\Psi_{C(\Pi_\nu)}^*(\dot{\mathbf{g}}_\tau),$$

où $C(\Pi_\nu)$ représente le disque convexe de rayon $-\mu\Pi_\nu$ avec μ coefficient de frottement et $\Psi_{C(\Pi_\nu)}^*$ est la conjuguée de Fenchel de la fonction indicatrice $\Psi_{C(\Pi_\nu)}$.

Nous remarquons que dans un processus quasi-statique, ces lois multivoques peuvent se réécrire sous forme incrémentale ; il suffit de remplacer le terme $\dot{\mathbf{g}}$ par $\dot{\mathbf{g}}dt$ avec dt incrément de temps.

4. Formulation variationnelle

Les lois de contact et de frottement étant formulées en terme de pseudo-potentiels, il est naturel de vouloir les intégrer dans un processus quasi-variationnel qui fait intervenir la loi constitutive du milieu considéré, dont la densité dérive elle même d'un potentiel.

Nous considérons deux corps assimilés aux domaines $\Omega_i, i = 1, 2$ de frontière régulières Γ_i . Nous supposons que ces frontières Γ_i contiennent en trois parties disjointes mesurables Γ_{i1}, Γ_{i2} et $\Gamma_i^c, i = 1, 2$. Sur les parties Γ_{i1} , nous imposons une condition aux limites de déplacements imposés $\bar{\mathbf{u}}_i$. Chacun des corps Ω_i subit des efforts volumiques \mathbf{f}_{0i} ainsi que des efforts surfaciques \mathbf{f}_{2i} sur la partie Γ_{i2} . Nous notons $\xi_i, i = 1, 2$, la condition à l'instant initial portant sur le champ des déplacements \mathbf{u}_i du corps Ω_i . Les deux corps Ω_1 et Ω_2 peuvent entrer en contact via l'interface de contact Γ^c . Il convient d'introduire par la suite les champs de déplacements réels et virtuels ainsi que les efforts définis sur l'union des deux corps $\Omega_1 \cup \Omega_2$ par

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}_1 \\ \bar{\mathbf{u}}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{01} \\ \mathbf{f}_{02} \end{pmatrix}$$

et $\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{21} \\ \mathbf{f}_{22} \end{pmatrix}$.

De tels champs, définis sur la globalité du système $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ servent à prendre en compte les contraintes générées par l'interaction entre le corps contacteur Ω_1 et le corps cible Ω_2 . Nous notons respectivement V_i et $\bar{V}_i, i = 1, 2$, les espaces des champs tests et champs de déplacements admissibles définis comme suit

$$V_i = \{\mathbf{w}_i \in W^{1,s}(\Omega_i; \mathbb{R}^n), \mathbf{w}_i|_{\Gamma_{i1}} = 0\} \quad \text{et} \quad \bar{V}_i = \{\mathbf{w}_i \in W^{1,s}(\Omega_i; \mathbb{R}^n), \mathbf{w}_i|_{\Gamma_{i1}} = \bar{\mathbf{u}}_i\}.$$

La formulation variationnelle de ce problème de contact frottant est

Problème 4.1. *Trouver un champ de déplacements \mathbf{u} vérifiant*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}(t) \in \bar{V}_1 \times \bar{V}_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{u}(0) = \boldsymbol{\xi}, \\ \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{W}^e(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} : \nabla \mathbf{w} \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{F} \frac{\partial \tilde{W}^\nu(\dot{\mathbf{C}})}{\partial \dot{\mathbf{C}}} : \nabla \mathbf{w} \, dx + \int_{\Gamma^c} \Pi_\nu g_\nu \, da \\ + \int_{\Gamma^c} \boldsymbol{\Pi}_\tau \cdot \dot{\mathbf{g}}_\tau \, da = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{w} \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{w} \, da \quad \forall \mathbf{w} \in V_1 \times V_2. \end{array} \right.$$

Les efforts de contact Π_ν et de frottement $\boldsymbol{\Pi}_\tau$ sont respectivement définies par

$$\Pi_\nu \in \partial \Psi_{\mathbb{R}^+}(g_\nu) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Pi}_\tau \in \partial \Psi_{C(\Pi_\nu)}^*(\dot{\mathbf{g}}_\tau).$$

Remarquons que les termes de contact et de frottement sont non différentiables. Nous allons voir comment palier cette difficulté en adoptant une formulation en quasi-Lagrangien augmenté.

5. Formulation en quasi-lagrangien augmenté

Afin de régulariser, la non différentiabilité des termes de contact et de frottement, nous utilisons une formulation en quasi-lagrangien augmenté, introduite par Alart et Curnier (voir [1]). Cette formulation possède l'avantage de traiter les lois multivoques de contact et de frottement telle qu'elles se présentent. Toutes les grandeurs à venir sont supposées totalement discrétisées à la fois en espace (méthode éléments finis) et en temps (α -méthode). Nous désignons respectivement par \mathbf{u}_{n+1}^h et $\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^h$ les approximations discrètes de \mathbf{u} et $\boldsymbol{\lambda}$. Le terme \mathbf{v}_{n+1}^h est l'approximation de la vitesse définie à partir de \mathbf{u}_{n+1}^h et \mathbf{u}_n^h .

En appliquant une discrétisation totale en espace et en temps à la formulation variationnelle du problème 4.1, nous obtenons la formulation incrémentale

Problème 5.1. *Trouver un champ de déplacements \mathbf{u}_{n+1}^h vérifiant*

$$\mathbf{u}_{n+1}^h \in \bar{V}_1^h \times \bar{V}_2^h, \quad \mathbf{u}_0^h = \boldsymbol{\xi}^h$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{W}^e(\mathbf{F}_{n+1}^h)}{\partial \mathbf{F}} : \nabla \mathbf{w}^h \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{F}_{n+1}^h \frac{\partial \tilde{W}^\nu(\delta \mathbf{C}_{n+1}^h)}{\partial \dot{\mathbf{C}}} : \nabla \mathbf{w}^h \, dx \\ + \int_{\Gamma^c} (\Pi_\nu)_{n+1} (g_\nu)_{n+1} \, da + \int_{\Gamma^c} (\boldsymbol{\Pi}_\tau)_{n+1} \cdot (\dot{\mathbf{g}}_\tau)_{n+1} \, da \\ = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0(t_{n+1}) \cdot \mathbf{w}^h \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t_{n+1}) \cdot \mathbf{w}^h \, da \\ \forall \mathbf{w}^h \in V_1^h \times V_2^h, \end{array} \right. \quad (7)$$

avec $(\Pi_\nu)_{n+1} \in \partial \Psi_{\mathbb{R}^+}((g_\nu)_{n+1})$ et $(\boldsymbol{\Pi}_\tau)_{n+1} \in \partial \Psi_{C((\Pi_\nu)_{n+1})}^*((\dot{\mathbf{g}}_\tau)_{n+1})$. Le terme $\delta \mathbf{C}_{n+1}^h$ est défini à partir des déplacements incrémentaux \mathbf{u}_{n+1}^h et \mathbf{u}_n^h et de la vitesse incrémentale \mathbf{v}_{n+1}^h . La quantité \mathbf{v}_{n+1}^h représente l'approximation discrète de la vitesse $\dot{\mathbf{u}}$, définie en utilisant la règle des trapèzes généralisée précisée par la suite à

la relation (13). Les termes $\frac{\partial \hat{W}^e(\mathbf{F}_{n+1}^h)}{\partial \mathbf{F}}$ et $\frac{\partial \tilde{W}^\nu(\delta \mathbf{C}_{n+1}^h)}{\partial \mathbf{C}}$ représentent en fait respectivement les valeurs discrètes des quantités $\frac{\partial \hat{W}^e(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}$ et $\frac{\partial \tilde{W}^\nu(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}}$ prises en \mathbf{F}_{n+1}^h et $\delta \mathbf{C}_{n+1}^h$. Les espaces V_i^h et \bar{V}_i^h sont respectivement les espaces de dimension finie obtenus à partir des espaces continus V_i et \bar{V}_i , $i = 1, 2$.

Par la suite afin d'alléger les notations, nous omettons de préciser l'exposant de discrétisation spatiale h .

En utilisant une approche en quasi-Lagrangien augmenté (pour plus de détails nous renvoyons notamment à [1]), le problème 5.1 devient

Problème 5.2. *Trouver un champ de déplacements \mathbf{u}_{n+1} vérifiant*

$$\mathbf{u}_{n+1} \in \bar{V}_1^h \times \bar{V}_2^h, \mathbf{u}_0 = \boldsymbol{\xi},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{W}^e(\mathbf{F}_{n+1})}{\partial \mathbf{F}} : \nabla \mathbf{w} \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{F}_{n+1} \frac{\partial \tilde{W}^\nu(\delta \mathbf{C}_{n+1})}{\partial \mathbf{C}} : \nabla \mathbf{w} \, dx \\ + \int_{\Gamma^c} \nabla_{\mathbf{u}}(l_\nu^r + l_\tau^r) \cdot \mathbf{w} \, da + \int_{\Gamma^c} \nabla_{\lambda}(l_\nu^r + l_\tau^r) \cdot \boldsymbol{\gamma} \, da \\ = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0(t_{n+1}) \cdot \mathbf{w} \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t_{n+1}) \cdot \mathbf{w} \, da \\ \forall \mathbf{w} \in V_1^h \times V_2^h, \forall \boldsymbol{\gamma} \in H_c^h, \end{array} \right. \quad (8)$$

le terme H_c^h représente un sous-espace de dimension finie inclus dans l'espace $L^2(\Gamma^c)$.

Les termes l_ν^r et l_τ^r représentent les régularisées des fonctions indicatrices $\Psi_{\mathbb{R}^-}(\gamma_\nu)$ et $\Psi_{\hat{C}(\lambda, (g_\nu)_{n+1})}$ et sont définies de la façon suivante

$$l_\nu^r(\mathbf{w}, \gamma_\nu) = (g_\nu)_{n+1} + \frac{r}{2} |(g_\nu)_{n+1}|^2 - \frac{1}{2r} \text{dist}_{\mathbb{R}^-}^2(\gamma_\nu + r(g_\nu)_{n+1}), \quad (9)$$

et

$$l_\tau^r(\mathbf{w}, \boldsymbol{\gamma}_\tau; (\Pi_\nu)_{n+1}) = (\hat{\mathbf{g}}_\tau)_{n+1} \cdot \boldsymbol{\gamma}_\tau + \frac{r}{2} \|(\hat{\mathbf{g}}_\tau)_{n+1}\|^2 - \frac{1}{2r} \text{dist}_{\hat{C}}^2(\boldsymbol{\gamma}_\tau + r(\hat{\mathbf{g}}_\tau)_{n+1}). \quad (10)$$

La discrétisation est appliquée sur le système $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ mais également sur l'interface de contact. La discrétisation de l'interface se fait via des éléments contact. Pour plus de détails concernant ces éléments contacts, nous renvoyons à [3] ou [9]. Après discrétisation par éléments finis élastiques et de contact, le système (8) peut s'écrire, pour tout champ test élastique $\{w\}$, et tout champ test multiplicateur $\{\gamma\}$,

$$\left(\begin{array}{c} \mathbf{A}(\mathbf{v}_{n+1}) + \mathbf{G}(\mathbf{u}_{n+1}) + \prod_{e=1}^{N_{\Gamma^c}^h} \int_{\Gamma^c e} \nabla_{\mathbf{u}}(l_\nu^r + l_\tau^r) \hat{\varphi}_c \, da \\ \prod_{e=1}^{N_{\Gamma^c}^h} \int_{\Gamma^c e} \nabla_{\lambda}(l_\nu^r + l_\tau^r) \hat{\varphi}_c \, da \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} \{w\} \\ \{\gamma\} \end{pmatrix} = 0, \quad (11)$$

où \mathbf{A} et \mathbf{G} sont respectivement les opérateurs de viscosité et de rigidité définis par

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}_{n+1}) = \prod_{e=1}^{N^h} \int_{\Omega^e} \frac{\partial \hat{W}^e(\mathbf{F}_{n+1})}{\partial \mathbf{F}} : [\nabla \hat{\varphi}] \, dx - \prod_{e=1}^{N^h} \int_{\Omega^e} \mathbf{f}_0(t_{n+1}) \cdot \hat{\varphi} \, dx - \prod_{e=1}^{N_{\Gamma_2}^h} \int_{\Gamma_2^e} \mathbf{f}_2(t_{n+1}) \cdot \hat{\varphi} \, da,$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}_{n+1}) = \prod_{e=1}^{N^h} \int_{\Omega^e} \mathbf{F}_{n+1} \frac{\partial \hat{W}^\nu(\delta \mathbf{C}_{n+1})}{\partial \dot{\mathbf{C}}} : [\nabla \hat{\varphi}] \, dx.$$

Dans les précédentes relations,

- $\{\hat{\varphi}_i\}$ sont les fonctions de base linéaires, constantes par morceaux, prenant la valeur 1 au noeud i et 0 aux autres noeuds (nous avons pris ici une interpolation linéaire de type P_1),
- $[\nabla \hat{\varphi}]$ est le gradient des fonctions de base dans l'élément courant $\hat{\Omega}^e$,
- \prod représente l'opérateur d'assemblage sur les éléments finis, élastiques ou de contact,
- $N_{\Gamma_2}^h$ et $N_{\Gamma^c}^h$ désignent respectivement le nombre d'éléments utilisés pour la discrétisation des domaines Γ_2 et Γ^c ,
- la fonction de base $\hat{\varphi}_c$ dépend du type d'élément contact utilisé (et plus particulièrement de la géométrie de l'élément contact). Pour plus de précisions sur le sujet, nous reportons le lecteur aux références [6] ou [9].

6. Méthode de résolution

En adoptant une forme vectorielle, il est possible de réécrire le système (11) sous la forme

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}_{n+1}) + \mathbf{G}(\mathbf{u}_{n+1}) + \mathcal{F}(\mathbf{u}_{n+1}, \boldsymbol{\lambda}_{n+1}) = \mathbf{0}, \quad (12)$$

où \mathcal{F} représente l'opérateur de contact frottant défini par

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}_{n+1}, \boldsymbol{\lambda}_{n+1}) = \begin{pmatrix} \prod_{e=1}^{N_{\Gamma^c}^h} \int_{\Gamma^c e} \nabla_{\mathbf{u}} (l_\nu^r + l_\tau^r) \cdot \hat{\varphi}_c \, da \\ \prod_{e=1}^{N_{\Gamma^c}^h} \int_{\Gamma^c e} \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} (l_\nu^r + l_\tau^r) \cdot \hat{\varphi}_c \, da \end{pmatrix},$$

Remarquons que dans le système (12), nous utilisons les mêmes notations que celles employées dans le système (11). Il convient cependant de noter que les opérateurs \mathbf{A} , \mathbf{G} et \mathcal{F} présents dans le système (12) ont pour dimension le nombre total de noeuds (élastiques et multiplicateurs).

Afin de résoudre ce système, nous allons adopter une méthode de Newton généralisée (voir [2]) en tenant compte du fait qu'interviennent des opérateurs non différentiables. Cette méthode permet de traiter de manière simultanée les variables déplacements \mathbf{u}_{n+1} et multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}_{n+1}$. Pour cette raison, nous utilisons par la suite la variable \mathbf{x}_{n+1} définie comme suit :

$$\mathbf{x}_{n+1} = (\mathbf{u}_{n+1}, \boldsymbol{\lambda}_{n+1}).$$

Puisque nous allons travailler à présent avec la variable \mathbf{x}_{n+1} , qui concatène les champs de déplacement \mathbf{u}_{n+1} et multiplicateurs $\boldsymbol{\lambda}_{n+1}$, et afin d'obtenir des grandeurs vectorielles homogènes, nous introduisons les quantités $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}$ et $\dot{\mathbf{v}}_{n+1}$ définies par

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = (\mathbf{u}_{n+1}, 0) \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{v}}_{n+1} = (\mathbf{v}_{n+1}, 0).$$

Notons que les termes de vitesses sont définis de façon récursive par:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{n+1} &= \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\alpha \Delta t} - \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} \mathbf{v}_n \quad \text{si } \alpha \neq 0, \\ \mathbf{v}_n &= \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta t} \quad \text{si } \alpha = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

où Δt désigne le pas de temps incrémental. Le paramètre α sert à ajuster au mieux le schéma des différences finies.

L'algorithme, combinant à la fois différences finies et linéarisation de Newton, est constitué de trois étapes

- une étape de prédiction qui donne les champs des déplacements et des vitesses au début de l'incrément,
- une étape de linéarisation de Newton,
- une étape de correction qui sert à actualiser les champs des déplacements et des vitesses.

Posons $\Delta \mathbf{x}^i = (\Delta \mathbf{u}^i, \Delta \boldsymbol{\lambda}^i)$ avec $\Delta \mathbf{u}^i = \mathbf{u}_{n+1}^{i+1} - \mathbf{u}_{n+1}^i$ et $\Delta \boldsymbol{\lambda}^i = \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{i+1} - \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^i$. L'algorithme que nous avons adopté prend la forme suivante.

Algorithme

- Boucle incrémentale n

↪ *Étape de prédiction*

$$\mathbf{x}_{n+1}^0 = \mathbf{x}_n + (1 - k\alpha)\Delta t \dot{\mathbf{v}}_n, \quad \mathbf{v}_{n+1}^0 = (1 - k)\mathbf{v}_n,$$

- Boucle d'itérations linéaires i

↪ *Étape de linéarisation de Newton*

$$\mathbf{x}_{n+1}^i = (\mathbf{u}_{n+1}^i, \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^i)$$

$$\left(\frac{D_{n+1}^i}{\alpha \Delta t} + \mathbf{K}_{n+1}^i + \mathbf{T}_{n+1}^i \right) \Delta \mathbf{x}^i$$

$$= - \left(\mathbf{A}(\mathbf{v}_{n+1}^i) + \mathbf{G}(\mathbf{u}_{n+1}^i) + \mathcal{F}(\mathbf{x}_{n+1}^i) \right),$$

$$- \mathbf{K}_{n+1}^i = D_{\mathbf{x}} \mathbf{G}(\mathbf{u}_{n+1}^i): \text{matrice de rigidité},$$

$$- \mathbf{D}_{n+1}^i = D_{\mathbf{x}} \mathbf{A}(\mathbf{v}_{n+1}^i): \text{matrice de viscosité},$$

$$- \mathbf{T}_{n+1}^i \in \partial \mathcal{F}(\mathbf{u}_{n+1}^i, \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^i): \text{matrice tangente de contact}.$$

Les termes $D_{\mathbf{x}} \mathbf{G}$ et $D_{\mathbf{x}} \mathbf{A}$ représentent respectivement les différentielles des opérateurs \mathbf{G} et \mathbf{A} . Le terme $\partial \mathcal{F}(\mathbf{x})$ désigne le jacobien généralisé du terme de contact frottant \mathcal{F} en \mathbf{x} .

↪ *Étape de correction*

$$\mathbf{x}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{x}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{x}^i, \quad \mathbf{v}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{v}_{n+1}^i + \frac{\Delta \mathbf{u}^i}{\alpha \Delta t}.$$

Nous adoptons une stratégie particulière pour le contact par l'intermédiaire du paramètre k . Ce paramètre nous permet en effet d'allonger ou de raccourcir la prédiction. Si $k = 0$, la prédiction est de longue portée mais risquée; si $k = 1$, la prédiction est plus courte mais plus sûre et enfin si $k = \frac{1}{\alpha} > 1$, la prédiction est rétrograde. De manière générale, il semble préférable d'effectuer une prédiction courte lorsque le contact apparaît.

Le schéma numérique n'est pas adapté pour un pilotage en déplacement. Il convient alors de prendre les déplacements bloqués lors de la prédiction comme suit :

$$\mathbf{u}_{n+1}^0 = \mathbf{u}_n + \frac{\bar{\mathbf{u}}}{\text{nbpas}},$$

où $\bar{\mathbf{u}}$ est le déplacement imposé et nbpas le nombre de pas. Par la suite, lors de la phase de correction, les déplacements bloqués prennent la valeur itérative $\mathbf{u}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{u}_{n+1}^i$. Pour les autres déplacements inconnus, on effectue les mêmes étapes de prédiction et de correction définies dans l'algorithme général.

7. Simulations numériques

Il convient de tester la robustesse de cet algorithme par des simulations en dimension 2. Pour cela nous allons considérer la microstructure du bois, composé par un réseau régulier en nid d'abeille. Nous allons appliquer de fortes sollicitations en compression sur les cellules hexagonales à fine parois composant ce réseau, qui a pour effet d'entraîner d'une part des phénomènes de flambement des parois et d'autre part le contact entre ces parois.

Testons tout d'abord l'effet de compression par des forces verticales appliquées sur les parois supérieures et inférieures d'une cellule en bloquant deux noeuds. La configuration initiale est

Nous utilisons les données suivantes

$$\lambda = 1.35 \text{ N/m}^2, \quad \mu = 0.3 \text{ N/m}^2,$$

les coefficients λ et μ sont relatifs à la loi de Kirchhoff-Saint-Venant,

les coefficients de viscosité retenus sont $\eta = 0.1$ et 0.5 Nsec/m^2 ,

$$\alpha = 0.1, \quad k = 1, \quad \Delta t = 0.01.$$

Le matériau hypervisco-élastique considéré est caractérisé par une densité élastique de type Kirchhoff Saint-Venant (2) couplée à la densité d'énergie visqueuse (6). L'intensité des forces est de $7 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}^2$, les déformées finales pour les coefficients de 0.1 et 0.5 Nsec/m^2 sont donnés aux figures Fig. 2 et 3.

On peut constater le rôle d'amortissement de la déformée joué par la viscosité; plus le coefficient de viscosité est élevé et moins la déformée est prononcée; ce qui a pour effet d'empêcher le contact entre les parois supérieure et inférieure de la cellule.

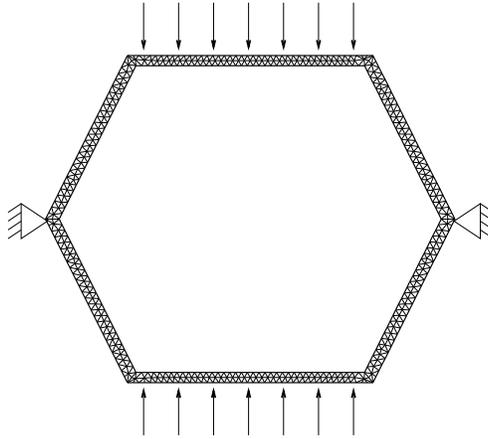


FIG. 1 –. *Configuration initiale de la cellule pour des compressions pilotées en forces.*

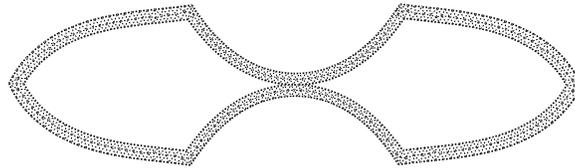


FIG. 2 –. *Déformée pour les cas $\eta = 0.1 \text{ Nsec/m}^2$*

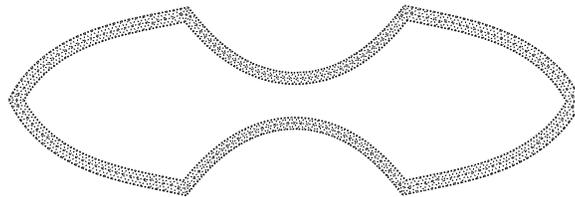


FIG. 3 –. *Déformée pour le cas $\eta = 0.5 \text{ Nsec/m}^2$.*

L'auto contact n'apparaît que pour un coefficient de viscosité assez faible de l'ordre de 0.1 Nsec/m^2 .

Afin d'optimiser quelque peu l'algorithme compte tenu des nombreux paramètres à recalculer, nous avons procédé à une première étude sur le paramètre α afin d'évaluer le nombre d'itérations moyen par incrément pour deux cas représentatifs. Dans le premier cas, la viscosité est assez faible de l'ordre de 0.1 Nsec/m^2 , il y aura donc contact entre les parois inférieure et supérieure de la cellule. Dans le second cas,

la viscosité est plus élevée de l'ordre de $0.5Nsec/m^2$, il n'y aura pas dans ce cas apparition de l'autocontact. Les résultats apparaissent sur le graphique ci-après.

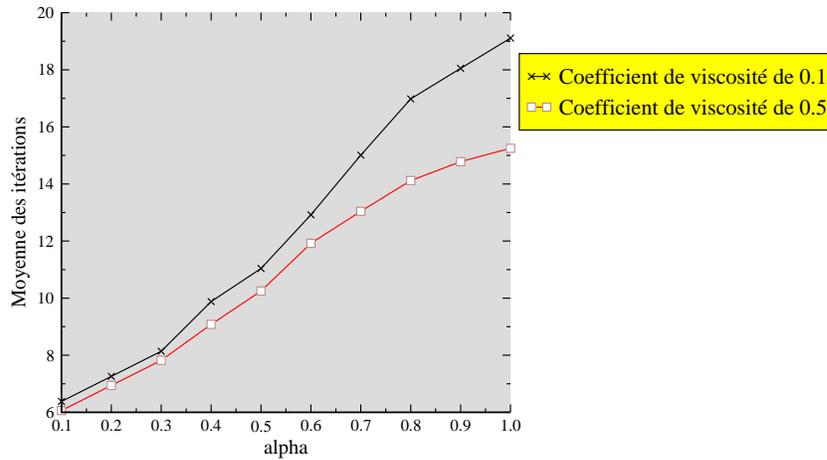


FIG. 4 –. Nombre d'itérations moyen par incrément en fonction du paramètre α .

La première constatation est le faible écart entre les deux courbes lorsque le paramètre α est en dessous de la valeur 0.6. Cela traduit le fait que l'algorithme n'est que très peu influencé par l'apparition du contact et du frottement. Au delà de la valeur 0.6 pour le paramètre α , l'écart entre les deux courbes est beaucoup plus prononcé. Cette augmentation à la fois de l'écart entre les deux courbes et du nombre moyen d'itérations par incrément traduit une dégradation de l'algorithme. Cela vient du fait que plus on se rapproche d'un schéma explicite et plus l'algorithme perd en stabilité. Cette étude est motivée par le fait qu'il est difficile de trouver une plage théorique pour le choix du coefficient de stabilité α dans le cas de problèmes fortement non linéaires. Pour les cas linéaires, on peut se reporter par exemple à l'étude théorique faite dans [5]. Il convient d'après ce graphique de choisir α -paramètre permettant d'ajuster le schéma de différences finies- dans l'intervalle $[0, 0.5[$.

Un autre paramètre important à prendre en compte est le pas de temps. Le graphique ci-dessous donne comme précédemment le nombre moyen d'itérations par incrément par rapport au pas de temps rapporté en abscisse en coordonnées logarithmique. L'étude se fait sur les deux cas représentatifs précédents à savoir le premier où le coefficient de viscosité est de $0.1Nsec/m^2$ et le second où le coefficient de viscosité est de $0.5Nsec/m^2$ en prenant un α fixé dans $[0, 0.5[$.

Comme constaté précédemment le contact et le frottement n'influence que très peu l'algorithme. En effet, le nombre moyen d'itérations par incrément varie peu entre les deux cas étudiés. Cependant on remarque qu'il est souhaitable de prendre un pas de temps inférieur à 10^{-2} , car au delà l'algorithme se dégrade, l'écart entre les deux courbes s'amplifie.

Ces deux études nous permettent d'appréhender plus sereinement le traitement numérique des problèmes de compression pilotées en forces en viscohyperélasticité avec contact et frottement.

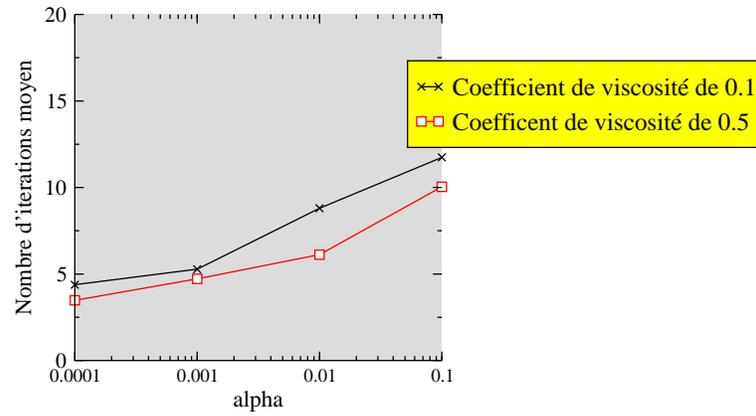


FIG. 5 –. *Nombre d'itérations moyen suivant le pas de temps*

Par la suite et afin de mener une étude un peu plus mécanique, nous avons considéré une loi hypervisco-élastique caractérisées par une densité hyper-élastique de type Ogden (3) et visqueuse (6). Nous avons simulé des compressions à l'aide de déplacements imposés. Il s'agit ici d'imposer des déplacements sur les deux noeuds supérieurs et de bloqués un noeud inférieur comme indiqué sur la figure ci-dessous

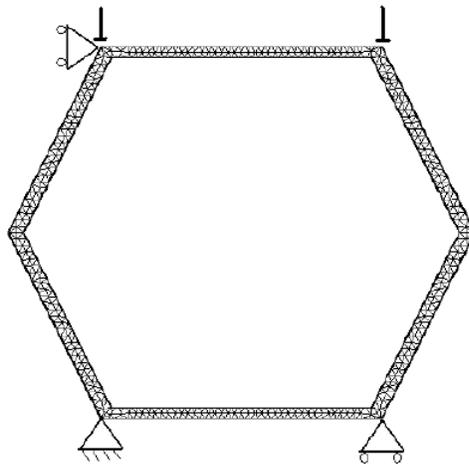


FIG. 6 –. *Configuration initiale pour les déplacements imposés*

Nous utilisons les données ci-après :

$$C_1 = 0.5 \text{ N/m}^2, C_2 = 0.5 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}^2, a = 0.35 \text{ N/m}^2,$$

les coefficients $C_i, i = 1, 2$ et a sont relatifs à la loi de type Ogden,

les coefficients de viscosité choisis sont $\eta = 0.08$ et 0.25 Nsec/m^2 ,

$$\alpha = 0.1, k = 1, \Delta t = 0.01.$$

Nous savons, compte tenu que nous imposons des déplacements, que la viscosité n'influe que très faiblement les déformés finales. Quelque soit les coefficients de viscosité employés, les déformés seront du type

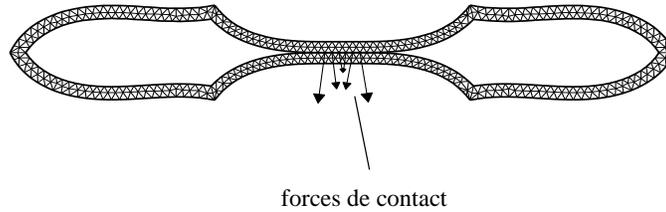


FIG. 7 — Déformée obtenue à partir des déplacements imposés

Pour cette raison, il est préférable d'observer les divers résultats sous forme de courbes forces-réaction des noeuds extrémités de la paroi supérieure, suivant les différentes valeurs remarquables du coefficient de viscosité.

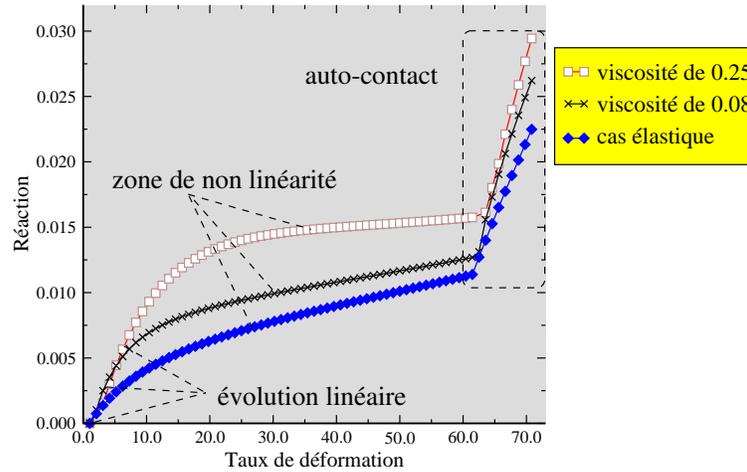


FIG. 8 — Courbe force-réaction suivant les diverses valeurs coefficient de viscosité

Ces courbes retranscrites à la figure Fig.8, font apparaissent trois régimes caractéristiques de l'hypervisco-élasticité. Le premier régime est marqué par une forte pente, d'autant plus prononcée que la viscosité est forte. Le deuxième régime est caractérisé par une pente moins prononcée que dans le premier régime, pente d'autant plus faible que la viscosité est forte. Ces deux régimes mettent bien en évidence l'effet de la hypervisco-élasticité. Le troisième régime de forte pente traduit la rigidification de la cellule et apparaît lors de l'auto-contact entre les parois supérieure et inférieure. Il est intéressant de noter que la pente de ce régime ainsi que toutes les réactions en générales sont plus fortes lorsque la viscosité est élevée, cela vient du fait que la structure est plus «rigide» car soumise à plus de contraintes «visqueuses». On peut également observer un léger décalage dans le temps de l'apparition du phénomène d'auto-contact en fonction de la viscosité.

Nous pouvons donc conclure que l'algorithme mis au point, couplant différences finies et linéarisation de Newton, a un bon comportement pour le traitement de l'hypervisco-élasticité, et ce même en rajoutant du contact et du frottement. Il serait bon à l'avenir de pouvoir traiter des échantillons de cellules plus important, ceci dans l'espoir de pouvoir capturer des phénomènes de localisation de type bande de cisaillement (voir [4]). De part la taille des problèmes, il serait alors peut-être nécessaire de coupler la méthode de résolution avec des méthodes de type décomposition de domaine.

Références

- [1] P. Alart, A. Curnier, A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods, *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **92**, 353-375 (1991).
- [2] P. Alart, Méthode de Newton généralisée en mécanique du contact, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **76**, 83-108 (1997).
- [3] M. Barboteu, *Contact, frottement et techniques de calcul parallèle*, Ph.D. Thesis, Université Montpellier II, 1999.
- [4] M. Barboteu, P. Alart, S. Pagano, Modélisation de problèmes non linéaires de grande taille: grandes déformations et autocontact dans un milieu cellulaire, *Revue Eur. éléments finis*, **11**(2-3-4), 447-461 (2002).
- [5] A. Curnier, *Méthodes numériques en mécanique des solides*, Lausanne, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1993.
- [6] T.A. Laursen, *Computational Contact and Impact Mechanics: Fundamentals of Modeling Interfacial Phenomena in Nonlinear Finite Element Analysis*, Heidelberg, Springer-Verlag, 2002.
- [7] P. LeTallec, Numerical Methods for Nonlinear Three-Dimensional Elasticity, *Handbook of Numerical Analysis, Vol. III*, Amsterdam-London-New York-Tokyo, North-Holland, 465-622 (1994).
- [8] G. Pietrzak and A. Curnier, Continuum mechanics modelling and augmented Lagrangian formulation of multibody, large deformation frictional contact problems, *CIMNE editor, Comput. Plast.*, 878-973 (1997).
- [9] G. Pietrzak, *Continuum mechanics modelling and augmented lagrangian formulation of large deformation frictional contact problems*, Ph.D. Thesis, EPFL de Lausanne, 1997.
- [10] R.R.D. Rajaonah, *Étude d'une loi de comportement visco-élastique*, Ph.D. Thesis, EPFL de Lausanne, 1999.

(Thierry-Vincent Hoarau-Mantel) LABORATOIRE DE THÉORIE DES SYSTÈMES
UNIVERSITÉ DE PERPIGNAN
52, AVENUE PAUL ALDUY, 66860, PERPIGNAN, CEDEX
E-mail address: hoarau@univ-perp.fr

(Michael Barbotou) LABORATOIRE DE THÉORIE DES SYSTÈMES
UNIVERSITÉ DE PERPIGNAN
52, AVENUE PAUL ALDUY, 66860, PERPIGNAN, CEDEX
E-mail address: barbotou@univ-perp.fr