

Quelques problèmes de contrôle propres aux systèmes distribués

ABDELHAQ EL JAI

RÉSUMÉ. Le but de cet article est de présenter deux exemples de problèmes de contrôle propres aux systèmes à paramètres répartis. Le premier concerne le problème de la contrôlabilité régionale où il s'agit d'exhiber un contrôle permettant d'atteindre un objectif sur une région donnée du domaine sur lequel est défini le système. Le deuxième exemple concerne la détermination d'un contrôle optimal permettant de réaliser, pour un système linéaire, un objectif sur des sous-domaines croissants. On montre que cela se traduit par la faible étalabilité du système. Le problème est résolu en adaptant des outils de minimisation usuels des problèmes de contrôle linéaire quadratique.

Classification AMS 2000 des sujets. 49N10, 93B05, 93C20.

Mots clef et phrases. contrôle, système à paramètres distribués, contrôlabilité.

Dans ce travail, on s'intéresse à quelques problèmes de contrôles propres aux systèmes distribués qui sont caractérisés, plus précisément, par l'existence d'une variable spatiale. Les problèmes de contrôle dans les systèmes distribués concernent tous les problèmes de contrôle usuels, mais plus spécifiquement des problèmes de contrôle faisant ressortir :

- La variable spatiale de façon globale ou locale,
- Les variables d'entrée sortie et leur existence spatiale,
- Des objectifs régionaux, pouvant être à support fixe ou variable.

Nous allons développer, dans ce travail, deux situations dans lesquelles la variable d'espace revêt une importance incontournable.

1. Contrôlabilité régionale

Le problème considéré ici n'est pas un problème de contrôle optimal. Il entre dans les aspects d'analyse des systèmes où il s'agit de savoir s'il existe un contrôle réalisant un objectif spatial donné. Soit Ω un ouvert régulier borné de \mathbb{R}^n et considérons l'équation d'état

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t); & t \in (0, T) \\ z(0) = z_0 \in D(A) \end{cases} \quad (1)$$

définie sur l'espace d'état $Z = L^2(\Omega)$ où A génère un semi-groupe fortement continu $(S(t))_{t \geq 0}$ sur Z . $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, Z)$ et $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^p)$. La solution $z(\cdot, u)$ de (1) est donnée par

$$z(t, u) = S(t)z_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds \quad (2)$$

Reçu: le 11 décembre 2002.

et $z(\cdot, u) \in C[0, T; Z]$.

Soit $\omega \subset \Omega$ de mesure non nulle et $z_d \in L^2(\omega)$.

- Le système (1) est dit exactement régionalement contrôlable (ou ω -contrôlable) s'il existe un contrôle $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^p)$ tel que

$$z(T, u)|_\omega = z_d. \quad (3)$$

- Le système (1) est dit faiblement régionalement contrôlable (ou ω -contrôlable) si, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un contrôle $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^p)$ tel que

$$\|z(T, u)|_\omega - z_d\|_{L^2(\omega)} \leq \varepsilon \quad (4)$$

$z|_\omega$ est la restriction de z à ω .

Dans le domaine Ω , il y a plusieurs sous-domaines qui ont des rôles spécifiques. On a d'une part la région ω et d'autre part les régions qui définissent les supports des actions (un actionneur est défini par un couple (D, g) où D désigne le support de l'actionneur et g la répartition spatiale de l'action sur D). D'où la nécessité de lier ces deux types de régions. Nous reprenons la définition suivante.

- Une suite d'actionneurs $(D_i, g_i)_{1 \leq i \leq m}$ est dite ω -stratégique si le système excité est faiblement ω -contrôlable.

Diverses caractérisations des actionneurs pour de nombreux systèmes ont été établies. Notons que tout système régionalement contrôlable n'est pas contrôlable. En voici un contre-exemple. Considérons le système décrit par l'équation parabolique

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) = \chi_{[a, b]} u(t) & \text{sur }]0, 1[\times]0, T[\\ y(x, 0) = 0 & \text{sur }]0, 1[\\ y(0, t) = y(1, t) = 0 & \text{sur }]0, T[\end{cases} \quad (5)$$

excité par un actionneur (D, g) avec $D = [a, b] \subset (0, 1)$ est le support de l'action et $g(x) = 1$ est la répartition spatiale de l'action sur D . Alors on montre que

- l'actionneur (D, g) n'est pas stratégique (i.e. le système n'est pas faiblement contrôlable).
- l'actionneur (D, g) est ω -stratégique si on considère la région $\omega = [\alpha, \beta] \subset [0, 1]$, telle que $\beta = \alpha + (b - a)$ (i.e. le système est faiblement ω -contrôlable).

Pour démontrer cela, on utilise une démarche usuelle qui consiste à définir un opérateur $H : \mathcal{U} \rightarrow Z$. Ensuite on considère $\chi_\omega : Z = L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\omega)$. La faible ω -contrôlabilité se traduit par $\overline{\text{Im} \chi_\omega H} = Z$. On montre alors que certains états de $\overline{\text{Im} \chi_\omega H}$ ne sont pas dans $\overline{\text{Im} H}$ (avec l'équivalence $\overline{\text{Im} \chi_\omega H} = L^2(\omega) \Leftrightarrow \text{Ker} H^* \chi_\omega^* = \{0\}$).

Contrôle assurant le transfert régional

Existe-t-il un contrôle à énergie minimum u , $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^p)$, amenant le système à $z(T, u) \in G = \{z \in Z \text{ tel que } z|_\omega = z_d\}$? La réponse à cette question est positive. De plus, le coût de transfert régional sur ω est inférieur au coût de transfert global. Pour montrer que le coût de transfert est moindre sur ω , considérons, pour les contrôles $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^p)$, la fonction de coût $J(u) = \int_0^T \|u(t)\|_{\mathbb{R}^p}^2 dt$. Notons $z(T, u)$ l'état du système atteint à l'instant T sous l'action u et soit, pour z_d donné dans $L^2(\Omega)$, les ensembles

$$\mathcal{W}_\Omega = \{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^p) \text{ réalisant } z(T, u) = z_d \text{ sur } \Omega\}$$

et

$$\mathcal{W}_\omega = \{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^p) \text{ réalisant } z(T, u) = z_d \text{ sur } \omega\}$$

On a alors, de façon évidente, $\mathcal{W}_\Omega \subset \mathcal{W}_\omega$, ce qui conduit à $\inf_{\mathcal{W}_\omega} J(u) \leq \inf_{\mathcal{W}_\Omega} J(u)$, d'où le résultat.

Pour construire le contrôle réalisant le transfert, on considère :

- L'ensemble

$$G^0 = \{z \in Z^* \text{ tel que } z = 0 \text{ sur } \Omega \setminus \omega\}$$

- Pour $\varphi^0 \in G^0$, les systèmes

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) = -A^* \varphi(t) \\ \varphi(T) = \varphi^0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{\psi}(t) = A\psi(t) + BB^* \varphi(t) \\ \psi(0) = z_0 \end{cases} \quad (6)$$

et

$$\|\varphi^0\|_{G^0}^2 = \int_0^T \|B^* \varphi(t)\|^2 dt$$

- $M\varphi^0 = \mathcal{P}(\psi(T))$ avec $\mathcal{P} = \chi_\omega^* \chi_\omega$.

On décompose l'opérateur affine M en considérant :

$$\begin{cases} \dot{\psi}_0(t) = A\psi_0(t) \\ \psi_0(0) = z_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{\psi}_1(t) = A\psi_1(t) + BB^* \varphi(t) \\ \psi_1(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M\varphi^0 = \mathcal{P}(\psi_0(T) + \psi_1(T))$$

- Enfin, on pose

$$\Lambda\varphi^0 = \mathcal{P}(\psi_1(T)) \quad (7)$$

et on montre que : *Si le système est faiblement ω -contrôlable, l'équation (7) admet une solution unique φ^0 . Le contrôle assurant le transfert régional s'exprime par :*

$$u^{opt}(t) = B^* \varphi^0(t)$$

De plus, ce contrôle est à énergie minimum [43, 49]. Parmi les problèmes d'analyse régionale (objectif à support fixe) de nombreux développements ont été achevés. Citons tout particulièrement :

- (1) La caractérisation des concepts régionaux, pour divers systèmes, voir [1, 2, 3, 22, 24, 25, 26, 27, 30, 32, 33, 38].
- (2) Les relations avec les structures d'entrée-sortie, voir [13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23].
- (3) Certains aspects asymptotiques : détectabilité, Luenberger régional, voir [4, 5, 6, 7].
- (4) La modélisation et l'analyse par automates cellulaires, voir [34, 35, 36, 37].

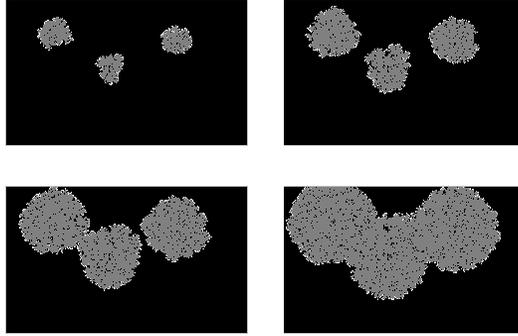


FIG. 1 –. Objectif : étendre une propriété donnée à tout le domaine.

2. Etalabilité

La figure (1) ci-dessous montre le cas d'un système dans lequel une région (en clair) satisfaisant une certaine propriété est en train de s'étendre (dans un sens à préciser).

On se pose alors le problème général suivant. Pour un système donné, et une propriété satisfaite sur une région initiale du domaine sur lequel est défini ce système, est-il possible d'agir sur le système de telle sorte que cette propriété soit satisfaite, au cours du temps, sur des domaines de plus en plus grands. Pour traiter ce problème, nous allons procéder en examinant les étapes suivantes.

1. Préciser l'idée : concept d'étalabilité
2. Est-il possible qu'un contrôle (qui sera dit étaleur) puisse réaliser un tel objectif?
3. Comment construire un tel contrôle?

Nous développerons ensuite un exemple illustratif.

Le problème posé est, de façon évidente, plus délicat qu'un simple problème de contrôlabilité (il y a plus de contraintes sur le système). Il est facile de voir que la recherche d'un contrôle étaleur (au sens d'une définition qu'on va préciser) va soulever de nombreuses difficultés liées, entre autre, à l'aspect dynamique de ce concept, à la mesure des zones destinées à s'étaler et à la vitesse et la géométrie d'étalement, en particulier.

2.1. Notion d'étalabilité. Soit (S) un système dynamique évoluant dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. L'état de (S) au point $x \in \Omega$ à l'instant t est noté $z(x,t) = z(x,t,t_0,z_0)$, $t \geq t_0$ (t_0 et z_0 désignent l'instant et l'état initial). Soit \mathcal{P} une certaine propriété (définie sur l'espace d'état Z , à préciser). Posons

$$\omega_t = \{x \in \Omega \mid \mathcal{P}z(x,t,t_0,z_0)\} \quad (1)$$

ω_t représente l'ensemble des points x de Ω où l'état $z(x,t)$ vérifie, à l'instant t , la propriété \mathcal{P} .

Définitions

• On dit que le système (S) est \mathcal{P} -étalable (respectivement strictement étalable) à partir de ω_{t_0} pendant l'intervalle de temps $I = [t_0, T]$ ($T > t_0$) si la famille $(\omega_t)_{t \in I}$ est croissante (respectivement strictement croissante).

$$\omega_t \subset \omega_s \ ; \ t \leq s$$

• (S) est dit \mathcal{P} -résorbable si la famille $(\omega_t)_{t \in I}$ est décroissante.

• Dans le cas où $\mathcal{P}z(x,t) \iff z(x,t) = \theta(x)$, avec θ est une fonction donnée, on dit que (S) est θ -étalable (nul-étalable si $\theta = 0$).

A titre d'exemple de système étalable, considérons le système régi par l'équation aux dérivées partielles de premier ordre suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0 & x > 0; 0 < t < T \\ z(0,t) = 0 & 0 < t < T \\ z(.,0) = z_0 & x > 0 \end{cases} \quad (2)$$

La solution du système(2) est donnée par

$$z(x,t) = \begin{cases} z_0(x-t) & \text{si } x \geq t \\ 0 & \text{si } x < t \end{cases} \quad (3)$$

Soit alors $\omega_t = \{x > 0 \mid z(x,t) = 0\}$ ($0 \leq t \leq T$), on a :

$$z(x,t) = 0 \iff \begin{cases} z_0(x-t) = 0 & \text{si } x \geq t \\ \text{ou} \\ 0 \leq x < t \end{cases}$$

Par suite $\omega_t = [0,t] \cup \{(t + \omega_0) \cap]t, \infty[\}$ où $(t + \omega_0)$ désigne l'ensemble des éléments $(t + x)$ tels que $x \in \omega_0$. Comme $\omega_0 \subset [0, \infty[$, nous en déduisons $\omega_t = [0,t] \cup (t + \omega_0)$. Par conséquent, si $\omega_0 = [0, \ell]$, $\ell > 0$, on obtient

$$\omega_t = [0, t + \ell]$$

qui sont des sous-domaines croissants, ce qui donne la nulle-étalabilité du système(2).

Caractérisations immédiates

Nous pouvons déduire, à partir des simples définitions précédentes, les résultats quasi-immédiats suivants (voir [39, 40]).

• Un système (S) est nul-étalable si et seulement si il existe une fonction $\eta : \Omega \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$z(x,s) = \eta(x,s,t)z(x,t) \quad (4)$$

où $\Delta = \{(s,t) \in I \times I : t \leq s\}$.

• Un système (S) est nul-étalable si et seulement si il existe une fonction $\xi : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial(\xi z)}{\partial t} + z^2 = 0 & \text{sur } \Omega \times I \\ \xi(x,T) z(x,T) = 0 & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (5)$$

La preuve de ces résultats est immédiate, voir [39, 40]. Ces résultats précisent la nature de ce que sont les systèmes étalables.

2.2. Existe-t-il des contrôles réalisant l'étalabilité d'un système? Reprenons le système précédent (2) qu'on suppose excité par un contrôle ponctuel localisé en un point b interne, le système s'écrit alors

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} = v(t)\delta(x-b) & x > 0 ; 0 < t < T \\ z(0,t) = 0 & 0 < t < T \\ z(x,0) = z_0(x) & x > 0 \end{cases} \quad (6)$$

Sans s'attarder sur le sens mathématique à donner à l'équation, fomellement la solution de ce système est donnée, si on suppose que $b > T$, par

$$z(x,t) = \begin{cases} z_0(x-t) + v(b+t-x) & \text{si } x \in [b, b+t] \\ z_0(x-t) & \text{si } x \in [t, b[\cup]b+t, \infty[\\ 0 & \text{si } x \in [0, t[\end{cases} \quad (7)$$

Pour $v \in L^2(0, T)$ et $0 \leq t \leq T$ posons

$$\omega_t^v = \{x > 0 \mid z(x,t) = z(x,t,v) = 0\}$$

et considérons le cas ou la zone initiale est donnée par $\omega_0 = \{b\}$. Quand le système (6) est autonome ($v = 0$), nous avons $\omega_t^0 = [0, t] \cup \{b+t\}$ et ainsi, le système (6) n'est pas nul-étalable. Maintenant, appliquons au système (6) le contrôle suivant

$$v(t) = -z_0(b-t) ; 0 \leq t \leq T \quad (8)$$

Dans ce cas nous avons $z(x,t) = 0$ sur $[b, b+t]$. Cependant, comme $\omega_0 = \{b\}$, nous avons $z_0(x-t) \neq 0$ sur $[t, b[\cup]b+t, \infty[$ et donc, $\omega_t^v = [0, t[\cup]b, b+t]$, ($0 \leq t \leq T$) définissant des domaines croissants de Ω . Par conséquent, le système (6) est nul-étalable lorsqu'il est excité par un contrôle convenable. Cet exemple montre clairement qu'il est possible de rendre étalable un système par le choix d'un contrôle convenable.

2.2.1. Un concept mieux adapté: la faible étalabilité. Il est connu que la plupart des systèmes distribués ne sont pas exactement contrôlables. Il est évident que le concept d'étalabilité est encore plus difficile à réaliser. Nous allons relaxer la notion d'étalabilité en considérant un concept plus faible, la faible étalabilité. Différentes approches sont possibles. La plus naturelle est développée dans ce qui suit.

Définition 2.1.

• Soit $\varepsilon > 0$ et $p \in Z$ un profil désiré. Un système est dit faiblement étalable avec la tolérante ε , à partir de ω_0 , s'il existe une famille de sous-domaines $(\tilde{\omega}_t)$, $(\tilde{\omega}_t) \subset P(\Omega)$ (où $P(\Omega)$ désigne l'ensemble des parties de Ω), tels que

- (a) $\tilde{\omega}_0 \supset \omega_0$,
- (b) $\tilde{\omega}_t \subset \tilde{\omega}_s$; $\forall t, s$ tels que $0 \leq t \leq s \leq T$,
- (c) $\tilde{\omega}_T = \Omega$,
- (d) $\|\chi_{\tilde{\omega}_t} [z(\cdot, t) - p(\cdot)]\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \varepsilon \text{mes}(\tilde{\omega}_t) \quad \forall t, 0 < t \leq T$.

où $\text{mes}(\tilde{\omega}_t)$ est la mesure de $\tilde{\omega}_t$ (i.e. la surface de $\tilde{\omega}_t$).

• Le système est dit faiblement nul-étalable s'il est faiblement étalable avec le profil $p = 0$.

• Toute famille de sous-domaines satisfaisant les conditions (a) et (b) s'appelle un étalement.

Notons que

1. Si le système est étalable, il est faiblement étalable avec la tolérance $\varepsilon = 0$.
2. Si le système est faiblement étalable, la famille $(\tilde{\omega}_t)$ n'est pas unique et dépend du choix du paramètre de tolérance ε .

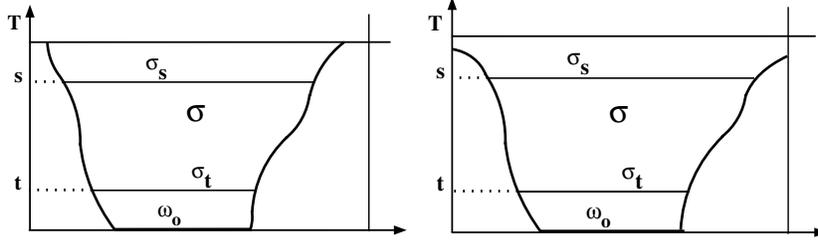
Pour la suite, on introduit \mathcal{S} et on désigne par :

- \mathcal{S} l'ensemble des étalements définis par

$$\mathcal{S} = \{\sigma = (\sigma_t)_{t \in I} \subset P(\Omega) \mid (\sigma_t) \nearrow \text{ et } \sigma_0 \supset \omega_0\} \quad (9)$$

- \mathcal{S}' l'ensemble des étalements de \mathcal{S} satisfaisant la condition (c), soit

$$\mathcal{S}' = \{\sigma \in \mathcal{S} \mid \sigma_T = \Omega\} \quad (10)$$



Un étalement de \mathcal{S} .

Un étalement de \mathcal{S}' .

Notons qu'un étalement $\sigma = (\sigma_t)_{t \in I}$ est dans \mathcal{S}' si et seulement si

$$\sigma_t = \{x \in \Omega \mid \tau(x) \leq t\} \quad ; \quad t \in I \quad (11)$$

où $\tau \in \mathcal{T}$ avec

$$\mathcal{T} = \{\tau \in L^2(\Omega) \mid 0 \leq \tau \leq T \text{ et } \tau/\omega_0 = 0\} \quad (12)$$

Cela se montre aisément. En effet, pour σ dans \mathcal{S}' , soit

$$\tau(x) = \inf\{s \in I \mid x \in \sigma_s\} \quad (x \in \Omega)$$

Il est facile de voir que, pour tout $t \in I$,

$$x \in \sigma_t \implies \tau(x) \leq t$$

et la réciproque est vraie puisque la famille σ est supposée non décroissante. Finalement nous avons

$$\sigma_t = \{x \in \Omega \mid \tau(x) \leq t\} \quad (t \in I)$$

et ainsi nous avons (11).

Réciproquement, pour $s \geq t$, nous avons, avec (11),

$$\{x \in \Omega \mid \tau(x) \leq t\} = \sigma_t \subset \{x \in \Omega \mid \tau(x) \leq s\} = \sigma_s$$

et avec (12), $\sigma_0 \supset \omega_0$ et $\sigma_T = \Omega$. Finalement $\sigma = (\sigma_t) \in \mathcal{S}'$.

2.2.2. Caractérisation de la faible étalabilité. Nous avons alors le résultat de caractérisation dont la démonstration découle de ce qui précède.

Lemme 2.1.

Un système est faiblement étalable s'il existe un étalement satisfaisant (11) et (12) ainsi que la condition (d) de la définition (2.1).

2.3. Problème de contrôle linéaire quadratique étaleur - LQS. Il s'agit maintenant de déterminer un contrôle "convenable" qui rende un système linéaire étalable. On considère le système donné par l'équation d'état

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bv(t) & 0 < t < T \\ z(0) = z_0 \in \mathcal{D}(A) \end{cases} \quad (13)$$

qui est supposé évoluer dans un domaine ouvert borné Ω . On note $\omega_0 = \{x \in \Omega \mid z_0 = 0\}$.

Le problème LQS de base consiste à déterminer un contrôle optimal qui rende le système (13) faiblement nul-étalable. Comme l'étalement à suivre est également inconnu, cela revient à déterminer le couple (v, σ) , $v \in \mathcal{V}$ et $\sigma \in \mathcal{S}$ qui minimise une certaine fonctionnelle quadratique J_0 . $\mathcal{V} \subset L^2(t_0, T; \mathbb{R}^p)$ est un ensemble de contrôles admissibles. Nous allons supposer que J_0 dépend de v et de l'étalement σ le long duquel le système s'étalera s'écrit sous la forme suivante

$$J_0(v, \sigma) = \int_0^T \int_{\sigma_t} z^2(x, t, v) \, dx dt + \alpha \int_0^T |v|^2 \, dt + \beta F(\sigma) \quad (14)$$

où α et β sont positifs. Le critère (14) consiste en une combinaison de 3 termes :

- Les deux premiers termes conduiront à un couple optimal (v, σ) qui amène l'état z à être aussi près de 0 que possible le long des sous-domaines (σ_t) , tout en réduisant le coût de transfert.
- Le troisième terme, $\beta F(\sigma)$, fait apparaître une fonctionnelle $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ qui sera choisie de telle sorte que le système s'étale le plus "vastement" possible. Pour cela, on choisira F telle que : plus elle décroît, plus l'étalement est grand.

En résumé le problème LQS peut être formulé par :

$$\begin{cases} \min_{(v, \sigma) \in \mathcal{V} \times \mathcal{S}} J_0(v, \sigma) \\ \text{Sous la contrainte fonctionnelle (13)} \end{cases} \quad (15)$$

La solution de ce problème, quand elle existe, sera un couple (v^{opt}, σ^{opt}) : le contrôle étaleur v^{opt} rend le système (13) faiblement nul-étalable le long de l'étalement optimal σ^{opt} .

Définition : *Le contrôle v^{opt} solution de (15), s'il existe, sera dit contrôle étaleur associé au système (13).*

Il faut noter que :

1. La fonctionnelle F n'a pas une forme explicite.
2. L'ensemble \mathcal{S} n'a pas une structure topologique permettant l'utilisation des résultats classiques de l'optimisation (on verra comment lever ces difficultés).
3. Dans le cas de la θ -étalabilité, il suffira de remplacer z dans (14) par $(z - \theta)$ comme pour un problème de tracking classique, le critère s'écrira alors

$$J_0(v, \sigma) = \int_0^T \int_{\sigma_t} [z(x, t, v) - \theta(x)]^2 dx dt + \alpha \int_0^T |v|^2 dt + \beta F(\sigma) \quad (16)$$

Nous allons d'abord choisir la fonctionnelle F . Notons que si F satisfait

$$mes(\sigma_t^c) \leq kF(\sigma) \quad (\sigma \in \mathcal{S}; t \in I) \quad (17)$$

alors la minimisation de $F(\sigma)$ peut conduire à ce que $mes(\sigma_t^c)$ soit plus faible et par conséquent σ_t sera plus important (σ_t^c désigne le complémentaire de σ_t par rapport à Ω).

Dans ce cas, on peut modifier le critère considéré en choisissant naturellement

$$F(\sigma) = F(\tau) = \int_{\Omega} \tau^2(x) dx \quad (18)$$

où σ et τ sont donnés par (11) et (12). Ce choix satisfait la condition (17) puisque pour $\tau \in \mathcal{T}$ et $\sigma = (\{x \in \Omega \mid \tau(x) \leq t\})_{t \in I}$ dans \mathcal{S}' nous avons

$$mes(\sigma_t^c) = mes(\{x \in \Omega \mid \tau(x) > t\}) \leq \frac{1}{t} \int_{\Omega} \tau^2(x) dx \quad (0 < t < T)$$

On note $J(v, \tau) = J(v, \sigma)$ et on applique Fubini à (14) pour obtenir un critère J_0 sous la forme

$$J(v, \tau) = \int_{\Omega} \left(\int_{\tau(x)}^T z^2(x, t, v) dt \right) dx + \alpha \int_0^T |v|^2 dt + \beta \int_{\Omega} \tau^2(x) dx \quad (19)$$

Le problème LQS peut alors être reformulé sous la forme

$$(LQS) \quad \begin{cases} \min_{(v, \tau) \in \mathcal{V} \times \mathcal{T}} J(v, \tau) \\ \text{Sous la contrainte fonctionnelle (13)} \end{cases} \quad (20)$$

De plus, l'ensemble $\mathcal{V} \times \mathcal{T}$ est fermé, convexe et borné dans $L^2(I, \mathbb{R}^p) \times L^2(\Omega)$.

Remarque 2.1.

La fonctionnelle J n'est pas quadratique par rapport au couple (v, τ) mais elle est coercive dans l'espace produit $\mathcal{V} \times \mathcal{T}$, puisque

$$J(v, \tau) \geq \min(\alpha, \beta) \|(v, \tau)\|^2 \quad ((v, \tau) \in \mathcal{V} \times \mathcal{T})$$

Cela permet alors de caractériser la solution de (20).

2.3.1. Solution du problème LQS - Système d'optimalité. Nous allons nous intéresser à l'existence d'une solution du problème LQS. Nous examinerons ensuite sa caractérisation ainsi que les aspects algorithmiques. Concernant une solution (v, τ) du problème LQS (20), nous avons les résultats suivants.

L'ensemble des contraintes étant convexe, toute solution (v, τ) du problème (20) satisfait :

$$J'(v, \tau) \cdot (u - v, \xi - \tau) \geq 0 \quad ((u, \xi) \in \mathcal{V} \times \mathcal{T}) \quad (21)$$

où la fonctionnelle objectif J est supposée suffisamment régulière (différentiable sur $\mathcal{V} \times \mathcal{T}$).

En considérant les dérivées partielles, (21) donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial v} \cdot (u - v) &\geq 0 & (u \in \mathcal{V}) \\ \frac{\partial J}{\partial \tau} \cdot (\xi - \tau) &\geq 0 & (\xi \in \mathcal{T}) \end{aligned} \quad (22)$$

La première inégalité est équivalente à

$$\frac{\partial J}{\partial v}(v, \tau) = 0 \quad (23)$$

Soit $P(t, \xi)$, $t \in I, \xi \in \mathcal{T}$, défini de la façon suivante : pour $\xi \in \mathcal{T}$ donné, l'opérateur $Q = P(\cdot, \xi)$ est solution de l'équation de type Riccati

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \langle Q(t)z_1, z_2 \rangle + \langle Q(t)Az_1, z_2 \rangle + \langle Q(t)z_1, Az_2 \rangle \\ \quad = \frac{1}{\alpha} \langle Q(t)BB^*Q(t)z_1, z_2 \rangle - \int_{\xi \leq t} z_1 z_2 dx \\ Q(T) = 0 \end{cases} \quad (24)$$

où z_1 et $z_2 \in \mathcal{D}(A)$. Alors on a le résultat suivant.

Lemme 2.2.

Supposons que, pour $\tau \in \mathcal{T}$, l'équation (24) a une solution unique $P(\cdot, \tau)$ alors l'équation (23) est équivalente à

$$v + \frac{1}{\alpha} B^* P(\cdot, \tau) z(\cdot, v) = 0 \quad (25)$$

Pour la preuve, on peut se ramener à un cadre linéaire quadratique usuel. Il suffit de noter que

$$J_\tau(v) = \int_{\Omega} \left(\int_{\tau(x)}^T z^2(x, t, v) dt \right) dx + \alpha \int_0^T |v|^2 dt \quad (v \in \mathcal{V})$$

peut être mis sous la forme

$$J_\tau(v) = \int_0^T \langle R(t)z(t, v), z(t, v) \rangle dt + \alpha \int_0^T |v|^2 dt \quad (v \in \mathcal{V})$$

où $R(\cdot)$ désigne l'opérateur défini par :

$$(R(t)\phi)(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{if } \tau(x) \leq t \\ 0 & \text{if } \tau(x) > t \end{cases}$$

pour tout $\phi \in L^2(\Omega)$ et $x \in \Omega$. Finalement en notant que

$$\frac{\partial J}{\partial v} = J'_\tau(v) \quad (v \in \mathcal{V}) \quad (26)$$

et que (25) est exactement l'équation $J'_\tau(v) = 0$ associée au problème du régulateur

$$\min_{v \in \mathcal{V}} J_\tau(v)$$

On obtient le résultat avec (26).

La fonctionnelle coût $J = J(u, \xi)$ est différentiable par rapport à $\xi \in \mathcal{T}$ pour tout $u \in \mathcal{V}$ tel que $z(u)$ soit assez régulier et nous avons le résultat suivant (voir [39]).

$$\frac{\partial J}{\partial \xi}(u, \xi)\zeta = \langle 2\beta\xi - z^2(\cdot, \xi(\cdot), u); \zeta \rangle \quad (\zeta \in L^2(\Omega)) \quad (27)$$

Théorème 2.1.

Soit (v^{opt}, τ^{opt}) une solution du problème LQS (20), alors le couple (v^{opt}, τ^{opt}) satisfait le système non-linéaire d'équations

$$v^{opt} = -\frac{1}{\alpha} B^* P(\cdot, \tau^{opt}(\cdot)) z(\cdot, \tau^{opt}(\cdot), v^{opt}) \quad (28)$$

$$\tau^{opt} = pr_{\mathcal{T}} \left\{ \frac{z^2(\cdot, \tau^{opt}(\cdot), v^{opt})}{2\beta} \right\} \quad (29)$$

où $P(\cdot, \tau) = Q$ est donnée par (24) et $pr_{\mathcal{T}}$ désigne l'opérateur de projection sur l'ensemble convexe fermé \mathcal{T} .

Le contrôle étaleur v^{opt} donné par (28) rend le système (13) faiblement nul-étalable le long des sous-domaines

$$\omega_t^{opt} = \{x \in \Omega \mid \tau^{opt}(x) \leq t\}$$

où τ^{opt} est donné par (29).

2.4. Exemple. On se donne $\omega_0 = \{x \in \Omega \mid z_0 = 0\}$. Le problème consiste à déterminer le couple (v, τ) solution de

$$\begin{cases} \min J(v, \tau) \\ v \in \mathcal{V}, \tau \in \mathcal{T} \end{cases}$$

où la fonction de coût J est donnée par

$$J(v, \tau) = \int_{\Omega} \left(\int_{\tau(x)}^T z^2(x, t, v) dt \right) dx + \alpha \int_0^T |v|^2 dt + \beta \int_{\Omega} \tau^2(x) dx$$

La solution est donnée par le système d'optimalité (28) - (29). L'opérateur de projection $pr_{\mathcal{T}}$, où \mathcal{T} est donné par

$$\mathcal{T} = \{\xi \in L^2(\Omega) \mid 0 \leq \xi \leq T \quad \text{et} \quad \xi/\omega_0 = 0\}$$

s'exprime par

$$pr_{\mathcal{T}}(f) = \xi \quad (30)$$

avec

$$\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \omega_0 \quad \text{ou} \quad f(x) < 0 \\ f(x) & \text{si } x \in \omega_0^c \quad \text{et} \quad 0 \leq f(x) \leq T \\ T & \text{si } x \in \omega_0^c \quad \text{et} \quad f(x) > T \end{cases} \quad (31)$$

Pour la preuve, notons que ξ , donné par (31), est dans l'ensemble \mathcal{T} . Il suffit alors de décomposer Ω en considérant

$$\Omega = (\omega_0 \cup \{f < 0\}) \cup (\omega_0^c \cap \{0 \leq f \leq T\}) \cup (\omega_0^c \cap \{f > T\})$$

Ainsi avec (31) on obtient pour tout $\zeta \in \mathcal{T}$ la relation

$$\langle f - \xi; \zeta - \xi \rangle = \int_{\omega_0^c \cap \{f < 0\}} f \zeta dx + \int_{\omega_0^c \cap \{f > T\}} (f - T)(\zeta - T) dx$$

Il s'en suit

$$\langle f - \xi; \zeta - \xi \rangle \leq 0 \quad (\zeta \in \mathcal{T})$$

ce qui implique alors que $\xi = pr_{\mathcal{T}}(f)$.

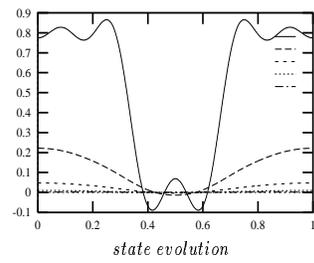
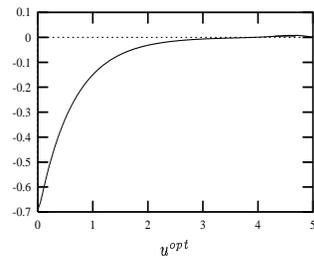
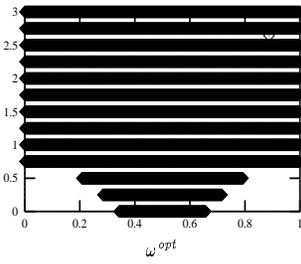
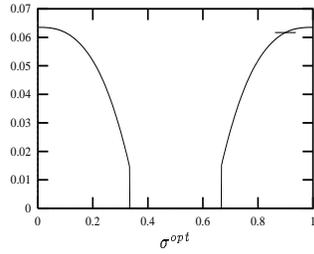
Appliquons cela au cas monodimensionnel avec $\Omega =]0,1[$ et $T = 5$ et le système (13) où l'opérateur A est donné par $A = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Nous voulons réaliser la faible nulle-étalabilité de ce système. L'état initial est donné sur le sous-domaine ω_0 avec

$$z_0 = \begin{cases} 0 & \omega_0 \\ K \text{ (constante } \neq 0) & \omega_0^c \end{cases}$$

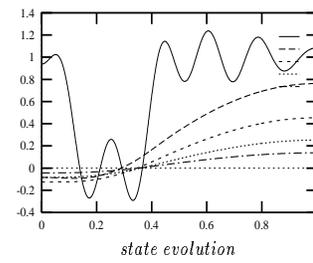
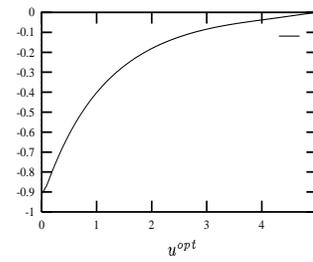
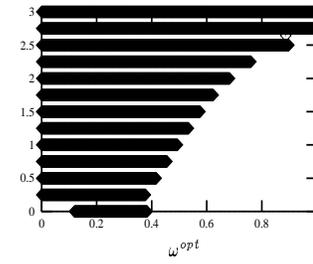
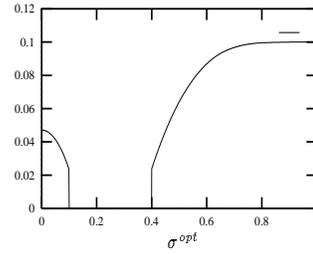
On complète le système par des conditions de Neumann homogènes. Le contrôle est supposé être appliqué sur le sous-domaine ω_0 . Le critère J est considéré avec $\alpha = 1$ et $\beta = 5$. On considère les cas où le sous-domaine initial est centré, avec $\omega_0 = [0.35, 0.65]$, et le cas où il ne l'est pas, $\omega_0 = [0.1, 0.4]$. On peut aussi considérer d'autres cas comme celui où ω_0 n'est pas connexe.

Les figures qui suivent montrent l'étalement σ^{opt} et les sous-domaines associés $(\omega_t^{opt}) = (\{x \in]0,1[\mid \tau^{opt}(x) \leq t\})$. La faible nulle-étalabilité est réalisée (sur tout Ω) au prix d'un coût égal à $\|v^{opt}\|^2 = 0.162$, dans le cas centré et à $\|v^{opt}\|^2 = 0.521$, dans le cas non centré.

centered case



non centered case



3. Conclusion et directions de recherche

Dans ce travail, on a montré l'importance que peut revêtir la variable spatiale dans certains problèmes de contrôle des systèmes distribués. Les problèmes considérés n'ont de sens que dans le cas où une variable d'espace est présente dans le système. Les deux exemples traités montrent clairement que la variable d'espace peut avoir un sens *régional* et non pas dans sa globalité. De nombreux travaux ont été explorés en analyse régionale pour différentes classes de systèmes. Pour l'étabilité, plusieurs aspects ont été étudiés récemment; principalement l'approche de l'étabilité au sens des aires, voir [39, 41, 46, 12, 28, 29, 31, 9, 10, 44, 45] ainsi que les références qui y sont citées.

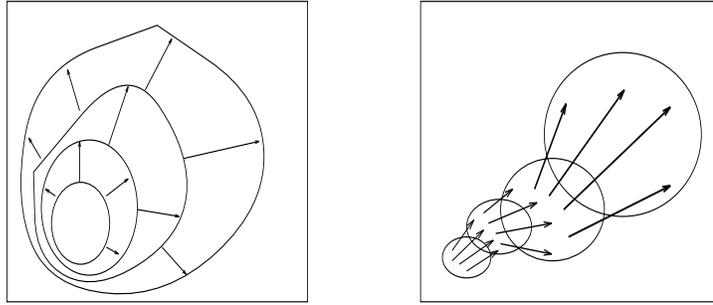


FIG. 2 –. Étabilité au sens de l'inclusion et étabilité au sens des aires

Parmi les nombreuses directions de recherche, citons certains problèmes faisant l'objet de travaux en cours.

- (1) Les aspects régionaux, pour des systèmes plus généraux.
- (2) La vitesse d'étabilité et l'étabilité en temps minimal.
- (3) Le problème de l'étabilité curviligne. Pour cela, soit un espace d'état Z et un système défini par un semi-groupe d'opérateurs $(S(t))$ sur Z . ω_0 un domaine initial $\subset \Omega$.

$$\omega_t = \{x \in \Omega, \mid \mathcal{P}z(x,t)\}$$

Définition : Il y a étabilité au sens curviligne si

$$\mu(\partial\omega_s) \leq \mu(\partial\omega_t) \quad ; \forall s \leq t$$

ou encore

$$\mu(S(s)\partial\omega_0) \leq \mu(S(t)\partial\omega_0) \quad ; \forall s \leq t$$

Existe-t-il des relations avec l'évolution des interfaces, développées dans [45]?

- (4) L'étabilité globale.
- (5) Les relations entre l'étabilité et la vulnérabilité.
- (6) La dualité attracteurs - étaleurs. On peut la formuler sous la forme :
Soit un espace d'état Z et un système défini par un semi-groupe d'opérateurs $(S(t))$ sur Z . Z_1 et Z_2 deux parties de Z .

Définition (rappel): Z_1 est un attracteur de Z_2 si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(S(t)z_2, Z_1) = 0 \quad ; \quad \forall z_2 \in Z_2$$

Définition (conjecture): Z_1 est un "étaleur" sur Z_2 si

$$\lim_{t \rightarrow 0} d(S(t)z_2, Z_1) = 0 \quad ; \quad \forall z_2 \in Z_2$$

qui se traduit par le fait que, nécessairement, les images des éléments de Z_2 résultent ou proviennent de Z_1 . Peut-on utiliser les résultats sur les attracteurs moyennant un changement de variable adéquat?

- (7) L'utilisation de l'analyse régionale pour corriger des conditions (aux limites) non régulières.
- (8) L'approche des divers problèmes de contrôle par automates cellulaires, qui est actuellement en cours. etc.

Références

- [1] L. Affi, A. El Jai, Strategic Sensors and Spy Sensors, *International Journal on Applied Mathematics and Computer Science*, **4**(4), (1994).
- [2] L. Affi, A. El Jaï, M. Merry, Regional detection and reconstruction of unknown internal or boundary sources, *Applied Mathematics and Computer Science*, **11**, 319-348 (2001).
- [3] L. Affi, A. Chafai, A. El Jaï, Regionally efficient and strategic actuators, *International Journal of Systems Sciences*, **33**, 1-12 (2002).
- [4] R. Al-Saphory, A. El Jaï, Sensors structures and regional detectability of parabolic distributed systems, *International Journal of Sensors and Actuators*, **29**, 163-171 (2001).
- [5] R. Al-Saphory, A. El Jaï, Sensors structures and regional detectability of parabolic systems, *International Journal of Sensors and Actuators, A*, **3027**, 1-9 (2001).
- [6] R. Al-Saphory, A. El Jaï, Sensors and asymptotic observer for distributed diffusion systems, *International Journal of Sensors*, **1**, 161-182 (2001).
- [7] R. Al-Saphory, A. El Jaï, Sensors characterizations for regional boundary detectability of distributed parameter systems, *International Journal on Sensors and Actuators*, **94**, 1-10 (2001).
- [8] A. Belfekih, A. El Jai, Exacte contrôlabilité et contrôle optimal des systèmes paraboliques, *Revue APII. Control/Systems Analysis*, **24**, 357-376 (1990).
- [9] A. Bernoussi, A. El Jai, New Approach of Spreadability, *Mathematical and Computer Modelling*, **31**, 93-109, (2000).
- [10] A. Bernoussi, A. El Jai, A. J. Pritchard, Spreadability and evolving interfaces, *International Journal of Systems Science*, **32**(10), 1217-1232 (2001).
- [11] J. Bouyaghroumni, A. El Jaï, M. Rachik, Admissible disturbance sets for discrete perturbed systems, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, **11**, 349-368 (2001).
- [12] O. Cabrera, A. El Jai, K. Kassara, Spray Control, *International Journal of Control*, **68**(4), 709-730 (1997).
- [13] A. El Jai, Distributed systems analysis via sensors and actuators, *International Journal on Sensors and Actuators, A*, **29**, 1-11 (1991).
- [14] A. El Jai, *Analyse régionale des systèmes distribués*, Lions, Volume CocV, 2002.
- [15] A. El Jai, L. Berrahmoune, Localisation d'actionneurs zones pour la contrôlabilité de systèmes paraboliques, *C.-R. Acad. Sci. Paris*, **297**, 12-19 (1983).
- [16] A. El Jai, L. Berrahmoune, Localisation d'actionneurs ponctuels pour la controlabilité de systèmes paraboliques, *C.-R. Acad. Sci. Paris*, **298**(3), (1984).
- [17] A. El Jai, A. Belfekih, Sur le choix de la répartition spatiale du contrôle dans les systèmes distribués, *A.P.I.I. Control/Systems analysis*, **21**(5), 493-505 (1987).
- [18] A. El Jai, A.J. Pritchard, Actuators and sensors in distributed parameter systems, *International Journal of Control*, **46**(4), 1139-1153 (1987).
- [19] A. El Jai, A. Gonzalez, Actionneurs et contrôlabilité des systèmes hyperboliques, *APII. Control/Systems analysis*, **23**(4), (1989).
- [20] A. Belfekih, J. Bouyaghroumni, A. El Jai, Observability and sensors for hyperbolic systems, *International Journal of Systems Science*, **22**(7), 1255-1265 (1991).

- [21] A. El Jai, S. El Yacoubi, On the relations between actuators structures and final constraint minimum energy systems, *Int. journal on sensors and actuators*, **33**(3), 175-182 (1992).
- [22] A. El Jai, M.C. Simon, E. Zerrik, Regional observability and sensors structures, *International Journal on Sensors and Actuators*, **39**(2), 95-102 (1993).
- [23] A. El Jai, S. El Yacoubi, On the number of actuators in distributed systems, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, **3**(4), (1993).
- [24] A. El Jai, L. Afifi, Observabilité des systèmes distribués discrets dans un tube, *Moroccan Journal of Control Computer Science and Signal Processing*, **4**, (1994).
- [25] A. El Jai, L. Afifi, Spy Sensors and Detection, *International Journal of Systems Science*, **26**(8), 1447-1463 (1995).
- [26] A. El Jai, E. Zerrik, M.C. Simon, M. Amouroux, Regional observation of a thermal process, *I.E.E.E transactions on Automatic Control*, **40**(3), (March 1995).
- [27] A. El Jai, A.J. Pritchard, M.C. Simon, E. Zerrik, Regional controllability of distributed systems, *International Journal of Control*, **62**(6), 1351-1365 (1995).
- [28] A. El Jai, Nouvelle approche pour la modélisation de systèmes en expansion spatiale: Dynamique de végétation, *Tendances nouvelles en modélisation pour l'environnement*, Elsevier, 439-445 (1997).
- [29] A. El Jai, S. El Yacoubi, J. Karrakchou, Spreadability and spray actuators, *Journal of Applied Mathematics and computer Science*, **8**(2), (1998).
- [30] A. El Jai, E. Zerrik, L. Badraoui, Sensors and regional boundary state reconstruction of parabolic systems, *International Journal on Sensors and Actuators*, **75**, 102-117 (1999).
- [31] A. El Jai, O. Cabrera, M. Fournier, Y. Maurissen, A prediction-correction alternative for modelling spatio-temporal systems. Application to an ecological problem, *Journal of Ecological Modelling*, **116**, 237-251 (1999).
- [32] A. El Jai, E. Zerrik, A. Boutoulout, Actuators and regional boundary controllability of parabolic systems, *International Journal of Systems Science*, **31**(1), 73-82 (2000).
- [33] A. El Jai, L. Afifi and M. Merry. *Detection and sources reconstruction in a tube*. International Journal of Systems Science, Volume 31, number 2, pp 149 - 159, 2000.
- [34] A. El Jai and S. El Yacoubi. *Modelling spatio-temporal systems via Cellular Automata*. Mathematical and Computer Modelling. à paraître.
- [35] S. El Yacoubi, A. El Jaï and N. Ammor. *Regional controllability with cellular automata models*. Lecture Notes in Computer Sciences, Springer, LNCS2493, (2002), 367-375.
- [36] S. El Yacoubi, A. El Jaï, P. Jacewicz, J. Pausas, LUCAS: an original tool for landscape modelling, *Environmental Modelling and Software*, à paraître.
- [37] S. El Yacoubi, D. Ucinski, Estimation de paramètres de modèles d'automates cellulaires, *CD-ROM de l'IEEE Conférence Internationale Francophone d'Automatique CIFA 2002*, Nantes, 412-416 (8-10 juillet 2002).
- [38] A. El Jaï, E. Guisset, A. Trombe, A. Suleiman, Application of regional boundary observation to a thermal system, *CD-ROM Proceedings of the Fourteenth International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS 2000)*, Perpignan, (June 19-23 2000).
- [39] K. Kassara, *Etalabilité des systèmes distribués*, Thèse d'Etat, Univ Md V, Rabat, Maroc, 1998.
- [40] K. Kassara, A. El Jai, Spreadable Distributed Systems, *Mathematical and Computer Modelling*, **20**(1), 47-64 (1994).
- [41] K. Kassara, A. El Jai, Spreadability of Transport Systems, *International Journal of Systems Science*, **27**(7), 681-688 (1996).
- [42] J.L. Lions, *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Paris, Dunod, 1968.
- [43] J.L. Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation des systèmes distribués*, RMA 8 et 9, Paris, Masson, 1988.
- [44] J. A. Sethian, Curvature and the evolution of fronts, *Comm. in Math. Phys.*, **101**, 487-499 (1985).
- [45] J. A. Sethian, *Level set methods: evolving interfaces in geometry, fluid mechanics, computer vision and material sciences*, Cambridge monographs on Applied and computational Mathematics.
- [46] D. Ucinski, A. El Jai, On weak spreadability of DPS and its Achievement via LQ Control Techniques, *IMA Journal on Control and Information Science*, **14**, 1-22 (1997).

- [47] E. Zerrik, L. Badraoui, A. El Jai, Sensors and regional boundary state reconstruction of parabolic systems, *Sensors and Actuators*, **75**, 102-117 (1999).
- [48] E. Zerrik, L. Badraoui, Sensors characterization for regional boundary observability, *Int. J. Appl. Math. and Comp. Sci.*, **10**(2), 345-356 (2000).
- [49] E. Zerrik, A. Boutoulout, A. El Jai, Actuators and regional boundary controllability of parabolic systems, *International Journal of Systems Science*, **31**(1), 73-82 (2000).

(Abdelhaq El Jai) LABORATOIRE DE THÉORIE DES SYSTÈMES
 UNIVERSITÉ DE PERPIGNAN
 52 AVENUE DE VILLENEUVE, 66860 PERPIGNAN, FRANCE
 TEL/FAX: 33-468661760
 E-mail address: aej@univ-perp.fr