Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser.
Volume 30, 2003, Pages 204–209
ISSN: 1223-6934

La stabilité des méthodes aux différences

Ivan Secrieru

Résumé. Dans ce travail nous présentons quelques résultats concernant la stabilité de la méthode aux différents dans l'étude des équations différentielles. Nous considérons le problème bilocal et le problème périodique pour une équation d'ordre deux ainsi que la méthode de Runge-Kutta dans la résolution du problème de Cauchy.

Classification AMS 2000 des sujets. 65L12, 65L06, 65L07.
Mots clef et phrases. Analyse numérique, stabilté, méthode en différences.

1. Introduction

Les méthodes aux différences s'appliquent à la résolution approximative de plusieurs problèmes différentiels. On peut citer le problème de Cauchy, le problème périodique, le problème de Dirichlet, etc... Les schémas de calcul de ces méthodes sont différents d'une problème à l'autre, mais l'étude de la convergence et de la stabilité s'imposent pour chacun d'entre eux. La convergence des solutions approchées vers la solution exacte, pour tous les problèmes est definie dans le même sens. Elle peut être étudiée d'une façon plus générale en utilisant le language d'analyse fonctionnelle. Un exemple de ce type est présenté en [1]. Plus exactement la résolution approchée de tout problème cité plus haut peut être interprétée comme la réduction d'une équation

$$Ax = y, \tag{1}$$

définie dans des espaces normés X,Y de dimension infinie, à la résolutioon d'une équation

$$A_n x_n = y_n, \tag{2}$$

rapportée aux espacces X_n,Y_n de dimension finie [1].

L'opérateur A_n est une approximation de l'opérateur A dans le sens que la grandeur

$$\gamma_n(x) = ||A_n \phi_n x - \psi_n A x|| \to 0 \tag{3}$$

où ϕ_n et ψ_n sont les opérateurs de discrétisation de X en X_n et de Y en Y_n.

Les solutions x_n^* de l'équation (2) sont considérées comme des solutions approchées de la solution exacte x^* de (1).

En considérant que la convergence $x_n^* \to \phi_n x^*$ quand $n \to \infty$ est assurée, la stabilité de cette méthode est définie en différents sens. Par exemple, on parle de la stabilité par rapport aux erreurs des données (stabilité au sens de la convergence). En [2] on définit la stabilité spectrale d'une méthode approchée. Parfois, pour le même problème on peut parler de stabilité dans différents sens. Dans les sections suivantes on va étudier la stabilité de la méthode aux différences pour le problème bilocal et le problème périodique au sens d'influence sur le resultat des erreurs des

Reçu: le 11 décembre 2002.

données. D'apres [1] la stabilité est assurée par des conditions sévères imposées aux opérateurs A_n de l'équation (2). Cela revient au fait que la suite μ_n soit bornée, où $\mu_n = \|A_n\| \|A_n^{-1}\|$ sont les nombres de conditionnement de A_n. Le comportement de μ_n est un indicateur de la perte de stabilité dans les calculs. Une majoration de μ_n peut être obtenue à l'aide des valeurs propres de A_n et A_n^{-1}, calculées par QR – ou algorithme-QL ou par une autre méthode.

D'une autre manière on étudie la stabilité de la méthode aux différences de Runge-Kutta pour la résolution approchée du problème de Cauchy. Dans deux cas la stabilité est liée au choix du pas dans les schémas de calcul.

2. Le problème bilocal

Pour le problème bilocal

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x), \tag{4}$$
$$y(a) = c, y(b) = d,$$

où avec des conditions à la limite d'une forme plus générale, la méthode aux différences se réduit à la résolution d'un système d'équations linéaires avec matrice de forme tridiagonale:

$$T_n = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & & \\ c_2 & b_2 & a_2 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & c_{n-1} & b_{n-1} & a_{n-1} \\ & & & c_n & b_n \end{pmatrix}$$

Nous allons supposer que les conditions à la limite sont triviales, sinon on peut toujours y arriver à l'aide d'une transformation linéaire de la fonction $y(t)$ [3]. Les éléments a_i, b_i, c_i s'expriment par les valeurs des fonctions $p(x), q(x), r(x)$ aux points de discrétisations x_i de pas $h = (b-a)/n$ d'après les formules:

$$b_i = -(2p_i/h^2 - r_i), \; i = 1,2,\dots,n,$$
$$a_i = p_i/h^2 + q_i/2h, \; i = 1,2,\dots,n-1,$$
$$c_i = p_i/h^2 - q_i/2h, \; i = 2,3,\dots,n.$$

On suppose satisfaites les conditions suivantes:

$$p(x) > 0, \; r(x) \leq 0 \tag{5}$$

Elles assurent le fait que tous les coefficients $a_i, \; -b_i, \, c_i$ soient positifs, si le pas h est assez petit. De même, on peut affirmer que dans chaque ligne l'élément b_i est dominant par rapport à la somme des autres éléments de cette ligne

$$b_i \leq a_i + c_i, \; i = 1,2,\dots,n. \tag{6}$$

La solution du système approximative existe donc et elle est unique. La convergence des solutions approchées vers la solution exacte est démontrée en [3].

La stabilité de cette méthode dépend du comportement des valeurs propres extrémales de T_n et T_n^{-1}. L'existence de la matrice inverse résulte d'aprés le théorème d' Hadamard de la condition (6). En outre, on peut facilement démontrer le théorème:

Toute matrice tridiagonale T_n possédant la propriété:

$$c_{i+1}a_i > 0, \; i = 1,2,\dots,n-1 \tag{7}$$

n'admet que des valeurs propres réelles.

La démonstration de ceci réside dans le fait qu'une telle matrice est semblable à une matrice tridiagonale, symétrique et réelle:

$$S_n = \begin{pmatrix} v_1 & u_1 & & & \\ u_1 & v_2 & u_2 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & u_{n-2} & v_{n-1} & u_{n-1} \\ & & & u_n - 1 & v_n \end{pmatrix}$$

où $v_i = b_i,\ u_i = \sqrt{c_{i+1}a_i}$.
Pour montrer que T_n est semblable à S_n il est nécessaire de construire une matrice diagonale D_n dont les éléments sont:

$$d_1 = 1,\ d_i = \sqrt{a_1 a_2 ... a_i / c_2 c_3 ... c_i + 1},\ i = 2,3,...n-1.$$

3. Le problème périodique

On considère la même équation différentielle que dans le point précédent. mais avec une autre condition à la limite. Donc, soit le problème :

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x), \tag{8}$$
$$y(a) = y(b)\ \ (y'(a) = y'(b)).$$

Nous allons nous limiter à la première condition à la limite. La deuxième nécessite l'approximation de la dérivée de $y(t)$ aux extrémités a et b. Les fonctions $p(x)$,$q(x)$,$r(x)$ et $f(x)$ sont considérées périodiques (la période $T = b - a$) et définies sur tout l'axe numérique. La discrétisation du probleme (8) se fait de la même manière que pour le bilocal, mais ici on considère les noeuds x_i de pas h, distribués sur $[a,b]$ et aussi hors de ce segment. De cette façon la condition de périodicité sous forme discrète s'écrit

$$y_{n+1} = y_i,\ \ i = 0, \pm 1, \pm 2,...$$

L'équation approximative pour le problème (8) représente un système d'équations linéaires avec une matrice de la forme suivante:

$$P_n = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & & a_n \\ c_2 & b_2 & a_2 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & & b_{n-1} & a_{n-1} \\ c_1 & & & c_n & a_n \end{pmatrix} \tag{9}$$

Les éléments a_i,b_i,c_i de P_n s'expriment par les valeurs des fonction p,q,r aux noeud x_{i+1} d'après les mêmes formules que celles du §2, sauf les éléments a_n et c_1, calculés comme suit:

$$a_n = P_0/h^2 - q_0/(2h);\ \ c_1 = P_{n-1}/h^2 + q_{n-1}/(2h).$$

En supposant de nouveau que la condition (5) est verifiée, on peut constater que $a_i, -b_i$ et c_i sont tous positifs à partir d'un pas h assez petit. La relation (6) est aussi valable pour ce cas. Ces conditions assurent l'existence et l'unicité de la solution du système

$$P_n Y = F,$$

ou $Y = (y_0,y_1,...,y_{n-1}),\ F = (f_0,f_1,...,f_{n-1})$. En outre, pour les éléments de P_n ont lieu les inégalitées

$$c_1 a_n > 0;\ \ c_{i+1}a_i > 0,\ \ i = 1,2,...,n-1. \tag{10}$$

Théorème 3.1. *Toute matrice P_n dont les éléments a_i,c_i verifient les relations (10) est semblable à une matrice symétrique*

$$Q_n = \begin{pmatrix} v_1 & u_1 & & & u_n \\ u_1 & v_2 & u_2 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & u_{n-2} & v_{n-1} & u_{n-1} \\ u_n & & & u_{n-1} & v_n \end{pmatrix} \qquad (11)$$

si l'inégalité suivante est satisfaite

$$\frac{c_1}{a_n} = \frac{c_2 c_3 ... c_n}{a_1 a_2 ... a_{n-1}}.$$

La démonstration du théorème 3.1 se fait de la même façon que pour la matrice T_n du §2.

Ainsi pour les deux problèmes étudiés plus haut, les matrices T_n et P_n ont toutes les valeurs propres réelles. Leur calcul peut s'effectuer par QR ou algorithme-QL [4] ou par une autre méthode. Cela donne la possibilité d'avoir une majoration du nombre de conditionnements des matrices T_n et P_n sans calculer leur inverse. Comme la stabilité de la méthode aux différences n'a pas lieu dans les deux cas, ce fait permet de contrôler le comportement de μ_n en fonction de h pendant le calcul des solutions approchées.

4. La stabilité de la méthode de Runge-Kutta (RK)

Soit le problème de Cauchy

$$y'(t) = f(t,y(t)), \qquad (12)$$

$$y(t_0) = y_0.$$

Par un changement de variable on réduit la condition initiale à $y(0) = y_0$. La solution approchée se détermine par la méthode RK d'après la formule

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \textstyle\sum_{i=1}^{q} \alpha_i K_i, \\ K_i &= f(t_n + Q_i h, y_n + h \textstyle\sum_{j=1}^{i} A_{ij} K_j) \qquad i = \overline{1,q}. \end{aligned} \qquad (13)$$

Un algorithme RK est dit stable au sens de la convergence si toutes les racines Z_j de l'équation caractéristique $R(z) = 0$ vérifient les relations $|Z_j| \leq 1$ et les racines dont $|Z_j| = 1$ sont simples.

La méthode de RK appliquée à l'équation modèle

$$y'(t) = \lambda y(t), t > 0, \qquad (14)$$

$$y(0) = y_0, \ Re(\lambda) < 0$$

s'écrit $y_{n+1} = R(z) y_n, Z = h\lambda$, où la fonction de stabilité $R(Z)$ est un polynôme de degré q :

$R(Z) = 1 + \alpha^t Z(I - AZ)^{-1} e, \ e = (1,1,...,1)^t \ \alpha^t = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_q),$
$A = \{A_{ij}\}_{i,j=1}^{q}.$

Théorème 4.1. *La fonction de stabilité $R(Z)$ de la méthode de RK appliquée à (13) s'écrit sons la forme*

$$R(Z) = \frac{\det(I - ZA + Ze\alpha^t)}{\det(I - ZA)}$$

Demonstration. Les formules (12) appliquées à l'équation modèle conduisent au système suivant:

$$\begin{gathered} y_{n+1} = y_n + h\lambda \sum_{i=1}^{q} \alpha_i Y_i, \\ Y_1 = y_n + h\lambda \sum_{i=1}^{q} A_{1i} Y_i, \\ Y_2 = y_n + h\lambda \sum_{i=1}^{q} A_{2i} Y_i, \\ \ldots \\ Y_q = y_n + h\lambda \sum_{i=1}^{q} A_{qi} Y_i, \end{gathered}$$

Ce système peut s'écrire sous forme matricielle $MY = Y_n$, où

$$M = \begin{pmatrix} 1 - h\lambda A_{11} & -h\lambda A_{12} & \ldots & -h\lambda A_{1q} & 0 \\ h\lambda A_{21} & 1 - h\lambda A_{22} & \ldots & -h\lambda A_{2q} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h\lambda A_{q1} & -h\lambda A_{q2} & \ldots & 1 - h\lambda A_{qq} & 0 \\ -h\lambda\alpha_1 & -h\lambda\alpha_2 & \ldots & -h\lambda\alpha_q & 1 \end{pmatrix}$$

$Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_q, y_{n+1})^T, Y_n = (y_n, y_n, ..., y_n)^T$. D'après la règle de Cramer, puisque: $\det M = \det(I - ZA)$, on trouve

$$y_{n+1} = \frac{\det(I - ZA + Ze\alpha^t)}{\det(I - ZA)} y_n.$$

De cette façon l'équation caractéristique s'écrit $r^{n+1} = R(Z)r^n$ dont les solutions sont $r_1 = 0$, $r_i = R(Z)$.

Donc la stabilité de la méthode dépend des propriétés de $R(Z)$, en imposant $|R(Z)| \leq 1$.

On peut généraliser la condition de stabilité pour une équation dont la fonction $f(y)$ est quadratique. En effet, soit le problème

$$y' = ay^2 + by + c, \tag{15}$$

$$y(0) = y_0$$

où l'équation différentielle est de type Riccati à coefficients constants.

Cette équation admet la solution particulière

$$\overline{y} = (-b + \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$$

et on peut la réduire à une équation de Bernoulli par la substitution

$$y(t) = z(t) + \overline{y}.$$

Par la transformation $Z^{-1} = t$ l'équation obtenue devient

$$-t' - \sqrt{b^2 - 4ac}t = a.$$

La substitution $t = p - a/\sqrt{b^2 - 4ac}$ nous conduit à l'équation

$$P' = AP, A = \sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Elle est du même type que l'équation modèle. Donc la condition de stabilité s'écrit $|R\sqrt{b^2 - 4ac}| < 1$.

Références

[1] M.K. Gavurin, *Lectsii po metodam vycislenii*, M., Nauka, 1971.

[2] G.I. Marciuk, *Metody vycislitelnoi matematiki*, M., Nauka, 1980.

[3] I. Secrieru, Convergenţa şi stabilitatea metodei reţelei, *Conferinţa corpului didactico-ştiinţific a USM*, Chişinău (1998).

[4] B. Parllet, *The symmetric Eigenvalue Problem*, University of California, Printince Hall, 1980.

[5] G. Secrieru, I. Secrieru, *Analiza numerică* Çhişinău, Stiinţa, 1985.

(Ivan Secrieru) Universite d'Etat de Moldavie
60 rue Mateevici 2009 Chişinău Moldavie
E-mail address: isecrier@usm.md