Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser.
Volume 30, 2003, Pages 177–187
ISSN: 1223-6934

Contact unilatéral des structures minces: modélisation, calcul et applications

Jean-Claude Paumier

Résumé. Le but de cette exposé est d'expliquer les conséquences d'une modélisation de structure mince sur la résolution d'un problème de contact afférent. Pour cela on considère une plaque mince élastique tridimensionnelle en contact unilatéral avec frottement sur un obstacle rigide que l'on cherche à écrire sous la forme d'un problème bidimensionnel. Ce travail est abordé par la méthode asymptotique. Ensuite, dans le cas sans contact, certains aspects numériques sont analysés sur un problème simple pour mettre en évidence un phénomène de verrouillage. Une présentation du modèle de Mindlin-Reissner est faite dans ce cas. Pour terminer on montre comment on peut tirer parti des bonnes propriétés des formulations bidimensionnelles pour améliorer la résolution du problème de contact d'un corps tridimensionnel contre une fondation rigide.

Classification AMS 2000 des sujets. 35J20, 35R45, 35J60, 35J85, 34D15, 47H04, 47H10, 47H14, 49M29, 49J40, 65M60, 78M35, 78M10, 74M10, 74M15, 80M30.
Mots clef et phrases. plaque élastique, problème de Signorini, frottement de Coulomb, point fixe, méthode asymptotique, méthode des éléments finis, verrouillage.

1. Introduction

On désigne par *structures minces* les corps solides dont l'une des dimensions (l'épaisseur) est petite devant les autres. Ce sont les plaques, les coques, les barres, les filaments... L'intérêt pour une modélisation fine de ces structrures est d'autant plus grand que le nombre des applications industrielles va croissant. Une modélisation fine doit prendre en compte la faible épaisseur et en déduire des simplifications au modèle de départ qui est tridimensionnel. De nombreux modèles bidimensionnels ont ainsi été décrits depuis plus d'un siècle. Dans les trente dernières années, P.G. Ciarlet [1] et ses collaborateurs se sont attachés à donner des justifications mathématiques à ces modèles et à en construire de nouveaux.

Le *contact unilatéral des corps solides*, avec ou sans frottement, est une contrainte mécanique souvent rencontrée en modélisation. Citons par exemple le frottement d'une tôle dans un procédé d'emboutissage, le contact d'un pneu sur la route, le déploiement d'un airbag ... Signorini écrit en 1933 une formulation du problème de contact unilatéral sans frottement. C'est en 1963 que Fichera [2] réalise l'analyse de ce problème. Dans le livre de Duvaut et Lions [3], paru en 1972, on trouve de nouveaux résultats d'existence et les problèmes ouverts sont désignés. Néčas, Jarušek et Haslinger [7] vont, à partir de 1980, résoudre un problème statique de contact unilatéral avec frottement. Les résulats d'existence les plus généraux sont donnés ensuite par Jarušek [4], Kato [5] et par Eck et Jarušek [6].

Reçu: le 11 décembre 2002.

Nous voulons ici examiner les conséquences du choix de modélisation de la structure mince sur la résolution du problème de contact. On se base sur un problème statique de plaque élastique mince en contact unilatéral avec frottement contre un obstacle rigide. À l'aide d'une analyse asymptotique, on construit un modèle bidimensionnel de contact basé sur le modèle de Kirchhoff-Love dans lequel le terme de frottement disparait nécessairement. Certains aspects numériques (verrouillage) sont abordés dans un deuxième temps à partir d'un problème modèle traité sans contact. Ensuite, toujours dans le cas sans contact, on montre comment on peut écrire un modèle bidimensionnel aboutissant au modèle de Mindlin-Reissner grâce à une méthode d'approximation polynomiale dans l'épaisseur. Pour terminer on utilise les propriétés des formulations bidimensionnelles en plaçant un revêtement élastique autour d'un corps élastique tridimensionnel pour améliorer la résolution du problème de son contact unilatéral avec frottement contre un obstacle rigide.

2. Modélisation asymptotique d'une plaque mince

Soit ω ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^2$ de frontière γ. On note $\Omega^\varepsilon = \omega\times]-\varepsilon,\varepsilon[$ l'ouvert "plaque" de point courant $x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon$. Sa face latérale est notée $\Gamma_0^\varepsilon = \gamma\times]-\varepsilon,\varepsilon[$ ainsi que $\overline{\Gamma}^\varepsilon = \gamma \times \{\varepsilon\}$ et $\underline{\Gamma}^\varepsilon = \gamma \times \{-\varepsilon\}$ ses faces supérieures et inférieures.

À partir de l'espace $V(\Omega^\varepsilon) = \{v \in H^1(\Omega^\varepsilon) \ / \ v = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^\varepsilon\}$, on définit l'espace des déplacements admissibles :

$$\overrightarrow{V}(\Omega^\varepsilon) = (\ V(\Omega^\varepsilon)\ )^3.$$

Les coefficients de Lamé λ et G sont supposés constants. Les composantes du tenseur des déformations s'écrivent $e^\varepsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_j}{\partial x^\varepsilon_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x^\varepsilon_j})$. La forme de l'élasticité s'écrit :

$$a^\varepsilon(u,v) = \int_{\Omega^\varepsilon} \{\lambda e^\varepsilon_{ii}(u) e^\varepsilon_{jj}(v) + 2G e^\varepsilon_{ij}(u) e^\varepsilon_{ij}(v)\}\, dx^\varepsilon.$$

Notons les forces de volume $f^\varepsilon = (f^\varepsilon_i)$, telles que $f^\varepsilon_i \in L^2(\Omega^\varepsilon)$ ainsi que les forces de surface $g^\varepsilon = (g^\varepsilon_i)$ telles que $g^\varepsilon_i \in L^2(\underline{\Gamma}^\varepsilon \cup \overline{\Gamma}^\varepsilon)$. Finalement on définit la forme linéaire : $L^\varepsilon(v) = \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon_i v_i \, dx^\varepsilon + \int_{\underline{\Gamma}^\varepsilon} g^\varepsilon_i \underline{v}_i \, d\sigma + \int_{\overline{\Gamma}^\varepsilon} g^\varepsilon_i \overline{v}_i d\sigma$ où $\underline{v}_i$ dénote la trace de v_i sur $\underline{\Gamma}^\varepsilon$ et $\overline{v}_i$ celle sur $\overline{\Gamma}^\varepsilon$.

On peut maintenant écrire le *problème de plaque* (qui admet une unique solution) :

$$\begin{array}{l} \text{trouver } u^\varepsilon \in \overrightarrow{V}(\Omega^\varepsilon) \quad \text{tel que} \ : \\ a^\varepsilon(u^\varepsilon,v) = L^\varepsilon(v), \forall v \in \overrightarrow{V}(\Omega^\varepsilon). \end{array}$$

On fait un changement d'échelle pour se ramener à l'ouvert fixe $\Omega = \omega\times]-1,+1[$. Avec la bijection $\chi^\varepsilon : \mathbb{R}^3 \ni x = (x_1,x_2,x_3) \longmapsto (x_1,x_2,\varepsilon x_3) = x^\varepsilon \in \mathbb{R}^3$ on a $\chi^\varepsilon(\Omega) = \Omega^\varepsilon$. Les faces supérieure et inférieure de Ω sont notées : $\overline{\Gamma} = \omega \times \{1\}$ et $\underline{\Gamma} = \omega \times \{-1\}$ ainsi que $\Gamma_0 = \gamma\times]-1,1[$ sa face latérale.

Comme ci-dessus, à partir de l'espace $V(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \ / \ v = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0\}$, on définit l'*espace des déplacements admissibles mis à l'échelle* :

$$\overrightarrow{V}(\Omega) = (\ V(\Omega)\ )^3.$$

On obtient le modèle de plaque de Kirchhoff-Love à l'aide du changement d'échelle :

- *à la solution* $u^\varepsilon \in \overrightarrow{V}\ (\Omega^\varepsilon)$ *on associe* $u(\varepsilon) \in \overrightarrow{V}(\Omega)$ *tel que :*

$$u^\varepsilon_\alpha \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon^2 u_\alpha(\varepsilon), \ \ u^\varepsilon_3 \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon u_3(\varepsilon).$$

Les fonctions tests subissent la même transformation :
$\overrightarrow{V}(\Omega) \ni v \longmapsto v^\varepsilon \in \overrightarrow{V}(\Omega^\varepsilon)$ *où* $v_1^\varepsilon \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon^2 v_1,\ v_2^\varepsilon \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon^2 v_2,\ v_3^\varepsilon \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon v_3$.

- *sur la forme linéaire* L^ε *on fait l'hypothèse :*

$$L^\varepsilon(v^\varepsilon) = \varepsilon^5 L(v), \forall v \in \overrightarrow{V}(\Omega).$$

On suppose pour cela $f_\alpha^\varepsilon \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon^2 f_\alpha,\ f_3^\varepsilon \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon^3 f_3,\ g_\alpha^\varepsilon \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon^3 g_\alpha,\ g_3^\varepsilon \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon^4 g_3$ pour des $f_i \in L^2(\Omega)$ *et* $g_i \in L^2(\underline{\Gamma} \cup \overline{\Gamma})$ donnés indépendants de ε.

Dans ce changement on simplifie par ε^5 la forme $a^\varepsilon(\cdot,\cdot)$ qui se transforme en :

$$A^\varepsilon(u,v) = a_0(u,v) \ + \ \frac{1}{\varepsilon^2}\, a_2(u,v) \ + \ \frac{1}{\varepsilon^4}\, a_4(u,v)$$

avec $a_0(u,v) = \int_\Omega \{\lambda e_{\alpha\alpha}(u) e_{\beta\beta}(v) + 2G\, e_{\alpha\beta}(u) e_{\alpha\beta}(v)\}\ dx$,
$a_2(u,v) = \int_\Omega \{\lambda\,(e_{\alpha\alpha}(u) e_{33}(v) + e_{33}(u) e_{\alpha\alpha}(v)) + 4G\, e_{\alpha 3}(u) e_{\alpha 3}(v)\}\ dx$,
et $a_4(u,v) = \int_\Omega (\lambda + 2G)\ e_{33}(u) e_{33}(v)\, dx$.

Le problème équivalent de plaque *mis à l'échelle* s'écrit donc :

$$\text{trouver } u(\varepsilon) \in \overrightarrow{V}(\Omega) \text{ tel que } :$$
$$\forall v \in \overrightarrow{V}(\Omega) \ : \ A^\varepsilon(u(\varepsilon),v) = L(v).$$

Convergence de la suite $u(\varepsilon)$**.** L'espace (dit *de Kirchhoff-Love*)

$$\overrightarrow{V_{KL}}(\Omega) = \Big\{ v \in \overrightarrow{V}(\Omega)\ /\ e_{i3}(v) = 0,\ i = 1,2,3 \Big\}$$

est isomorphe à $(\ H_0^1(\omega)\ )^2 \times H_0^2(\omega)$ *via* l'application : $\eta \longmapsto \mathcal{I}_{KL}(\eta) = v \in \overrightarrow{V_{KL}}(\Omega)$ telle que $v_\alpha(x) = \eta_\alpha(x_1,x_2) - x_3\ \partial_\alpha \eta_3(x_1,x_2)$ pour $\alpha = 1,2$ et $v_3(x) = \eta_3(x_1,x_2)$.

En 1979 une première application formelle de la méthode asymptotique au cas des plaques est réalisée par Ciarlet et Destuynder. Le résultat de convergence est dû à Destyunder en 1981. Nous le donnons ci-dessous dans la formulation “déplacement” (voir Ciarlet [1]). Au préalable on définit la forme bilinéaire :

$$a_0^*(u,v) = \int_\Omega \{\lambda^* e_{\alpha\alpha}(u) e_{\beta\beta}(v) + 2G e_{\alpha\beta}(u) e_{\alpha\beta}(v)\}\ dx$$

avec $\lambda^* = \frac{2\lambda G}{\lambda + 2G}$, ainsi que l'élément $u(0)$ qui est l'unique solution du *problème limite* :

$$\text{trouver } u(0) \in \overrightarrow{V_{KL}}(\Omega) \text{ tel que } :$$
$$a_0^*(u(0),v) = L(v), \forall v \in \overrightarrow{V_{KL}}(\Omega).$$

Théorème 2.1. *Sous les hypothèse décrites ci-dessus on a* $\lim_{\varepsilon \to 0} \|u(\varepsilon) - u(0)\|_{1,\Omega} = 0$.

On peut interpréter le *problème limite* en termes de problèmes bidimensionnels car $u_\alpha(0) = \mathcal{I}_{KL}(\zeta)$ c'est à dire : $u_\alpha(0)(x) = \zeta_\alpha(x_1,x_2) - x_3\ \partial_\alpha \zeta_3(x_1,x_2)$ pour $\alpha = 1,2$ et $u_3(0)(x) = \zeta_3(x_1,x_2)$ avec $\zeta \in (\ H_0^1(\omega)\ )^2 \times H_0^2(\omega)$. Après intégration en x_3 on obtient deux modèles (avec $h_i^0 = \int_{-1}^{+1} f_i(\cdot,x_3)\, dx_3 + g_i^+ + g_i^-$) :

$\to$ le *“modèle en extension” où* $\zeta' = (\zeta_\alpha) \in \left(H_0^1(\omega)\right)^2$ satisfait, $\forall \eta \in \left(H_0^1(\omega)\right)^2$:

$$\int_\omega \{\lambda^* e_{\alpha\alpha}(\zeta) e_{\beta\beta}(\eta) + 2G e_{\alpha\beta}(\zeta) e_{\alpha\beta}(\eta)\}\ dx' = \int_\omega h_\alpha^0 \eta_\alpha\ dx_1 dx_2,$$

$\to$ le *“modèle en flexion”* (où $k = \frac{8}{3} G \frac{\lambda + G}{\lambda + 2G}$ et $h_3^1 = \int_{-1}^{+1} x_3\ \partial_\alpha f_\alpha dx_3 + \partial_\alpha g_\alpha^+ - \partial_\alpha g_\alpha^-$)

$$\zeta_3 \in H_0^2(\omega) \text{ satisfait } : \quad k\ \Delta^2 \zeta_3 = h_3^0 + h_3^1 \ \text{ dans } \ \omega.$$

Il conviendra ensuite de revenir dans le cadre physique du problème de départ en faisant le changement d'échelle inverse.

3. Présentation générale du problème de Signorini

Considérons un corps élastique dont le bord est partionné en trois sous-ensembles Γ_u où le déplacement est imposé, Γ_n où des efforts sont imposés et Γ_c qui est la partie dédiée au contact contre un obstacle rigide. On suppose que ce contact est unilatéral avec frottement et on note $\mu \geq 0$ le coefficient de frottement. Adoptons sur la partie Γ_c les notations " T " pour "Tangentiel" et " N " pour "Normal" dans la description du champ u des déplacements et de la distribution G (inconnue) des forces de contact : $u = (u_T,u_N)$ et $G = (G_T,G_N)$.

Rappelons les notations classiques : $a(\cdot,\cdot)$ la forme bilinéaire de l'élasticité, $f(v)$ le travail virtuel des efforts imposés, $\langle\, G_T,v_T \,\rangle + \langle\, G_N,v_N \,\rangle$ le travail virtuel des efforts de contact, V_{ad} l'espace affine des déplacements admissibles et V_0 l'espace vectoriel associé. Le problème d'élastostatique s'écrit classiquement :

$$\text{trouver } u \in V_{ad} \text{ tel que :}$$
$$a(u,v) = f(v) + \langle\, G_T,v_T \,\rangle + \langle\, G_N,v_N \,\rangle, \quad \forall v \in V_0.$$

Deux inéquations restent à préciser à partir des conditions de contact unilatéral avec frottement décrites ci-dessous pour $x \in \Gamma_c$ (après (**i**) on pose $|G_N(x)| = -G_N(x)$) :

(i): contact unilatéral : $u_N(x) \leq 0, \quad G_N(x) \leq 0, \;\; u_N(x)\, G_N(x) = 0,$

(ii): frottement de Coulomb : $||G_T(x)|| \;\leq\; \mu\, |G_N(x)|$ tel que :
$\rightarrow$ si $||G_T(x)|| \;<\; \mu\, |G_N(x)|$ alors $u_T(x) = 0,$
$\rightarrow$ si $||\, G_T(x)|| = \;\mu\, |G_N(x)|$ alors $\exists \lambda \geq 0$ tel que $\quad u_T(x) = -\lambda\, G_T(x).$

Écriture sous forme faible des conditions (i)—(ii). Introduisons les fonctions multivaluées $J_N \;:\; \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et Dir : $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$:
$\rightarrow J_N(\xi) = \{0\}$ si $\xi < 0, \;\; J_N(0) = [0,+\infty[, \;\; J_N(\xi) = \phi$ si $\xi > 0,$
$\rightarrow \mathrm{Dir}(v) = \frac{v}{||v||}, \forall v \neq 0, \mathrm{Dir}(0) = \{v \in \mathbb{R}^n \;/\; ||v|| \leq 1\}.$

Les conditions (**i**)–(**ii**) s'écrivent en chaque $x \in \Gamma_c$ sous la forme des inclusions : $G_N(x) \in -J_N(\, u_N(x)\,)$ et $G_T(x) \in -\mu \;\; |G_N(x)| \;\; \mathrm{Dir}(\, u_T(x)\,)$.

Remarquons que $p \in J_N(\xi)$ s'écrit comme l'inclusion de p dans le *sous-différentiel* en ξ de la fonction indicatrice de l'ensemble $]-\infty,0]$ qui se traduit variationnellement par : $\;\xi \leq 0\;$ et $\{\; p\; (\zeta - \xi) \;\leq\; 0, \;\; \forall \zeta \leq 0 \;\}$. De même $q \in \mathrm{Dir}(v)$ s'écrit comme l'inclusion de q dans le *sous-différentiel* en v de la fonction " norme dans $\mathbb{R}^n$ " qui se traduit variationnellement par : $\;||w|| - ||v|| - q \cdot (w - v) \;\geq\; 0, \;\; \forall w \in \mathbb{R}^n.$

Par intégration sur Γ_c on en déduit une écriture sous *forme faible* des conditions (**i**)–(**ii**) en posant $K_{ad} = \{v \in V_{ad} \;/\; v_N \leq 0, \text{ sur } \Gamma_c \;\}$:

$$\langle\, G_N,v_N - u_N \,\rangle \;\;\geq\;\; 0, \;\; \forall v \in K_{ad},$$
$$\langle\, G_T,v_T - u_T \,\rangle + \langle\, \mu\, |G_N|,||v_T|| - ||u_T||\, \rangle \;\;\geq\;\; 0, \;\; \forall v \in V_{ad}.$$

On peut donc maintenant écrire le problème de Signorini avec frottement :

$$\text{trouver } \; u \in K_{ad},\, G_T \in H^{-1/2}(\Gamma_c),\, G_N \in H^{-1/2}(\Gamma_c) \;\text{ tels que :}$$
$$a(u,v) = (f,v) + \langle\, G_T,v_T \,\rangle + \langle\, G_N,v_N \,\rangle, \;\; \forall v \in V_0,$$
$$\langle\, G_N,v_N - u_N \,\rangle \;\;\geq\;\; 0, \;\; \forall v \in K_{ad},$$
$$\langle\, G_T,v_T - u_T \,\rangle + \langle\, \mu\, |G_N|,||v_T|| - ||u_T||\, \rangle \;\;\geq\;\; 0, \;\; \forall v \in V_{ad}$$

où $H^{-1/2}(\Gamma_c)$ dénote l'espace dual de l'espace $H^{1/2}(\Gamma_c)$. Sous des conditions assez restrictives ce problème admet au moins une solution (voir Jarušek [4] et [6]). Voici le résultat d'existence (*point fixe de Jarušek*) : on commence par définir un *problème auxiliare* où le seuil de frottement $S \in H^{-1/2}(\Gamma_c)$ est imposé tel que $S \geq 0$:

$$\begin{gathered}\text{trouver} : u \in K_{ad},\ G_T \in H^{-1/2}(\Gamma_c),\ G_N \in H^{-1/2}(\Gamma_c) \text{ tels que} :\\ a(u,v) = (f,v) + \langle\ G_T,v_T\ \rangle + \langle\ G_N,v_N\ \rangle,\ \ \forall v \in V_0,\\ \langle\ G_N,v_N - u_N\ \rangle \ \ \geq \ \ 0,\ \ \forall v \in K_{ad},\\ \langle\ G_T,v_T - u_T\ \rangle + \langle\ \mu\ S,||v_T|| - ||u_T||\ \rangle \ \geq \ \ 0,\ \ \forall v \in V_{ad}.\end{gathered}$$

Ce problème est bien posé puisqu'il correspond à la *minimisation sur le convexe* K_{ad} de la fonctionnelle $v \mapsto J(v) = \frac{1}{2}\ a(v,v) + \langle\ \mu\ S,|v_T|\ \rangle - (f,v)$. Notons $(u(S),G_T(S),$ $G_N(S))$ sa solution. Le problème est résolu dans l'espace $H^{-1/2+\alpha}(\Gamma_c)$ grâce à un *point fixe* (Théorème de Tichonov) $\mu S = \mu|G_N(S)|$ sur la mesure S.

4. Contact unilatéral d'une plaque mince

On va fusionner ici les notations introduites dans les sections 2 et 3. Le déplacement est nul sur $\Gamma_u = \Gamma_0^\varepsilon$ (surface latérale) et les efforts f seront imposés dans Ω^ε et sur $\Gamma_n = \underline{\Gamma}^\varepsilon$ (surface inférieure) par le truchement des fonctions f_i^ε et $g_i^{\varepsilon-}$. Le contact aura lieu sur la surface supérieure $\Gamma_c = \overline{\Gamma}^\varepsilon$ (de ce fait les données $g_i^{\varepsilon+}$ associées à cette face disparaissent). Grâce à une *fonction d'interstice* u_3^0 satisfaisant :

$$u_3^0 \in H_0^2(\omega) \ \text{ et } \ u_3^0 \geq 0 \text{ sur } \omega,$$

la condition de contact unilatéral est définie par l'inégalité : $\overline{v}_3 \ \leq \ \varepsilon\ u_3^0$ sur $\overline{\Gamma}^\varepsilon$.

À partir de l'ensemble convexe fermé $K(\Omega^\varepsilon) = \left\{v \in V(\Omega^\varepsilon)\ /\ \overline{v}_3 \leq \varepsilon\ u_3^0\right\}$ on pose :

$$\overrightarrow{K}(\Omega^\varepsilon) = (\ V(\Omega^\varepsilon)\ )^2 \times K(\Omega^\varepsilon).$$

Les inconnues sont : la distribution des forces de frottement $G_T = (G_\alpha^\varepsilon)$, la distribution des pressions de contact $G_N = G_3^\varepsilon$, le champ des déplacements $u = u^\varepsilon$ (tangentiels $u_T = (\overline{u}_\alpha^\varepsilon)$ et normaux $u_N = \overline{u}_3^\varepsilon$ sur $\overline{\Gamma}^\varepsilon$). Le seuil de frottement S^ε est supposé donné dans un premier temps afin de travailler sur un problème bien posé. Celui-ci s'écrit :

$$\begin{gathered}\text{trouver } u^\varepsilon \in \overrightarrow{K}(\Omega^\varepsilon) \ \text{ et } \ G_1^\varepsilon,\ G_2^\varepsilon,\ G_3^\varepsilon \in \ H^{-1/2}(\overline{\Gamma}^\varepsilon) \text{ tels que} :\\ a^\varepsilon(u^\varepsilon,v) = L^\varepsilon(v) + \langle G_i^\varepsilon,\overline{v}_i\rangle\ , \forall v \in \overrightarrow{V}(\Omega^\varepsilon),\\ \langle G_3^\varepsilon,\overline{v}_3 - \overline{u}_3^\varepsilon\rangle \ \geq \ 0,\ \forall v_3 \in K(\Omega^\varepsilon),\\ \langle G_\alpha^\varepsilon,\overline{v}_\alpha - \overline{u}_\alpha^\varepsilon\rangle + \ \langle\ \mu\ S^\varepsilon,\ ||v_T|| - ||u_T^\varepsilon||\ \rangle \ \geq \ 0,\ \forall (v_1,v_2) \in (\ V(\Omega^\varepsilon)\ )^2 .\end{gathered}$$

Nous effectuons maintenant les *changements d'échelle* de la section 2. La condition de contact devient ainsi : $\overline{v}_3 \ \leq \ u_3^0$. À partir de $K(\Omega) = \left\{v \in V(\Omega)\ /\ \overline{v}_3 \ \leq \ u_3^0\right\}$ on introduit le convexe des déplacements admissibles :

$$\overrightarrow{K}(\Omega) = (\ V(\Omega)\ )^2 \times K(\Omega).$$

Par analogie avec la théorie de la section 2 et en tenant compte de $G_3^\varepsilon = -S^\varepsilon$, on fait les hypothèses suivantes sur les forces de contact et le seuil avec $v^\varepsilon = v \circ \chi^\varepsilon$:

$$\langle G_\alpha^\varepsilon,v\rangle = \varepsilon^3 \langle G_\alpha(\varepsilon),v^\varepsilon\rangle\ ,\ \ \langle G_3^\varepsilon,v\rangle = \varepsilon^4 \langle G_3(\varepsilon),v^\varepsilon\rangle \ \ \text{et} \ \ \langle S^\varepsilon,v\rangle = \varepsilon^4 \langle S(\varepsilon),v^\varepsilon\rangle\ .$$

L'*hypothèse supplémentaire* qui suit porte aussi sur la famille des seuils :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon\ S(\varepsilon) = 0, \text{ dans } H^{-1}(\omega)\text{−faible} \star .$$

Dans ces conditions il n'y a aucune difficulté pour mettre à l'échelle le problème de contact pour la plaque mince (qui reste un problème bien posé) :

$$\begin{gathered}\text{trouver} \quad u(\varepsilon) \in \overrightarrow{K}(\Omega) \text{ et } \ G_1(\varepsilon),\ G_2(\varepsilon),\ G_3(\varepsilon) \in H^{-1/2}(\overline{\Gamma}) \text{ tels que } :\\ A^\varepsilon(u(\varepsilon),v) = L(v) + \langle G_i(\varepsilon),\overline{v}_i\rangle\ ,\ \ \forall v \in \overrightarrow{V}(\Omega)\end{gathered}$$

$$\langle G_3(\varepsilon), \overline{v}_3 - \overline{u}_3(\varepsilon)\rangle \ \geq\ 0, \forall v_3 \in K(\Omega)$$
$$\langle G_\alpha(\varepsilon), \overline{v}_\alpha - \overline{u}_\alpha(\varepsilon)\rangle + \varepsilon \,\langle \mu\, S(\varepsilon), ||v_T|| - ||u_T(\varepsilon)||\rangle \ \geq\ 0, \forall (v_1, v_2) \in (V(\Omega))^2\,.$$

Convergence de la suite $u(\varepsilon)$**.** Avec $K(\omega) = \{\ \eta_3 \in H^2_0(\omega)\ /\ \eta_3\ \leq\ u^0_3\ \}$ on pose $\overrightarrow{K}(\omega) = (\ H^1_0(\omega)\ )^2 \times K(\omega)$.
Le résultat qui suit est publié dans Paumier [10]. On y note $\{(u(\varepsilon), G(\varepsilon))\}$ la famille des solutions du problème ci-dessus :
(**i**) soit pour une famille $\{S(\varepsilon)\}$ de seuils donnés,
(**ii**) soit pour une famille $\{S(\varepsilon)\}$ de seuils solutions des points fixes de Jarušek.

Théorème 4.1. *Sous les hypothèses décrites ci-dessus on a* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|u(\varepsilon) - u(0)\|_{1,\Omega} = 0$ *et* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} ||G_3(\varepsilon) - G_3(0)||_{-2,\omega} = 0$ *où* $(u(0), G_3(0))$ *est l'unique solution de :*

$$u(0) \in V_{KL}(\Omega) \cap \overrightarrow{K}(\Omega) \text{ et } G_3(0) \in H^{-2}(\omega) \text{ tel que } :$$
$$a^*_0(u(0), v) = L(v) + \langle G_3(0), v_3\rangle\,, \forall v \in \overrightarrow{V_{KL}}(\Omega),$$
$$\langle G_3(0), v_3 - u_3(0)\rangle \ \geq\ 0, \forall v_3 \in K(\omega),$$

De plus dans le cas (**i**) *on a* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} G_\alpha(\varepsilon) = 0$ *faible-*$\star$ *dans* $H^{-1}(\omega)$*, dans le cas* (**ii**) *on a* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} ||G_\alpha(\varepsilon)||_{-1,\omega} = 0$.

Idées de la preuve : Pour obtenir la preuve complète on se reportera à Paumier [9].

On commence par le cas où le seuil est imposé. On pose $\kappa_{\alpha\beta}(\varepsilon) = e_{\alpha\beta}(u(\varepsilon))$, $\kappa_{\alpha 3}(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\ e_{\alpha 3}(u(\varepsilon))$, $\kappa_{33}(\varepsilon) = \varepsilon^{-2}\ e_{33}(u(\varepsilon))$. Remarquons que $\langle G_3(\varepsilon), \overline{u}_3(\varepsilon)\rangle\ \leq\ 0$ et $\langle G_\alpha(\varepsilon), \overline{u}_\alpha(\varepsilon)\rangle\ \leq\ -\varepsilon\mu\,\langle S(\varepsilon), |\overline{u}_T(\varepsilon)|\rangle\ \leq\ 0$. Donc $A^\varepsilon(u(\varepsilon), u(\varepsilon))\ \leq\ L(u(\varepsilon))$. Ce qui s'écrit aussi $\langle\ \kappa(\varepsilon),\ \kappa(\varepsilon)\ \rangle_{0,\Omega}\ \leq\ L(u(\varepsilon))$. Avec l'inégalité de Korn on en déduit :

$$C_1\,\|u(\varepsilon)\|^2_{1,\Omega}\ \leq\ \|e(u(\varepsilon))\|^2_{0,\Omega}\ \leq\ \|\kappa(\varepsilon)\|^2_{0,\Omega}\ \leq\ C_2\,\|u(\varepsilon)\|_{1,\Omega}\,.$$

Cela signifie que $\{u(\varepsilon)\}$ et $\{\kappa(\varepsilon)\}$ sont des suites bornées. D'où les convergences faibles de sous-suites $u(\varepsilon) \rightharpoonup u(0)$ et $\kappa(\varepsilon) \rightharpoonup \kappa(0)$.
On déduit de ces estimations que $\|e_{\alpha 3}(u(\varepsilon))\|_{0,\Omega} \leq C\varepsilon$ et $\|e_{33}(u(\varepsilon))\|_{0,\Omega} \leq C\varepsilon^2$. Par conséquent : $e_{i3}(u(0)) = 0$ c'est à dire $u(0) \in \overrightarrow{V_{KL}}(\Omega)$. Dans le convexe fermé on peut passer à la limite faible et donc $u_3(0)\ \leq\ u^0_3$. Donc $u(0) \in \overrightarrow{V_{KL}}(\Omega) \cap \overrightarrow{K}(\Omega)$. Grâce à des choix particuliers de fonctions tests v dans les équations on montre que :
$\kappa_{\alpha\beta}(0) = e_{\alpha\beta}(u(0))$, $\kappa_{\alpha 3}(0) = 0$, $\kappa_{33}(0) = -\lambda^*/(2G)$.

Dans le cas du point fixe de Jarušek on montre que l'hypothèse supplémentaire sur les seuils ($\varepsilon G_3(\varepsilon) \rightharpoonup^* 0$) est satisfaite en utilisant $\kappa_{\alpha 3}(\varepsilon) \rightharpoonup 0$.
De l'inégalité $|\,\langle G_\alpha(\varepsilon), \overline{v}_\alpha\rangle\,|\ \leq\ \varepsilon\,\langle\ \mu S(\varepsilon), |\overline{v}_T|\rangle$ on tire que $G_\alpha(\varepsilon) \rightharpoonup^* 0$ ds $H^{-1}(\omega)$. Par un retour à l'équation on prouve que $G_3(\varepsilon)\ \rightharpoonup^*\ G_3(0)$ dans $H^{-2}(\omega)$. *Un point crucial* nécessitant de nouvelles estimations est de montrer que la suite de réels $\{\langle G_3(\varepsilon), \overline{u}_3(\varepsilon)\rangle\}$ converge vers $\langle G_3(0), u_3(0)\rangle$ quand $\varepsilon \to 0$. C'est alors qu'on a tous les éléments en main pour passer à la limite dans les (in)équations. En conséquence $G_3(0)$ vérifie avec $u(0)$ le *problème limite* qui a classiquement une unique solution. La convergence forte s'obtient aisément à partir de la convergence faible en estimant la norme $\|\kappa(\varepsilon) - \kappa(0)\|_{0,\Omega}$ et en utilisant la limite de $\langle G_3(\varepsilon), \overline{u}_3(\varepsilon)\rangle$. Pour montrer que $||G_3(\varepsilon) - G_3(0)||_{-2,\omega}$ tend vers zéro il faut revenir à l'équation.

Dans le cas du point fixe de Jarušek les résultats ci-dessus sont toujours valables. Mais on montre après coup que la suite $\{\varepsilon\, G_3(\varepsilon)\}$ converge vers zéro dans $H^{-1}(\omega)$ en utilisant la convergence forte de la suite $\{\kappa_{\alpha 3}(\varepsilon)\}$ vers zéro dans $L^2(\omega)$. On peut alors en déduire que la suite $\{G_\alpha(\varepsilon)\}$ converge fortement vers zéro dans $H^{-1}(\omega)$. $\square$

Interprétation en termes de problèmes bidimensionnels. Comme $u(0) \in \overrightarrow{V_{KL}}$ on a : $u_\alpha(0)(x) = \zeta_\alpha(x_1,x_2) - x_3\ \partial_\alpha\zeta_3(x_1,x_2),\ \alpha = 1,2$ et $u_3(0)(x) = \zeta_3(x_1,x_2)$ avec $\zeta_1,\zeta_2 \in H_0^1(\omega)$ et $\zeta_3 \in H_0^2(\omega)$. Après intégration dans l'épaisseur on obtient deux modèles qui se découplent (avec $h_i^0 = \int_{-1}^{+1} f_i dx_3 + g_i$) :

→ dans le *"modèle en extension"* $\zeta' = (\zeta_\alpha) \in \left(H_0^1(\omega)\right)^2$ satisfait :

$$\int_\omega \{\lambda^* e_{\alpha\alpha}(\zeta)e_{\beta\beta}(\eta) + 2Ge_{\alpha\beta}(\zeta)e_{\alpha\beta}(\eta)\}\ dx' = \int_\omega h_\alpha\eta_\alpha\ dx',\ \ \forall\eta \in \left(H_0^1(\omega)\right)^2$$

→ dans le *"modèle en flexion"* ($k = \frac{8}{3}G\frac{\lambda+G}{\lambda+2G}$ et $h_3^1 = \int_{-1}^{+1} x_3\ \partial_\alpha f_\alpha dx_3 - \partial_\alpha g_\alpha^-$)

$$\zeta_3 \in H_0^2(\omega) \text{ et } G_3 \in H^{-2}(\omega) \text{ satisfont } :\ \zeta_3 \le u_3^0,$$

$$k\ \Delta^2\zeta_3 - h_3^0 - h_3^1 = G_3 \le 0 \text{ dans } H^{-2}(\omega),$$

$$\langle G_3,\ u_3^0 - \zeta_3\rangle = 0.$$

Il conviendra ensuite de revenir dans le cadre du problème de départ en faisant le changement d'échelle inverse.

Remarquons que *le terme de frottement a disparu du problème limite*. Ceci provient du fait que, dans la théorie de Kirchhoff-Love, la force de frottement (en ε^3) est d'un ordre moins élevé que la pression de contact (en ε^4). Or dans la loi de Coulomb la pression de contact contrôle la force de frottement. Donc, du moins formellement quand ε tend vers zéro, la force de frottement doit s'annuler. C'est ce que montre l'analyse (théorème 2).

Ce type de modèle de structure mince avec condition unilatérale est connu depuis longtemps dans la littérature. Sans être exhaustif on peut citer les trauvaux de Do (1971—1978), Grimaldi et Ascione (en 1984), Ascione et Luigi (en 1981), Scarpini (en 1986), Zhang et Chen (2001), Lovisek (1998), Goeleven (depuis 1997), Hlavacek Lovisek (1997), Hlavacek (1994), Degiovanni (1986), Karasev (1981), Dia et Hachmi (1989), Naumann (1977), Ohtake, Oden et Kikuchi (1980), etc.

5. Aspects numériques, modèle de Mindlin-Reissner

Verrouillage numérique dans le cas d'une poutre. Dans cette section on fait un calcul numérique pour tester le passage du bidimensionnel au monodimensionnel. On pose donc $\omega =]-1,1[$ et on choisit par exemple $\lambda = 2$ et $G = 1$. L'ouvert Ω^ε est bidimensionnel. D'après la théorie de Kirchhof-Love de la section 2 le modèle limite est monodimensionnel. Imposons les forces :

$$f_1 = g_2^\pm = g_1^+ = 0,\quad g_1^-(x_1) = 48\,\mathrm{sgn}(x_1)\ \text{ et }\ \langle f_2,v_2\rangle = 24\ \int_{-1}^{+1} v_2(0,y)\ dy$$

Les composantes ζ_i de la solution de Kirchhoff-Love du problème limite s'écrivent :

$$\zeta_1(x) = 4\ x\ (1 - |x|)\ \text{ et }\ \zeta_2(x) = (1 - |x|)^2\,(1 + 2\,|x|)\,.$$

La *méthode des éléments finis* va nous permettre de calculer une approximation de la solution du problème bidimensionnel. On va utiliser la méthode conforme de classe C^0 avec des fonctions d'interpolation polynomiales P_k pour $k = 1,2,3,4$. Le logiciel utilisé est **FEMLAB** à partir d'une triangulation $\mathcal{T}_h$ de l'ouvert Ω^ε où h désigne le maximum des diamètres des triangles (ce paramètre est destiné à tendre vers zéro). On définit donc l'espace $V_h(\Omega^\varepsilon) = V(\Omega^\varepsilon) \cap \left\{v_h \in C^0(\ \overline{\Omega}\ )\ /\ v_{h|T} \in P_k\,,\ \forall T \in \mathcal{T}_h\right\}$.

L'espace d'approximation des fonctions de l'espace $\overrightarrow{V}(\Omega^\varepsilon)$ est : $\overrightarrow{V_h}(\Omega^\varepsilon) = (\ V_h(\Omega^\varepsilon)\ )^2$ et le problème approché s'écrit :

$$\text{trouver} \quad u_h^\varepsilon \in \overrightarrow{V_h}(\Omega^\varepsilon) \quad \text{tel que} \ :$$
$$a^\varepsilon(u_h^\varepsilon, v_h) = L^\varepsilon(v_h),\, \forall v \in \overrightarrow{V_h}(\Omega^\varepsilon).$$

Donnons les résultats numériques sur l'*ouvert fixe* Ω en faissant au préalable une mise à l'échelle comme à la section 2. Dans le tableau qui suit on donne, en fonction du nombre de triangles N_h de $\mathcal{T}_h$ et pour différentes valeurs de ε, un tableau de valeurs approchées de l'erreur $E_{h,\varepsilon}(k) = \|u_h(\varepsilon) - u(0)\|_{1,\Omega} / \|u(0)\|_{1,\Omega}$ pour $k = 1,2,3,4$, mis à part quelques cas où le calcul n'aboutit pas faute d'une place mémoire suffisante (en effet ce modèle comporte un grand nombre de degrés de liberté) :

N_h	$\varepsilon = 0.1$				$\varepsilon = 0.01$				$\varepsilon = 0.001$			
48	1	0.5	0.3	0.3	1	1	0.04	0.04	1	1	0.05	0.04
192	0.8	0.3	0.3	0.3	1	1	0.03	0.03	1	1	0.03	0.2
768	0.6	0.5	0.3	–	1	1	0.03	–	1	1	0.02	–
2688	0.3	0.3	0.3	–	1	0.8	0.02	–	1	1	0.01	–

On voit que l'erreur $E_{h,\varepsilon}(k)$ peine à tendre vers zéro quand le nombre de triangle N_h augmente. Pour $k \in \{1, 2\}$ elle reste même quasiment constante ! Nous sommes en présence du phénomène de verrouillage révélé dans le cas des plaques par Vidrascu [16] en 1984 et analysé dans Paumier [8] en 1992 de la façon suivante : si on procède à l'analyse asymptotique du modèle discret (comme à la section 2 mais en dimension finie) on trouve que $\lim_{\varepsilon\to 0} u_h(\varepsilon)$ existe. C'est $u_h(0)$ la solution du *problème limite discret* qui doit appartenir à l'*espace de Kirchhoff-Love discret* $\overrightarrow{V_{KL}}(\Omega) \cap \overrightarrow{V_h}(\Omega)$. Ceci implique que : $\lim_{\varepsilon\to 0} E_{h,\varepsilon}(k) = \|u_h(0) - u(0)\|_{1.\Omega} / \|u(0)\|_{1,\Omega}$. Pour qu'effectivement la limite de $\|u_h(0) - u(0)\|_{1,\Omega}$ soit nulle quand $h \to 0$ il faut (et il suffit) que l'espace $\overrightarrow{V_{KL}}(\Omega) \cap \overrightarrow{V_h}(\Omega)$ soit un espace d'approximation de l'espace de Kirchhoff-Love $\overrightarrow{V_{KL}}(\Omega)$. Comme la troisième composante des fonctions de cette espace appartient à $H^2(\omega)$, l'espace $\overrightarrow{V_h}(\Omega)$ doit permettre l'approximation des fonctions de $H^2(\omega)$. C'est en général impossible pour $k = 1,2,3$. Théoriquement $k \geq 5$ convient car il permet le raccord C^1 nécessaire à l'approximation conforme des fonctions de $H^2(\omega)$.

Les résultats numériques sur l'*ouvert variable* Ω^ε font apparaître le même phénomène de verrouillage. S'il est moins prononcé c'est grâce à la géométrie de cet ouvert : il y a beaucoup plus de triangles répartis sur la longueur de la poutre (de plus en plus quand $\varepsilon \to 0$) ce qui “facilite” l'approximation des fonctions de $H^2(\omega)$.

triangles	$\varepsilon = 0.01$				$\varepsilon = 0.001$			
280	0.5	0.2	0.02	0.02	—			
560	0.5	0.02	0.02	0.02	—			
1020	0.2	0.02	0.02	0.02	—			
2856	—				0.5	0.007	0.006	—

En conclusion les calculs numériques réalisés avec ce modèle comportent un grand nombre de degrés de liberté et sont de mauvaise qualié pour ε petit. On préférera bien évidemment faire les calculs numériques en utilisant le modèle en dimension réduite (monodimensionnel ici) qui a beaucoup moins de degrés de liberté et qui est stable et convergent sur le plan numérique.

Autres phénomènes de verrouillage. Le phénomène de verrouillage numérique est bien connu dans les méthodes numériques appliquées au modèle de Midlin Reissner. Citons par exemple le travail fondateur de Arnold en 1981, les travaux de Brezzi et Fortin (1984), de Arnold et Falk (1989), de Brezzi, Fortin et Stenberg (1991), Schwab et Suri (1994), Chenais et Paumier (1994), de Suri, Babuska et Schwab (1995) et de

Chapelle (1996) (sur les coques), etc. Les méthodes mixtes s'avèrent une alternative efficace au phénomène de verrouillage, voir par exemple les travaux de Capatina-Papaghuic (1997).

Justification du modèle de Mindlin Reissner. Dans leurs travaux Alessandrini en 1991, et Falk en 1993 apportent une réponse au problème de la justification de ce modèle. Donnons une autre façon de procéder qui part de l'explication du verrouillage décrite ci-dessus. Pour des entiers k et l donnés, posons $\overrightarrow{V}_{k,l}(\Omega) = P_k(\omega) \times P_k(\omega) \times P_l(\omega)$ avec :

$$P_k(\omega) = \left\{ w \in V(\Omega) \ / \ w(x) = \sum_{j=0}^{k} x_3^j \ w_j(x_1,x_2), \ w_1, \ldots, w_k \in H_0^1(\omega) \right\}.$$

Appliquons la *méthode de Galerkin* au problème de plaque mis à l'échelle :

$$\text{trouver } u_{k,l}(\varepsilon) \in \overrightarrow{V}_{k,l}(\Omega) \text{ tel que :}$$
$$A^\varepsilon(u_{k,l}(\varepsilon),v) = L(v), \ \ \forall v \in \overrightarrow{V}_{k,l}(\Omega).$$

On démontre dans Paumier-Raoult [11] que l'on a *consistance asymptotique* de cette projection (à savoir $\lim_{\varepsilon\to 0} u_{k,l}(\varepsilon) = u(0)$ fortement dans H^1) *si et seulement si* : $k \geq 1$ et $l \geq 2$. De plus le choix $k = 1$, $l = 2$ permet, après quelques manipulations et une approximation, de retrouver effectivement le modèle de Mindlin Reissner.

6. Utilité des revêtements élastiques

On décrit, ici dans le cas statique, l'idée principale d'un travail en préparation, voir Paumier-Renard [14], qui a déjà donné des résultats en dynamique ([15], [12] et [13]).

Faisons un retour sur le problème de Signorini avec frottement décrit section 3 :

$$\text{trouver} : u \in K_{ad},\ G_T \in (H^{-1/2}(\Gamma_c))^2,\ G_N \in H^{-1/2}(\Gamma_c) \text{ tels que :}$$
$$a(u,v) = (f,v) + \langle\ G_T,v_T\ \rangle + \langle\ G_N,v_N\ \rangle, \ \ \forall v \in V_0,\ \langle\ G_N,v_N - u_N\ \rangle \ \ \geq \ \ 0, \ \ \forall v \in K_{ad},$$
$$\langle\ G_T,v_T - u_T\ \rangle + \langle\ \mu\ |G_N|,||v_T|| - ||u_T||\ \rangle \ \ \geq \ \ 0, \ \ \forall v \in V_{ad}.$$

Pour simplifier, avec $\omega \subset \mathbb{R}^2$, choisissons un domaine cylindrique : $\Omega = \omega\times]0,L[$, $\Gamma_c = \omega \times \{0\}$, $\Gamma_u = \omega \times \{L\}$ et $\Gamma_n = \partial\omega\times]0,L[$. L'idée de base est d'approcher les fonctions u et v au voisinage du bord de frottement sur une couche mince Ω^ε d'épaisseur $\varepsilon > 0$ dont l'une des faces est Γ_c en utilisant l'espace $\overrightarrow{V}_{k,l}(\Omega^\varepsilon)$ comme dans la section précédente (modèle de Mindlin-Reissner) par la méthode de Galerkin. Le choix le plus simple est $k = l = 0$ dans lequel les fonctions u et v sont indépendants de x_3. En intégrant $a(u,v)$ directement sur l'épaisseur de Ω^ε on fait apparaître la moyenne $\hat{a}(\underline{u},\underline{v})$ dans laquelle $\underline{u}$ et $\underline{v}$ désignent les traces (de classe H^1) des fonctions u et v sur Γ_c. En notant $\underline{K}_{ad}$ (resp. $\underline{V}_{ad}$ et $\underline{V}_0$) le sous-ensemble des fonctions de K_{ad} (resp. V_{ad} et V_0) qui ont une trace de classe H^1 sur Γ_c on obtient le problème :

$$\text{trouver} : u \in \underline{K}_{ad},\ G_T \in (H^1(\Gamma_c)^2)',\ G_N \in (H^1(\Gamma_c))' \text{ tels que :}$$
$$a(u,v) + \varepsilon\ \hat{a}(\underline{u},\underline{v}) = (f,v) + \langle\ G_T,v_T\ \rangle + \langle\ G_N,v_N\ \rangle, \ \ \forall v \in \underline{V}_0,$$
$$\langle\ G_N,v_N - u_N\ \rangle \ \ \geq \ \ 0, \ \ \forall v \in \underline{K}_{ad}$$
$$\langle\ G_T,v_T - u_T\ \rangle + \langle\ \mu\ |G_N|,||v_T|| - ||u_T||\ \rangle \ \ \geq \ \ 0, \ \ \forall v \in \underline{V}_{ad}$$

La seule différence par rapport au problème de Signorini avec frottement est la présence du terme $\hat{a}(\underline{u},\underline{v})$ se *découplant* en $\hat{a}_N(u_N,v_N) + \hat{a}_T(u_T,v_T)$. Cela permet de *résoudre complètement le problème par une technique de point fixe* (avec le théorème de Schaeffer) sur l'application : $H^1(\Gamma_c)^3 \ni \underline{u} \mapsto \Phi(\underline{u}) \in H^1(\Gamma_c)^3$, où la fonction $\varphi := \Phi(\underline{u})$ est définie ci-dessous par ses deux composantes φ_N et φ_T :

(1) *résoudre* : $u \in V_{ad}$ tel que $u = \underline{u}$ sur Γ_c et $a(u,v) = (f,v), \ \ \forall v \in V_{00}$,

(2) *définir* F_T et F_N par $\langle\, F_T,v_T \,\rangle + \langle\, F_N,v_N \,\rangle = a(u,v) - (f,v),\ \ \forall v \in V_0$,

(3) *résoudre*: $\varphi_N \in H^1(\Gamma_c)$ tel que $\varphi_N \leq 0$ et $G_N \in (H^1(\Gamma_c))'$ vérifant :

$$\varepsilon\ \hat{a}_N(\varphi_N,\psi_N) + \varepsilon \int_{\Gamma_c} (\varphi_N - \underline{u}_N)\, \psi_N\, dx' = \langle\, G_N - F_N,\psi_N \,\rangle,\ \ \forall \psi_N \in H^1(\Gamma_c),$$
$$\langle\, G_N,\psi_N - \varphi_N \,\rangle \ \ \geq \ \ 0,\ \ \forall \psi_N \in H^1(\Gamma_c) \text{ tel que } \psi_N \leq 0,$$

(4) *résoudre*: $\varphi_T \in H^1(\Gamma_c)^2$ et $G_T \in (H^1(\Gamma_c)^2)'$ vérifant :

$$\varepsilon\ \hat{a}_T(\varphi_T,\psi_T) + \varepsilon \int_{\Gamma_c} (\varphi_T - \underline{u}_T) \cdot \psi_T\, dx' = \langle\, G_T - F_T,\psi_T \,\rangle,\ \ \forall \psi_T \in H^1(\Gamma_c)^2,$$
$$\langle\, G_T,\psi_T - \varphi_T \,\rangle + \langle\, \mu\ |G_N|,||\psi_T|| - ||\varphi_T||\,\rangle \ \ \geq \ \ 0,\ \ \forall \psi_T \in H^1(\Gamma_c)^2$$

avec $V_{00} = \{v \in V_{ad}\ /\ v = 0 \text{ sur } \Gamma_c \cup \Gamma_0\}$. Notons que (1) est un problème classique d'élastostatique, (2) est la formule de Green, (3) est un problème scalaire de contact unilatéral bien posé définissant la mesure $G_N \ \leq\ 0$ et (4) est un problème de frottement bien posé utilisant la mesure $|G_N| = -G_N$ comme seuil de frottement.

7. Conclusion et perspectives

Il ressort de cet exposé que la justification du modèle de contact unilatéral (problème de Signorini) pour une plaque dans la théorie de Kirchhoff-Love peut-être réalisée à partir du problème tridimensionnel. Cette démarche, du moins à la connaissance de l'auteur, n'était pas encore connue à ce jour et il reste également à regarder la modélisation du contact unilatéral pour d'autres structures (coques, poutres, ...). Notons que l'hypothèse "forte" $0 \leq u_2^0 \in H_0^2(\omega)$ sur la fonction d'interstice devrait pouvoir être affaiblie. Nous avons vu que la disparition du terme de frottement dans le modèle limite de Kirchhoff-Love est irrémédiable. Une question naturelle est donc : comment (ré)introduire ce terme dans le modèle bidimesionnel de contact d'une plaque mince ? De même, on peut se demander comment modéliser le contact unilatéral pour les modèles de type " projection polynomiale " (tel que celui de Mindlin-Reissner) ?

Références

[1] P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity, Volume II: theory of plates*, North-Holland, 1997.

[2] G. Fichera, Problemi elastostatici con vincoli unilaterali : il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno, *Mem. Accad. Naz. Lincei Ser.*, **VIII**(7), 91-140 (1964).

[3] G. Duvaut, J.L. Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, 1972

[4] J. Jarušek, Contact Problem with Bounded Friction : Coercive Case, *Czechoslovak Math. J.*, **33**(108), 237-261 (1983).

[5] Y. Kato, Signorini problem with friction in linear elasticity, *Japan J. Appl. Math.*, **4**, 237-268 (1987).

[6] C. Eck, J. Jarušek, Existence results for the static contact problem with Coulomb friction, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **8**, 445-468 (1998).

[7] J. Néčas, J. Jarušek, J. Haslinger, On the solution of the variational inequality to the Signorini problem with small friction, *Boll. U.M.I.* **5**(17B), 796-811 (1980).

[8] J.-C. Paumier, *On the Locking Phenomenon for a Linearly Elastic Clamped Plate*, Rapport Technique LMC-IMAG, RT 76, janvier 1992.

[9] J.-C. Paumier, *Modélisation asymptotique d'un problème de plaque mince en contact unilatéral avec frottement sur un obstacle rigide*, Rapport Technique LMC-IMAG, juillet 2002 [http://www-lmc.imag.fr/˜paumier/signoplaque.ps].

[10] J.-C. Paumier : *Le problème de Signorini dans la théorie des plaques minces de Kirchhoff-Love*, note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série 1, t. 335, 2002, p. 567-570

[11] J.-C. Paumier, A. Raoult, Asymptotic consistency of the polynomial approximation in the linearized plate theory. Application to the Reissner-Mindlin model, *Élasticité, Viscoélasticité et Contrôle Optimal*, Lyon, décembre 1995, *ESAIM: Proceedings*, **2**, 203-213 (1998).

[12] J.-C. Paumier, Y. Renard, Existence et unicité pour le frottement élastodynamique avec perturbation par "inertie de surface", note aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, Série 1, **331**, 175-178 (2000).

[13] J.-C. Paumier, Y. Renard, Surface perturbation of an elastodynamic contact problem with friction, *European Journal of Applied Mathematics*, **14**, 465-483 (2003).

[14] J.-C. Paumier, Y. Renard, Surface perturbation of an elastostatic contact problem with friction, en préparation.

[15] Y. Renard, Singular perturbation approach to an elastic dry friction problem with a non-monotone coefficient, *Quaterly of Applied Mathematics*, **LVIII**(2), 303-324, (june 2000).

[16] M. Vidrascu, *Comparaison numérique entre les solutions bidimensionnelle et tridimensionnelle d'un problème de plaque encastrée*, Rapport de Recherche I.N.R.I.A. numéro 309, 1984.

(Jean-Claude Paumier) Université Joseph Fourier
Laboratoire de Modélisation et Calcul
BP 53, 38041 Grenoble cedex 9, France