

Utilisation des bases d'ondelettes pour la réduction du coût de l'assimilation de données dans un modèle de circulation océanique

IOANA PAUN, JACQUES BLUM ET ISABELLE CHARPENTIER

RÉSUMÉ. La dynamique de l'océan est très turbulente et complexe à modéliser. Les modèles d'océan actuellement utilisés sont insuffisants pour effectuer une bonne prévision de la circulation océanique, mais des données d'observation de l'océan peuvent être "assimilées" au modèle pour améliorer les prévisions.

La technique d'assimilation variationnelle de données consiste à minimiser l'écart entre la solution calculée par le modèle et les observations, en intervenant sur les valeurs d'une variable de contrôle. Cette variable est une entrée du modèle : condition initiale, paramètres physiques, etc. Les valeurs optimales des paramètres sont déterminées à l'aide d'un algorithme de minimisation. Depuis plusieurs années, les méthodes d'assimilation variationnelle de données, basées sur les outils du contrôle optimal, ont prouvé leur efficacité. Malheureusement ces techniques sont très coûteuses, étant donné qu'on travaille avec des problèmes de grande dimension. Comme la vitesse de convergence de l'algorithme dépend de la dimension de l'espace du contrôle, il est souhaitable de réduire cette dimension.

On présente ici la possibilité d'utiliser des bases réduites d'ondelettes pour décrire l'espace du contrôle. On tire profit du caractère multirésolution d'une décomposition en bases d'ondelettes, afin de minimiser par rapport aux coefficients d'ondelettes qui correspondent à des résolutions plus grossières.

On introduit l'algorithme d'assimilation en ondelettes, appliqué à un problème de reconstruction de l'état initial du modèle quasi-géostrophique d'océan. On montre la validité de cette méthode par quelques résultats sur la qualité de la reconstruction.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35B37, 86A05, 42C40, 65T60.

Mots clef et phrases. Ondelettes, assimilation variationnelle de données, contrôle optimal, modèles d'océan.

1. Introduction

La grande complexité des phénomènes océaniques et leur caractère turbulent font que les équations de l'hydrodynamique résolues sur un mode direct ne décrivent pas l'océan de façon très réaliste. Comme on dispose des données d'observation de l'océan on voudrait bien intégrer ces observations dans les modèles d'océan afin d'obtenir des simulations numériques plus réalistes.

Un modèle de circulation générale de l'océan est très complexe à mettre en oeuvre. Le modèle qu'on utilise est le modèle quasi-géostrophique (**QG**). Le formalisme quasi-géostrophique néglige les aspects thermodynamiques, pour ne conserver que les équations mécaniques. De plus, ce modèle s'intéresse à la dynamique de l'océan aux latitudes moyennes, les équations sont développées autour d'une latitude θ_0 . Le modèle suppose que l'océan est stratifié en N couches. Chaque couche est de densité

Reçu: le 11 décembre 2002.

constante ρ_k et d'épaisseur au repos H_k . Le développement à l'ordre 1 en R_0 (le nombre de Rossby) de l'équation de Navier-Stokes dans un milieu tournant conduit au système de N équations couplées d'inconnues Ψ_k , Ψ_k étant la fonction de courant dans la couche k :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}[\Delta + W]\Psi = G(\Psi) + F, & \text{sur } \Omega \times [0, T], \\ \Psi_k = c_k(t) \text{ sur } \partial\Omega \text{ telles que } \begin{cases} [B^{-1}\Psi]_1 = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \int_{\Omega} [B^{-1}\Psi]_k = 0 \text{ pour } k \geq 2 \end{cases} \\ \Psi(t=0) = U, \end{cases} \quad (1)$$

où Ψ est le vecteur des Ψ_k ; W est une matrice tridiagonale ($N \times N$) de couplage entre les couches, qu'on peut diagonaliser sous la forme : $W = -B \cdot D \cdot B^{-1}$ (D est diagonale à termes positifs ou nuls); G est un opérateur aux dérivées partielles non-linéaire et F est un terme de forçage (dans notre cas on a seulement le forçage sur la première couche qui est dû au vent) Voir [4], [6] pour plus de détails.

Les conditions aux limites sont une condition de glissement et une condition d'imperméabilité, assurant un principe de conservation de la masse.

On dispose d'observations Ψ_1^{obs} de la fonction courant en surface dans le domaine Ω pendant l'intervalle de temps $[0, T]$. Elles sont considérées comme continues en temps. En fait on dispose des observations altimétriques indiquant la hauteur h de la surface de l'océan, qui dans l'approximation géostrophique est proportionnelle à la fonction de courant dans la couche de surface.

Nous définissons une fonctionnelle $\mathcal{J} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\mathcal{J}(U) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |\Psi_1(U; x, y, t) - \Psi_1^{obs}(x, y, t)|^2 dx dy dt, \quad (2)$$

qui mesure sur la couche de surface l'écart entre les observations et la solution du modèle obtenue par la résolution du système d'évolution (1) avec la valeur U de la variable de contrôle. La fonction U représente la fonction courant sur les N couches à l'instant initial. En effet le modèle océanique étant turbulent, il est très sensible à la condition initiale, dont il convient de déterminer les valeurs avec une grande précision.

Problème : Trouver U^{opt} qui réalise le minimum de \mathcal{J} .

Les algorithmes de minimisation de la fonctionnelle utilisent le vecteur gradient de cette fonctionnelle, calculé par rapport aux paramètres du modèle sur lesquels on a décidé d'agir. Ce sont les paramètres de contrôle. La plupart de ces algorithmes de minimisation reposent sur une méthode de descente : partant d'un point quelconque, l'algorithme construit une suite de points qui convergent vers le point optimal en faisant diminuer le plus rapidement possible la fonctionnelle calculée en ces points. La direction reliant deux points successifs est appelée "la direction de descente". Pour un point donné, elle est calculée à partir des valeurs du gradient et de la fonctionnelle évaluées aux points précédents.

L'efficacité d'un algorithme de minimisation dépend de la qualité du calcul de la direction de descente. Puisque les algorithmes de descente utilisent à chaque itération le gradient de la fonctionnelle par rapport aux paramètres de contrôle, il est important de bien calculer ce gradient.

Une méthode élégante pour calculer ce gradient est la **méthode adjointe**.

Si on considère que le modèle quasi-géostrophique est défini par l'opérateur $\mathcal{G} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ qui à partir de la condition initiale U appartenant à l'espace admissible \mathcal{U} , calcule

$\Psi \in \mathcal{V}$, alors on a $\mathcal{J}(U) = J(\Psi) = (J \circ \mathcal{G})(U)$. Une simple formule de dérivation des fonctions composées exprime :

$$(D_u(J \circ \mathcal{G}), \bar{u})_{\mathcal{U}', \mathcal{U}} = \langle D_{\mathcal{G}(u)} J, D_u \mathcal{G}(\bar{u}) \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} = (D_u \mathcal{G}^*(D_{\mathcal{G}(u)} J), \bar{u})_{\mathcal{U}', \mathcal{U}} \quad \forall \bar{u} \in \mathcal{U}$$

où $D_u \mathcal{G}^* : \mathcal{V}' \rightarrow \mathcal{U}'$ est l'adjoint de l'opérateur $D_u \mathcal{G}$ et les produits scalaires représentent les dualités $\mathcal{U}' \mathcal{U}$ (respectivement $\mathcal{V}' \mathcal{V}$). On obtient ainsi $D_u \mathcal{J} = D_u \mathcal{G}^*(D_{\Psi} J)$.

L'opérateur $D_u \mathcal{G}^*$ définit l'équation adjointe qui dans notre cas s'exprime sous la forme suivante :

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t} [\Delta + W^t] P - \left[\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \Psi}(\Psi_U) \right]^* P = D_{\Psi} \mathcal{J}, & \text{dans } \Omega \times]0, T], \\ P_k = d_k(t) \text{ sur } \partial\Omega & \text{telles que } \begin{cases} [B^t P]_1 = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ \int_{\Omega} [B^t P]_k = 0 \text{ pour } k \geq 2, \end{cases} \\ P(t = T) = 0, & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (3)$$

L'équation adjointe nous permet d'exprimer la dérivée de la fonctionnelle coût par la formule suivante :

$$(D_U \mathcal{J}, h)_{\mathcal{U}', \mathcal{U}} = \int_{\Omega} [\Delta + W^t] P(t = 0) \cdot h \, dx dy.$$

Pour le modèle direct, on utilise une discrétisation par différences finies avec un schéma saute-mouton en temps. L'adjoint sera l'adjoint du problème discrétisé.

Dans nos tests nous avons choisi un algorithme de minimisation de type quasi-Newton à mémoire limitée (QNML), nommé "BFGS" (resp. "BFGS" inverse) due à R. H. Byrd, P. Lu, J. Nocedal et C. Zhu [2]. Celui-ci fournit une façon d'évaluer récursivement une approximation du Hessien (resp. de l'inverse du Hessien) au point U_k , en utilisant uniquement les vecteurs gradients $G_k = G(U_k)$ et les points U_k en lesquels les G_k ont été évalués. Il s'agit donc d'un algorithme itératif qui à partir de U_k , $\mathcal{J}(U_k)$ et $D_{U_k} \mathcal{J}$ calcule un nouveau point U_{k+1} .

Le coût de calcul est essentiellement absorbé par la résolution de N (nombre de couches) équations directes pour le calcul de $\mathcal{J}(U_k)$ et le même nombre d'équations adjointes pour le calcul de $D_{U_k} \mathcal{J}$ et cela à chaque itération.

Le nombre de paramètres dans l'espace du contrôle est déterminant pour le coût de calcul. On fait la remarque que, pour obtenir des convergences de qualité comparable, le nombre d'itérations dans l'algorithme de descente est "proportionnel" au nombre des paramètres de contrôle. Il est donc naturel qu'en diminuant la dimension de l'espace de contrôle on diminue aussi le coût de calcul.

Notre démarche consiste à exprimer la condition initiale dans une base réduite, afin de minimiser par rapport aux coefficients dans cette base.

Si on exprime la condition initiale U dans une base finie e_1, e_2, \dots, e_n en utilisant comme vecteur de contrôle les coefficients (x_1, x_2, \dots, x_n) de U dans cette base, alors la dérivée de la fonction coût s'exprime comme suit :

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x_i} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(\sum_{k=1}^n (x_k + \delta_{k,i} \alpha) e_k) - \mathcal{J}(\sum_{k=1}^n x_k e_k)}{\alpha} = (D_U \mathcal{J}, e_i)_{\mathcal{U}', \mathcal{U}}$$

Si on munit \mathcal{U} du produit scalaire L^2 , en considérant e_1, e_2, \dots, e_n , une base orthogonale par rapport à ce produit scalaire, alors $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x_i}$ est donné par le $i^{\text{ème}}$ -coefficient de $(\Delta + W^t)P(0)$ dans cette base.

2. Analyse multirésolution

C'est en 1989 que Mallat apporte à la théorie des ondelettes (s'appuyant sur les travaux de Meyer) son modèle d'analyse multirésolution [5]. Il s'agit de représenter une fonction sous la forme d'une approximation grossière et d'une suite de "détails" d'ampleur décroissante. Mallat et Meyer ont proposé un algorithme de construction de bases d'ondelettes qui repose sur la notion "d'analyse multirésolution".

Définition : Une **analyse multirésolution** est une suite $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de sous espaces vectoriels fermés de $L^2(\mathbb{R})$ tels que :

$$(i) \dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset V_n \subset \dots,$$

$$(ii) \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}, \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}),$$

$$(iii) f \in V_j \Leftrightarrow f(2 \cdot) \in V_{j+1},$$

(iv) il existe φ , telle que $\{\varphi(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ soit une base orthonormée de V_0 .

La fonction φ s'appelle **fonction échelle**, elle est choisie telle que : $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = 1$.

Une conséquence directe de cette définition est que $\{\varphi_{j,k} = 2^{j/2} \varphi(2^j \cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ constitue une base orthonormée de V_j pour tout $j \in \mathbb{Z}$.

Soit $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une analyse multirésolution. Par définition les sous-espaces V_j sont fermés, donc on peut considérer le complément orthogonal de V_j dans V_{j+1} , qu'on notera W_j . En conséquence $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ et on a : $\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j = L^2(\mathbb{R})$.

Meyer montre l'existence d'une fonction ψ dans W_0 telle que ses translatées entières forment une base orthonormée de W_0 , cette fonction est appelée le **fonction ondelette**. On obtient une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$, en considérant la famille $\{\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}}$.

L'interprétation de l'analyse multirésolution est la suivante : *Pour toute fonction f de $L^2(\mathbb{R})$, les projections de f sur les espaces V_j représentent des approximations de f à des résolutions de plus en plus fines (lorsque j augmente). L'espace V_j correspond à l'échelle 2^{-j} . La projection de f sur W_j contient les détails qui apparaissent à la résolution $j + 1$ et n'existaient pas à la résolution j .*

Algorithmes de décomposition-reconstruction :

Si on se situe à l'échelle fine 2^{-j_f} , comme $V_{j_f} = V_{j_f-1} \oplus W_{j_f-1}$, on peut écrire une fonction f de V_{j_f} sous la forme :

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j_f,k} \varphi_{j_f,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{j_f-1,l} \varphi_{j_f-1,l} + \sum_{l \in \mathbb{Z}} d_{j_f-1,l} \psi_{j_f-1,l} = \dots \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j_g,k} \varphi_{j_g,k} + \sum_{j=j_g}^{j_f-1} \sum_{l \in \mathbb{Z}} d_{j,l} \psi_{j,l} \end{aligned}$$

où $c_{j,k} = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle_{L^2}$ et $d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle_{L^2}$.

Et on dispose des formules de changement d'échelle suivantes :

$$\varphi_{j-1,l} = \sum_k h_{k-2l} \varphi_{j,k}, \quad \psi_{j-1,l} = \sum_k g_{k-2l} \varphi_{j,k}.$$

où $(h_k)_k, (g_k)_k \in l_2$ sont les filtres qui dependent seulement de la nature de la fonction échelle utilisée pour définir l'analyse multirésolution.

En utilisant ces formules, on obtient la décomposition :

$$\begin{cases} c_{j-1,l} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2l} c_{j,k}, \\ d_{j-1,l} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{k-2l} c_{j,k}. \end{cases} \quad (4)$$

De la même manière, la connaissance des coefficients $c_{j-1,k}$ et des détails $d_{j-1,k}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, permet de reconstruire les coefficients $(c_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ à l'échelle 2^{-j} par la formule suivante :

$$c_{j,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{k-2l} c_{j-1,l} + \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_{k-2l} d_{j-1,l}. \quad (5)$$

Coïffettes :

Les coïffettes sont des ondelettes à support compact orthonormées.

Le support compact conduit à des filtres de longueur finie, donc des sommes finies dans les formules de décomposition-reconstruction.

L'orthonormalité facilite beaucoup l'algorithme de minimisation où l'on doit calculer des produits scalaires de fonctions de base.

Une autre propriété, qu'on rencontre pour la plupart des ondelettes, est le fait qu'elles possèdent des moment nuls. C'est à dire : $\int_{\mathbb{R}} x^p \psi(x) dx = 0, \forall 0 \leq p < N$. Cette propriété implique l'appartenance des polynômes de degré inférieur à N à l'espace grossier V_0 . On déduit que les détails sont négligeables dans le voisinage des points où la fonctions est régulière.

La propriété qui différencie les coïffettes est que la fonction échelle possède elle aussi des moments nuls : $\int_{\mathbb{R}} x^n \varphi(x) = 0, \forall n = 1, \dots, N-1$. Cette propriété indique que la

formule de quadrature à un point : $c_{j,k} \simeq 2^{-\frac{j}{2}} f(\frac{k}{2^j})$ est d'ordre $N-1$.

Pour représenter des fonction définies sur l'intervalle $[0,1]$, on se place dans un cadre périodique car nos conditions aux limites entrent tout à fait dans ce cadre. On périodise les bases d'ondelettes introduites auparavant et on obtient des coefficients périodiques dans le sens suivant :

$$c_{j,k} = c_{j,k+2^j} \quad \text{et} \quad d_{j,k} = d_{j,k+2^j}.$$

On construit des bases d'ondelettes multidimensionnelles par produit tensoriel d'ondelettes 1D. Ainsi l'analyse multirésolution des fonctions 2D bi-périodiques est définie à l'aide des espaces suivants :

$$\tilde{\mathbf{V}}_j = \tilde{V}_j \otimes \tilde{V}_j = \mathcal{Vect}(\tilde{\Phi}_{\mathbf{j}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}(x, y) = \tilde{\varphi}_{j, k_1}(x) \tilde{\varphi}_{j, k_2}(y), k_1, k_2 = 0, \dots, 2^j - 1)$$

où $\tilde{\varphi}_{j,k}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_{j,k}(x+n)$ est fonction 1-périodique

En 2D, on a trois espaces de détails $\tilde{\mathbf{W}}_j^h$, $\tilde{\mathbf{W}}_j^v$ et $\tilde{\mathbf{W}}_j^d$ qui correspondent respectivement aux détails dans la direction horizontale, verticale et diagonale. Ces espaces

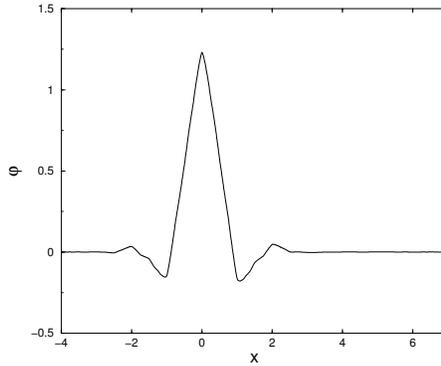
sont définis par les formules suivantes :

$$\tilde{\mathbf{W}}_j^h = \tilde{V}_j \otimes \tilde{W}_j = \mathcal{Vect}(\tilde{\Psi}_{j,k_1,k_2}^h(x,y) = \tilde{\varphi}_{j,k_1}(x)\tilde{\psi}_{j,k_2}(y), k_1,k_2 = 0,\dots,2^j - 1),$$

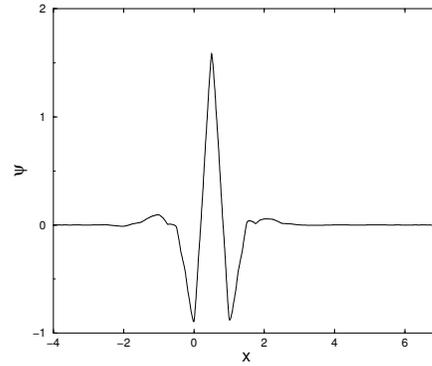
$$\tilde{\mathbf{W}}_j^v = \tilde{W}_j \otimes \tilde{V}_j = \mathcal{Vect}(\tilde{\Psi}_{j,k_1,k_2}^v(x,y) = \tilde{\psi}_{j,k_1}(x)\tilde{\varphi}_{j,k_2}(y), k_1,k_2 = 0,\dots,2^j - 1),$$

$$\tilde{\mathbf{W}}_j^d = \tilde{W}_j \otimes \tilde{W}_j = \mathcal{Vect}(\tilde{\Psi}_{j,k_1,k_2}^d(x,y) = \tilde{\psi}_{j,k_1}(x)\tilde{\psi}_{j,k_2}(y), k_1,k_2 = 0,\dots,2^j - 1).$$

On représentera le vecteur de contrôle dans une base 2D périodiques de coiffettes. On utilise la coiffette qui possède $N = 4$ moments nuls. Dans la figure ci-dessous, on a tracé cette coiffette, pour avoir une idée de la forme des fonctions de base qu'on utilisera dans la suite.



(a) La fonction échelle φ_4



(b) La coiffette ψ_4

3. L'algorithme

On présente l'algorithme de minimisation qui utilise les coefficients en échelle : $\{c_{j_g,k_1,k_2}\}_{k_1,k_2=0,\dots,2^{j_g}}$ de la condition initiale comme vecteur de contrôle. Ici j_g est l'échelle grossière.

- (1) Soit X^0 le vecteur de contrôle initialement choisi ("relativement proche" de la solution écrite dans la base d'ondelettes).
- (2) On suppose connaître les coefficients X^n calculés par la $n^{\text{ième}}$ itération de l'algorithme pour calculer la valeur du vecteur de contrôle X^{n+1}
 - (a) Reconstruction en ondelettes de la condition initiale ψ_0^n à partir de X^n
 - (b) Résolution du modèle QG et calcul de la valeur J^n de la fonction coût
 - (c) Résolution du modèle QG adjoint pour obtenir la valeur G^n du gradient de la fonction coût par rapport aux coefficients de la condition initiale ψ_0^n
 - (d) Application de la reconstruction en ondelettes adjointe (c'est la décomposition en ondelettes) pour obtenir le gradient de la fonction coût par rapport aux coefficients en ondelettes
 - (e) Calcul, à partir de (X^n, J^n, G^n) , d'un nouveau point X^{n+1} par une méthode de descente

(f) Test d'arrêt de l'algorithme.

(i) Si l'inégalité $\left| \frac{J^n - J^{n-1}}{J^n} \right| < 10^{-4}$ est vraie, on arrête la procédure de minimisation : X^n est la solution. La condition initiale identifiée est ψ_0^n

(ii) Sinon, on retourne à l'étape 2 en incrémentant n .

Construction des observations

Un état de référence physiquement admissible peut être obtenu en résolvant les équations du modèle (condition initiale nulle) sur une durée de 20 ans. On utilise cet état comme condition initiale dans le modèle QG pour générer les observations.

Espace de contrôle

La condition initiale Ψ_0 est discrétisée sur la "grille" différences finies qui correspond au niveau j_f le plus fin de la base d'ondelettes. Le vecteur de contrôle est constitué par les coefficients d'échelle au niveau grossier j_g .

Choix de la condition initiale X^0

Un état physiquement admissible et décorrélé de l'état de référence est décomposé en ondelettes. Ces coefficients forment un vecteur X^0 de l'espace de contrôle. Cet état sera par exemple :

- (1) un état calculé par le modèle quelques mois avant l'état de référence ;
- (2) l'état de référence perturbé par un bruit blanc.

Codes direct et adjoint

Les codes direct et adjoint utilisés sont des codes différences finies auxquels nous avons ajouté la fonction coût présentée au paragraphe 1.

```

subroutine MODEL
  entrée :      stf!(condition initiale  $\psi_0$ )
  sorties :     traj!(trajectoire d'intégration  $\psi(t)$ )
               coût!(coût  $J^n = J(\psi_0^n)$ )

subroutine MODEL_AD
  entrée : traj!(trajectoire du modèle direct)
  sortie : stf_ad!"condition initiale adjointe"  $\frac{\partial J}{\partial \psi_0^n}$ 

```

Reconstruction en ondelettes

Nous avons choisi d'utiliser des coiffettes à 4 moment nuls, la reconstruction codée est celle présentée au paragraphe 2. Dans le code, on a donc introduit une routine de reconstruction. Elle a la forme suivante.

```

subroutine RECONSTRUIT
  entrée : coef_ond!(vecteur  $X^n$ )
  sortie : stf!(condition initiale  $\psi_0^n$ )

```

La condition initiale **stf** (*stream function*) est discrétisée sur la "grille" différences finies qui correspond au niveau j_f le plus fin de la base d'ondelettes. Les coefficients **coef_ond** sont les coefficients d'échelle au niveau grossier j_g . Dans la reconstruction, les coefficients qui correspondent aux détails sont nuls.

La routine adjointe de la routine reconstruction est exactement la routine de décomposition dans la base d'ondelettes.

```
subroutine RECONSTRUIT_AD!(= subroutine DÉCOMPOSITION)
  entrée : stf_ad!variable adjointe au temps initial
  sortie : coef_ond_ad! $G^n$  gradient de  $J$  par rapport à  $X^n$ 
```

Optimiseur

Les routines RECONSTRUIT, MODEL, MODEL_AD et RECONSTRUIT_AD calculent les informations J^n (fonction coût) et G^n (gradient de J^n) nécessaires à l'optimiseur.

Différents algorithmes de minimisation peuvent être utilisés. La méthode de quasi-Newton à mémoire limitée est la plus utilisée dans les problèmes d'assimilation de données en météorologie. En pratique, la partie minimisation est réalisée avec l'optimiseur "L-BFGS-B Library mainlb" [2].

4. Résultats numériques

L'objectif de ce paragraphe propose une première évaluation de l'intérêt d'utiliser des bases d'ondelettes comme espace de contrôle dans les problèmes d'assimilation de données en océanographie.

Le domaine de calcul est un bassin carré stratifié en $N = 3$ couches. Les équations discrètes utilise $3 \times 34 \times 34$ degrés de liberté, le pas de temps est choisi de manière à respecter le critère de stabilité du schéma.

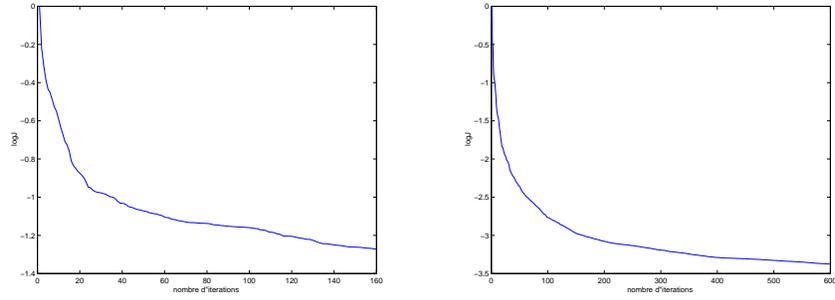
Les courbes présentées dans la Figure 1 représentent la décroissance de la fonction coût au cours des itérations pour les simulations à 48 (S_{48}) et 192 coefficients (S_{192}). Deux phénomènes, interdépendants, apparaissent.

- (1) Le nombre d'itérations nécessaire à la convergence du processus d'assimilation est plus important pour S_{192} que pour S_{48} . Cela résulte du choix d'un optimiseur de type quasi-newton dont la complexité théorique est linéaire en la dimension de l'espace de contrôle.
- (2) L'erreur commise en fin d'assimilation est plus faible dans la simulation S_{192} que pour S_{48} . Ce résultat attendu découle du choix des espaces de contrôle. En effet l'espace utilisé pour S_{192} inclut l'espace utilisé pour S_{48}
($V_3 \times V_3 \supset V_2 \times V_2$)

La Figure 2 indique les erreurs RMS commises sur l'identification des 3 couches. Pour les obtenir, on construit la trajectoire Ψ_k^{ref} du modèle à partir de la condition initiale de référence, et la trajectoire Ψ_k^{id} du modèle à partir de la condition initiale identifiée. On pose alors

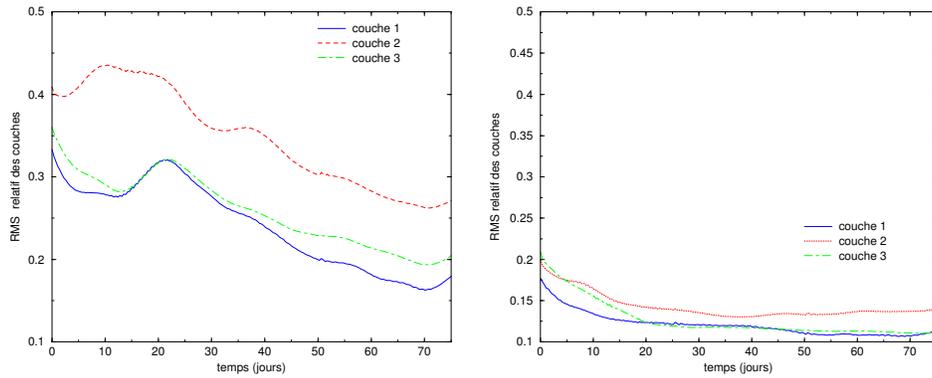
$$RMS(k) = \frac{\|\Psi_k^{id} - \Psi_k^{ref}\|}{\|\Psi_k^{ref}\|}.$$

Cette erreur mesure l'écart quadratique relatif entre les deux trajectoires.



(a) identification avec 48 coefficients (b) identification avec 192 coefficients

FIG. 1 –. La fonction coût logarithmique : $\log\left(\frac{J^n}{J^0}\right)$ au cours des itérations



(a) RMS (48 coefficients)

(b) RMS (192 coefficients)

FIG. 2 –. L'erreur relatif des couches

En conclusion, l'utilisation des ondelettes nous a permis d'effectuer des tests avec des espaces de contrôle de dimension de 1.5 % (respectivement 5.5 %) de la dimension de l'espace de contrôle classique (où l'on utilise la base euclidienne). Le coût de calcul se trouve donc réellement diminué et la qualité de l'identification est assez satisfaisante.

Une remarque tout-à-fait intéressante est qu'on n'a pas besoin d'un terme de régularisation quand on identifie en base d'ondelettes, celle-ci semblant avoir aussi un rôle régularisant.

L'utilisation de bases d'ondelettes semble donc un outil très prometteur pour améliorer le coût de calcul des algorithmes variationnels d'assimilation de données sans nuire à la qualité de l'identification et de la simulation.

Références

- [1] E. Blayo, J. Blum, J. Verron, *Assimilation variationnelle de données en océanographie et réduction de la dimension de l'espace de contrôle dans Equations aux dérivées partielles et applications*, Articles dédiés à Jacques-Louis Lions, Gauthier-Villars, 1998.
- [2] R.H. Byrd, P.Lu, J. Nocedal, C. Zhu, A limited memory algorithm for bound constrained optimization, *SIAM J. Scientific Computing*, **16**(5), 1190-1208 (1995).
- [3] F.X. Le Dimet, O. Talagrand, Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observation: theoretical aspects, *Tellus*, **38A**, 97-110 (1986).
- [4]] B. Luong, *Techniques de contrôle optimal pour un modèle quasi-géostrophique de circulation océanique. Application à l'assimilation variationnelle des données altimétriques satellitaires*, Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier, Grenoble I, 1995.
- [5] S. Mallat, Multiresolution approximation and Wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$, *Amer. Math. Soc.*, **315**, 69-88 (1989).
- [6] I. Paun, *Sur quelques problèmes régis par des équations aux dérivées partielles en astrophysique et en océanographie*, Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier, Grenoble I, 2001.

(Ioana Paun) IRMA - UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR
7 RUE RENÉ DESCARTES, 67084, STRASBOURG CEDEX - FRANCE
TEL : 03 90 24 02 32, FAX: 03 90 24 03 28
E-mail address: ipaun@irma.u-strasbg.fr

(Jacques Blum) LABORATOIRE JEAN-ALEXANDRE DIEUDONNÉ (UMR 6621)
UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
PARC VALROSE 06108 NICE CEDEX 02 - FRANCE
TEL: 04 92 07 62 91, FAX: 04 93 51 79 74
E-mail address: jblum@math.unice.fr

(Isabelle Charpentier) PROJET IDOPT(CNRS-INRIA-UJF-INPG)
LABORATOIRE DE MODÉLISATION ET CALCUL (LMC-IMAG)
B.P.53 38041 GRENOBLE CEDEX 9 - FRANCE
TEL : 04 76 63 57 14, FAX: 04 76 63 12 63
E-mail address: Isabelle.Charpentier@imag.fr