

Analyse et contrôle par automates cellulaires

SAMIRA EL YACOUBI, PRZEMYSŁAW JACEWICZ ET NEZHA AMMOR

RÉSUMÉ. Les automates cellulaires sont des modèles mathématiques simples qui semblent capter les caractéristiques essentielles de plusieurs systèmes réels. Les dynamiques sont discrètes et basées sur des règles microscopiques qui peuvent reproduire le comportement des équations aux dérivées partielles. Nous étudions dans ce papier les automates cellulaires en relations avec la théorie des systèmes. Nous présentons quelques résultats concernant la modélisation, l'analyse et le contrôle des systèmes distribués habituellement décrits par des EDP. Les notions d'étalabilité et de contrôlabilité régionale ont été revues à travers ces modèles.

Classification AMS 2000 des sujets. 37B15, 37M05, 68Q10, 93B05, 00A71, 00A72.

Mots clef et phrases. automates cellulaires, systèmes distribués, étalabilité, contrôlabilité régionale.

1. Introduction

La description mathématique d'un processus réel, physique, chimique, biologique, etc, nécessite une bonne connaissance de tous les composants fondamentaux du système. Cette interprétation de la réalité à l'aide d'équations mathématiques est ce que l'on appelle modèle mathématique. On l'établit dans le but de décrire et comprendre un phénomène, prédire son comportement, et contrôler son évolution.

C'est la démarche classique en théorie des systèmes et c'est ce qui constitue l'essentiel de notre activité scientifique. Nous nous intéressons aux systèmes ayant une représentation spatio-temporelle que l'on cherche à *modéliser*, *analyser* et *contrôler* afin de mieux comprendre et appréhender leur fonctionnement. La phase de contrôle peut être précédée d'une étape de validation du modèle.

La description de la plupart des systèmes distribués passe par l'utilisation des équations aux dérivées partielles (EDP). Les recherches sur les EDP portent aussi bien sur des aspects théoriques que pratiques et la compréhension des systèmes étudiés se fait par une interaction soutenue entre analyse mathématique et simulation numérique. Le développement de méthodes de calcul originales et la réalisation de logiciels sont très souvent l'aboutissement et la concrétisation de l'analyse mathématique approfondie de ces modèles. Ce type de modèles exige donc une bonne maîtrise des connaissances dans le domaine des mathématiques, de la simulation numérique et de l'informatique.

Lorsque les systèmes étudiés sont complexes (issus de motivations réelles physiques, bio-géographiques ou écologiques) et font ainsi intervenir un très grand nombre de sous-systèmes, ils sont souvent caractérisés par une grande variété d'échelles de temps et d'espace. Ce qui se traduit par des non-linéarités dans les équations qui les gouvernent et pose des problèmes majeurs liés à la résolution et à la manipulation numérique des EDP.

Reçu: le 11 décembre 2002.

Les recherches alors sur l'élaboration de modèles alternatifs s'imposent. Dans ce contexte, les *automates cellulaires* (notés AC dans le texte) offrent une approche performante qui permet de décrire dans un formalisme mathématique simple un phénomène hautement complexe.

Les AC sont une idéalisation mathématique d'un système physique dans lequel l'espace, le temps ainsi que les quantités physiques sont discrets. Les dynamiques d'AC sont interprétées en termes de règles microscopiques simples, capables d'exhiber le même comportement macroscopique que le système réel étudié. En théorie des systèmes, un intérêt majeur est porté à ce type de modèles qui offrent une approche intuitive et puissante pour représenter des phénomènes complexes, difficiles voire impossibles à modéliser par les approches classiques (ODE, EDP etc). En outre, les AC présentent un gros avantage du point de vue numérique à savoir, une bonne adéquation aux architectures des ordinateurs et des machines parallèles. Le fait de travailler avec des quantités booléennes prévient des instabilités numériques puisque les calculs se font d'une manière exacte. Il n'y a pas non plus de troncature ou d'approximation dans les dynamiques elles mêmes.

La théorie des AC est liée à plusieurs disciplines qui se trouvent à la frontière entre les mathématiques et l'informatique comme la théorie des graphes, les algèbres finies ou les processus stochastiques.

En informatique, la recherche de machines universelles était à l'origine de cette théorie à laquelle s'est intéressée John von Neumann vers les années 1960. Travaillant sur les bases logiques de la vie, il a conçu un AC qui modélise un processus de reproduction dans les systèmes biologiques. Son modèle a été simplifié par J. H. Conway en 1970 qui a inventé le "Jeu de la vie". Vers les années quatre-vingt, les AC sont devenus un outil à vocation générale notamment avec les travaux de S. Wolfram [17].

Dans un domaine différent, les AC peuvent être utilisés comme alternative aux équations différentielles ou aux dérivées partielles. Ils fournissent des modèles réalistes qui découlent directement des lois de la physique en conservant au mieux les caractéristiques fondamentales du comportement microscopique. L'utilisation de cette approche a permis d'élaborer des modèles extrêmement simples reproduisant des EDP telles que l'équation de la chaleur (Chopard, 1998), l'équation des ondes (Toffoli, 1984), l'équation de Navier-Stocks (Hardy et al, 1976) etc.

Au delà de l'aspect modélisation, nous présentons dans ce travail des résultats liés à certaines notions d'analyse et de contrôle (contrôlabilité, étalabilité, identification, etc) que nous avons étudiés à travers les modèles d'AC. Un des aspects de l'analyse régionale des systèmes à savoir la contrôlabilité régionale sera également considéré.

2. Généralités sur les automates cellulaires

2.1. Définition des AC. Un AC est un système dynamique discret. L'espace et le temps sont également discrets. L'élément de base d'un AC est la *cellule*. L'état de chaque cellule est une variable qui prend ses valeurs dans un ensemble fini de valeurs admissibles. Dans le cas le plus simple, chaque cellule peut avoir l'état binaire 1 ou 0. Dans des situations plus complexes, les cellules peuvent avoir différents états. Les cellules sont arrangées dans un réseau spatial régulier appelé *espace cellulaire* qui peut être une ligne dans le cas ($1D$), une grille dans le cas ($2D$). Dans le cas $2D$, les cellules sont souvent arrangées selon un réseau rectangulaire mais d'autres arrangements (en cellules carrées, triangulaires ou hexagonales) sont parfois utilisés.

Chaque cellule admet un *voisinage* qui correspond à l'ensemble des cellules voisines qui interagissent avec elle.

L'état d'une cellule est mis à jour de manière synchrone à chaque pas de temps en utilisant un ensemble de *règles* qui décrivent les transitions d'états de l'instant t au temps $t + 1$. Ainsi l'état du réseau entier avance selon des pas de temps discrets.

Dans un cadre mathématique, on donne la définition suivante :

Définition 2.1. *Un AC est défini par le quadruplet $\mathcal{A} = (\mathcal{T}, \mathcal{E}, v, f)$ où*

- \mathcal{T} est un réseau cellulaire qui consiste en un pavage régulier d'un domaine Ω de \mathbb{R}^d , $d=1, 2$ ou 3 .
- \mathcal{E} désigne l'ensemble d'état qui est un ensemble fini de valeurs qui représentent tous les états susceptibles d'être pris par chaque cellule. L'ensemble d'état est souvent un anneau cyclique donné par $\mathcal{E} = \{0, 1, \dots, k-1\}$ où les opérations sont considérées modulo k .
- v est une fonction qui définit le voisinage d'une cellule c définie par :

$$\begin{aligned} v : \mathcal{T} &\longrightarrow \mathcal{T}^n \\ c &\longrightarrow v(c) = (c_1, c_2, \dots, c_n) \end{aligned} \quad (1)$$

où les cellules c_i pour $i = 1, \dots, n$ sont liées à c par une relation de proximité, contiguïté, influence, etc. n étant la taille du voisinage $v(c)$.

- f est une fonction de transition qui permet de calculer l'état d'une cellule à l'instant $t+1$ en fonction de l'état de son voisinage à l'instant t . Elle peut être définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{E}^n &\longrightarrow \mathcal{E} \\ e_t(v(c)) &\longrightarrow e_{t+1}(c) = f(e_t(v(c))) \end{aligned} \quad (2)$$

où $e_t(c)$ désigne l'état de la cellule c à l'instant t et $e_t(v(c)) = \{e_t(c'), c' \in v(c)\}$ est l'état de son voisinage.

On appelle configuration de l'AC à l'instant t la donnée de l'ensemble $\{e_t(c), c \in \mathcal{T}\}$. Elle est exprimée généralement par l'application :

$$\begin{aligned} e_t : \mathcal{T} &\longrightarrow \mathcal{E} \\ c &\longrightarrow e_t(c) \end{aligned} \quad (3)$$

On appelle dynamique globale de l'AC la fonction :

$$\begin{aligned} F : \mathcal{E}^{\mathcal{T}} &\longrightarrow \mathcal{E}^{\mathcal{T}} \\ e_t &\longrightarrow e_{t+1} \end{aligned} \quad (4)$$

F associe à la configuration de l'AC à l'instant t une nouvelle configuration à l'instant $t + 1$. F est liée à f par la relation : $Foe_t = foe_tov$.

En dimension 2, on donne dans Fig. 1, les trois types de voisinages les plus utilisés.

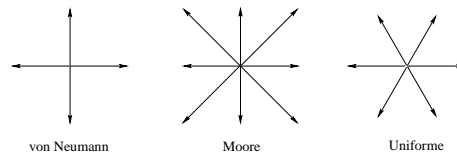


FIG. 1 – Types de voisinages

2.2. Conditions initiales et aux limites. Comme pour tout système d'évolution, des conditions initiales et aux limites méritent d'être précisées.

- Conditions aux limites: elles peuvent être de trois types; périodiques, reflexives ou fixes et sont schématisées par la figure 2.

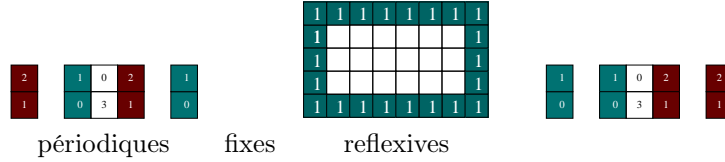


FIG. 2 – Types de conditions aux limites

- Conditions initiales: elles peuvent être déterministes et s'exprimer par la fonction:

$$\begin{array}{ccc} e_0 : \mathcal{T} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ c & \longrightarrow & e_0(c) \end{array} \quad (5)$$

Elles peuvent être aussi aléatoires selon des considérations physiques du problème à simuler.

2.3. Automates Cellulaires Particuliers.

2.3.1. Règles additives. Dans le cas déterministe, il existe différentes classes de fonctions de transition que l'on rencontre dans les problèmes réels. Cependant, les résultats de base sur les AC concerne des dynamiques globales dites additives (linéaires et homogènes) mais uniquement dans le cas mono-dimensionnel. En considérant l'addition dans \mathcal{E} modulo son cardinal k , l'addition dans l'espace des configurations $\mathcal{E}^{\mathcal{T}}$ est définie par :

$$\forall e_1, e_2 \in \mathcal{E}^{\mathcal{T}}, \forall c \in \mathcal{T}, (e_1 + e_2)(c) = e_1(c) + e_2(c) \quad (6)$$

Définition 2.2. La dynamique globale F est dite additive si pour toute paire de configurations $e_1, e_2 \in \mathcal{E}^{\mathcal{T}}$,

$$F(e_1 + e_2) = F(e_1) + F(e_2) \quad (7)$$

Cette définition est équivalente à la condition locale d'AC additifs

$$f(e_t(v(c))) = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i e_t(c_i) \quad (8)$$

où a_0, a_1, \dots, a_n sont des coefficients de pondération des cellules dans le voisinage v .

Les fonctions de transition qui donnent un poids égal à toutes les cellules du voisinage constituent un cas particulier de ce que l'on appelle règles *totalistes* qui ont la forme suivante :

$$f(e_t(v(c))) = \varphi \left(\sum_{c' \in v(c)} e_t(c') \right) \quad (9)$$

Ce qui implique que l'état de la cellule centrale est mise à jour uniquement en fonction de la somme des états des cellules de son voisinage.

2.3.2. Règles sub-totalistes.

Définition 2.3. Elles correspondent à une fonction de transition f définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} \times \mathcal{E}^n & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ (e_t(c), e_t(v(c))) & & e_{t+1}(c) \\ \searrow & & \nearrow \\ & \mathcal{E} \times \mathcal{E} & \\ & (e_t(c), g(\sum_{c' \in v(c)} e_t(c'))) & \end{array}$$

où g une application quelconque de \mathcal{E}^n vers \mathcal{E} .

3. Modélisation par automates cellulaires

Un AC peut être vu comme un univers fictif qui a sa propre réalité microscopique mais admet le même comportement macroscopique que le système réel qui nous intéresse. L'interprétation des dynamiques d'AC en termes de règles microscopiques simples permet une meilleure adéquation à la réalité physique du phénomène. Un exemple important concerne les conditions aux limites qui sont dans la plupart des cas, naturellement implémentées dans un modèle d'AC puisque la frontière a une interprétation naturelle à ce niveau de description (par exemple, les particules qui rebondissent au contact d'un obstacle).

Une des applications principales des AC est la modélisation des processus complexes. Grâce à leur architecture discrète et parallèle, les AC semblent spécialement convenables pour tout système discret ayant une représentation spatiale (modèles moléculaires en physique). On présente ici un exemple typique de modèle d'AC pour un processus de diffusion au niveau microscopique caractérisé par le mouvement brownien décrit par les particules élémentaires.

3.1. Modèle de diffusion. Dans les systèmes réels, la diffusion provient de l'effet global de plusieurs molécules qui effectuent indépendamment des marches aléatoires. La marche aléatoire peut provenir soit des collisions entre particules de la même espèce (self-diffusion) soit des interactions avec d'autres espèces. Pour les AC, nous pouvons modéliser la diffusion en utilisant une méthode basée essentiellement sur le mécanisme qui génère le phénomène de diffusion dans des systèmes réels. Les molécules sont remplacées par des particules idéalisées et peuvent exécuter des mouvements aléatoires sur un réseau régulier. Une règle d'AC dans laquelle sont impliquées des particules discrètes devrait conserver leur nombre total.

L'AC considéré évolue dans un réseau carré sur lequel les particules se propagent en deux dimensions avec des interactions entre voisins proches.

Type de voisinage : Chaque particule est associée à une impulsion qui indique la direction et la distance parcourue par la particule en un pas de temps. On note par $\nu_i, i = 1, \dots, M$, les différentes impulsions ou vitesses que peut avoir une particule, M étant fonction du type de voisinage considéré. Ainsi $M = 4$ dans le cas d'un voisinage de type Neumann, $M = 6$ lorsqu'il s'agit d'un voisinage hexagonal ou $M = 8$ dans le cas d'un voisinage de type Moore. Il suffit dans le cas d'une diffusion de choisir un voisinage de type von Neumann.

Règle de transition : La description du phénomène de diffusion en terme de densité de particules vise à représenter la marche aléatoire des particules, caractérisée par une phase de propagation et une phase de redistribution [2]. La phase de redistribution dans le modèle du mouvement aléatoire des particules est obtenue en effectuant des permutations des directions d'incidences des particules entrant dans un même site. La phase de propagation est décrite par un simple déplacement des particule vers les sites voisins selon leurs nouvelles directions. Dans un espace à d dimensions, seules $2d$ directions sont possibles. Ces $2d$ directions de déplacement peuvent être permutées de $2d!$ manières différentes. La direction de sortie d'une particule sera prise parmi les $2d!$ permutations possibles. Cependant il n'est pas nécessaire de considérer toute les permutations . Il suffit de prendre en considération les permutations cycliques de ces dernières ([2] Sec.2.6). Ce qui peut se représenter dans un modèle à deux dimensions, de la manière suivante :

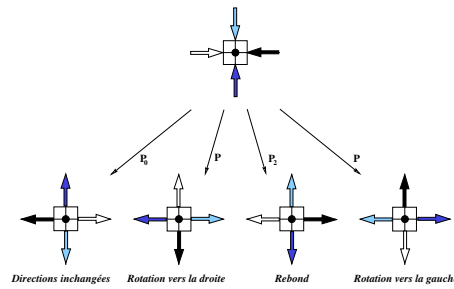


FIG. 3 –. *Probabilité d'évolution du modèle*

On considère que dans chaque cellule peuvent entrer au maximum 4 particules par les quatre bords de cette dernière à un instant donné. Elles en sortent avec les mêmes directions mais ayant subi une permutation aléatoire (identiques ou avec une rotation d'un quart de tour à droite ou à gauche ou un rebond : un demi-tour).

Si $g_i(r,k)$ désigne la présence à l'instant k , d'une particule à la position r avec la vitesse ν_i , la dynamique microscopique se traduit sous la forme suivante :

$$g_i(r + \lambda\nu_i, t + \tau) = \sum_{\ell=0}^3 \mu_\ell(\vec{r}, t) g_{i+\ell}(r, t) \quad (10)$$

où

$$\mu_\ell \in \{0,1\}$$

est une variable booléenne donnée par : $\mu_\ell = \begin{cases} 1 & \text{avec la probabilité } p_\ell \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$ avec la

condition $\sum_{\ell=0}^3 \mu_\ell = 1$. Pour des raisons de symétrie, il est naturel d'imposer la condition

$p_1 = p_3 = p$ avec dans ce cas $p_0 + 2p + p_2 = 1$.

La limite macroscopique de l'équation (10), se déduit en considérant les valeurs moyennes des quantités utilisées, désignées par $\langle \cdot \rangle$. En notant $G_i = \langle g_i \rangle$ et en supposant que $\langle \mu_\ell g_{i+\ell} \rangle = p_\ell G_{i+\ell}$ avec $\langle \mu_\ell \rangle = p_\ell$, l'équation (10) en dimension 2 s'écrit :

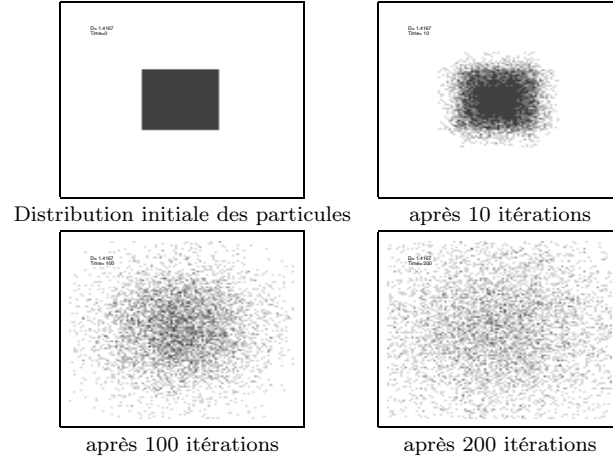


FIG. 4 – Evolution avec le coefficient $D=1.4167$

$$G_i(r + \lambda\nu_i, t + \tau) - G_i(r, t) = (p_0 - 1)G_i + pG_{i+1} + p_2G_{i+2} + pG_{i+3} \quad (11)$$

En utilisant un développement de Taylor du membre de gauche et un développement de Chapman-Enskog (autour de l'équilibre) de G_i avec $\rho = \sum_{i=0}^3 \langle g_i \rangle$ on obtient l'équation de diffusion suivante (voir [2] pour plus de détails) :

$$\partial_t \rho + \text{div}[-D \text{grad} \rho] = 0$$

où le coefficient de diffusion s'écrit :

$$D = \frac{\lambda^2}{\tau} \left(\frac{1}{4(p + p_2)} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\lambda^2}{\tau} \frac{p + p_0}{4[1 - (p + p_0)]}$$

avec p , p_0 , p_2 les probabilités de rotations dans les directions considérées (voir Fig. 3).

3.1.1. Exemple: L'exemple de simulation considéré est construit sur la base d'une condition initiale constituée d'un carré de largeur $1/3$ d'un domaine de 102×102 cellules, situé au centre avec quatre particules par cellules dans quatre directions différentes. Nous avons observé le phénomène pour des probabilités d'évolution p , p_2 et p_0 qui permettent de calculer le coefficient de diffusion.

Avec $p = 0.05$, $p_2 = 0.1$, $p_0 = 0.8$, le calcul du coefficient de diffusion donne $D = 1.4167$ et on observe l'évolution suivante à différents pas de temps

4. Quelques aspects d'analyse via les automates cellulaires

Au delà de l'aspect modélisation, plusieurs notions d'analyse (contrôlabilité, observabilité, identification, etc) sont à l'étude à travers les modèles d'AC. Ces notions ont été largement étudiées pour des systèmes décrits par des EDP et plusieurs résultats ont été obtenus surtout dans le cas linéaire [1, 5, 12, 13, 15].

4.1. Étalabilité. Afin de décrire le phénomène d'expansion qui se produit dans plusieurs processus environnementaux, tels que les dynamiques de végétation ou les systèmes de pollution, le concept d'étalabilité a été introduit par El Jai en 1994 [3]. Plusieurs travaux sur l'étalabilité ont été développés en s'appuyant sur des modèles d'équations aux dérivées partielles [3, 4, 7].

Ces résultats quoi que intéressants du point de vue théorique, restent partiels et ne concernent que des systèmes académiques linéaires. Le problème est en général plus compliqué surtout pour les aspects de mise en oeuvre.

Nous montrons dans cette section à l'aide des dynamiques locales qui caractérisent l'évolution d'un AC, que l'étude du concept d'étalabilité est plus aisée et s'apprête beaucoup mieux à la simulation.

4.1.1. Définition. La définition de l'étalabilité en termes d'AC est une extension triviale de celle donnée pour les systèmes continus [3].

Soit $\mathcal{A} = (\mathcal{T}, \mathcal{E}, v, f)$ un AC et \mathcal{P} une propriété destinée à s'étaler ou à se résorber, donnée par

$$\mathcal{P}e_t(c) \Leftrightarrow e_t(c) = e \quad (12)$$

où $e \in \mathcal{E}$ correspond à un état désiré qui est supposé atteignable à partir de t_0 . Considérons maintenant la famille des sous-ensembles

$$\begin{aligned} \omega_t &= \{c \in \mathcal{T} \mid \mathcal{P}e_t(c)\} \\ &= \{c \in \mathcal{T} \mid e_t(c) = e\} \end{aligned} \quad (13)$$

De nombreux exemples de propriétés \mathcal{P} peuvent être considérés:

- $\mathcal{P}e_t(c) \Leftrightarrow e_{t+1}(c) \geq e_t(c)$, $c \in \mathcal{T}$. Cela se produit dans les modèles de croissance.
- $\mathcal{P}e_t(c) \Leftrightarrow e_t(c_{i,j}) = e_t(c_{i-1,j-1})$, $c \in \mathcal{E}$ a lieu, par exemple, en 2 dimensions, quand l'état doit être maintenu constant dans une direction donnée.

Définition 4.1.

Un AC \mathcal{A} est dit \mathcal{P} -étalable à partir de ω_{t_0} si

$$\omega_t \subset \omega_{t+1}, \quad \forall t \geq t_0 \quad (14)$$

Dans (14), l'état est supposé satisfaire la propriété \mathcal{P} sur $\omega_{t'}$ même pour $t' \geq t$. A partir de (14) il apparaît clairement qu'un système étalable est persistant. En outre, l'état persistant se maintient spatialement dans le temps, sur des domaines croissants.

4.1.2. Condition suffisante pour un AC étalable. Concernant les AC étalables, le résultat suivant montre qu'une fonction de transition convenablement choisie, peut définir une dynamique de système étalable. Soit $\mathcal{A} = (\mathcal{T}, \mathcal{E}, v, f)$ un AC avec un ensemble d'état $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$, un voisinage v de taille n .

Proposition 4.1. L'AC \mathcal{A} est \mathcal{P} -étalable à partir de ω_{t_0} pour une fonction de transition f de type outer-totaliste satisfaisant la condition

$$f(e, e') = e \quad (15)$$

pour tout $e' \in \{e_1, \dots, (n-1)e_k\}$ et e un état supposé atteignable à partir de $t = t_0$.

Preuve : immédiate.

4.1.3. Exemple d'AC étalable: Le modèle qu'on présentera ici est général et peut être utilisé pour décrire la propagation d'une épidémie ou d'une maladie [11]. Il opère sur un réseau rectangulaire bi-dimensionnel de 130×100 cellules avec un voisinage de von Neumann. Chaque cellule peut:

- être vide (état 0),
- représenter le phénomène destiné à se répandre (état 1),
- représenter la frontière de l'étendue du phénomène (état 2),
- être résistante à la propagation du phénomène (état 3).

A chaque pas de temps, une cellule de la frontière, choisie au hasard, prend l'état 1. Une nouvelle frontière doit être alors définie en ajoutant les cellules vides du voisinage.

Une suite de configurations illustrant l'évolution du modèle discuté ci-dessus, est présentée dans la figure 5.

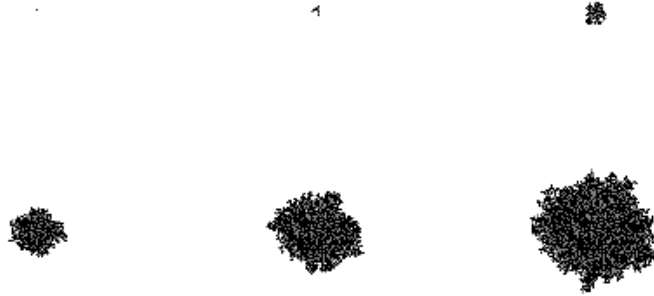


FIG. 5 –. Résultats de simulation de l'AC étalable.

4.2. Contrôlabilité régionale.

4.2.1. Définition. On considère un système décrit sur un domaine géométrique Ω et schématisé dans la figure 6.

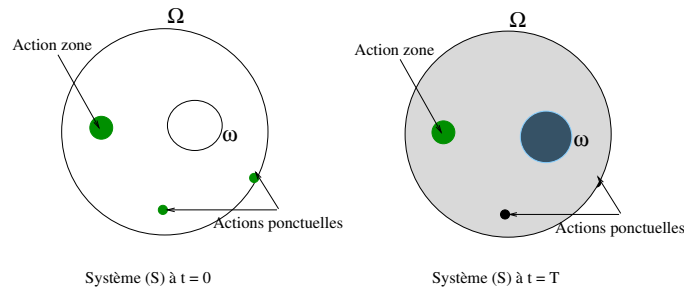


FIG. 6 –. Problème de contrôlabilité régionale.

Le problème consiste à trouver un contrôle u qui permette d'amener le système d'un état initial z_0 à un état désiré z_d à l'instant T sur la région ω .

Des résultats ont été développés en utilisant l'approche EDP et divers résultats de caractérisations ont été établis [6, 18]. Avant de donner la définition de la contrôlabilité régionale en terme d'AC, on pose les hypothèses suivantes :

- $\mathcal{A} = (\mathcal{T}, \mathcal{E}, v, f)$ un AC,
- T un horizon de temps donné,
- ω une région de \mathcal{T} constituée de n_ω cellules.

On définit sur l'espace des configurations $\mathcal{E}^{\mathcal{T}}$ une distance d par :

$$\forall (e_1, e_2) \in \mathcal{E}^{\mathcal{T}} \times \mathcal{E}^{\mathcal{T}} \quad d(e_1, e_2) = \text{card}\{c \in \mathcal{T} \mid e_1(c) \neq e_2(c)\} \quad (16)$$

Soit e_d une configuration désirée sur ω

Définition 4.2. - L'AC \mathcal{A} est dit *régionalement contrôlable* si il existe pour $e_d \in \mathcal{E}^\omega$ un contrôle u dans un certain sens tel que

$$e_T = e_d \quad \text{sur } \omega \quad (17)$$

- L'AC \mathcal{A} est dit *faiblement régionalement contrôlable* pour $e_d \in \mathcal{E}^\omega$ si étant donné $\varepsilon \geq 0$, il existe un contrôle u tel que

$$d(e_T, e_d) \leq \varepsilon \quad \text{on } \omega \quad (18)$$

où d est la distance définie dans (16).

4.2.2. Exemple en deux dimensions. On considère un AC $\mathcal{A} = (\mathcal{T}, \mathcal{E}, v, f)$ constitué par un réseau carré formé par des cellules notées $c_{i,j}$ où $i, j = 1, \dots, 10$. L'espace d'état $\mathcal{E} = \{0, 1, 2\}$ et le voisinage v est de type von Neumann.

Il s'agit donc d'exciter ce système décrit par une règle d'AC connue à l'aide d'un contrôle u_t de façon à assurer la contrôlabilité régionale sur une région ω à partir d'un état initial donné.

Une façon d'introduire le contrôle dans les AC (voir [8, 9]) est de définir une fonction de transition f de la manière suivante :

$$f(e_t(v(c_i))) = f_1(e_t(v(c_i))) + \chi_{\omega_1} u_t$$

où ω_1 constitue le support ou la zone d'action du contrôle u_t .

Nous examinons dans cet exemple, le cas où ω est une région formée par l'ensemble des cellules $\{c_{4,4}, c_{4,5}, c_{4,6}, c_{5,4}, c_{5,5}, c_{5,6}, c_{6,4}, c_{6,5}, c_{6,6}\}$ et $\omega_1 = \{c_{3,3}, c_{3,4}, c_{4,3}, c_{4,4}\}$.

La règle f_1 sera de type totaliste qui calcule $e_{t+1}(c_{i,j})$ comme une somme modulo 3 des états de ses voisins $e_t(c_{i,j-1}) \oplus e_t(c_{i,j+1}) \oplus e_t(c_{i-1,j}) \oplus e_t(c_{i+1,j})$ et la configuration désirée est définie par $\forall c_{i,j} \in \omega \quad e_d(c_{i,j}) = 1$.

La résolution du problème s'appuie sur une méthode évolutive basée sur les techniques de programmation génétique. L'algorithme s'arrête lorsque l'on obtient un contrôle sous la forme :

$$u_t = e_t(c_{i+1,j}) + 1$$

En partant d'une configuration initiale donnée, l'évolution obtenue est donnée dans la figure 7.

Remarque 4.1. - *Même si une solution est obtenue, le problème d'unicité pour l'approche numérique considérée reste posé.*

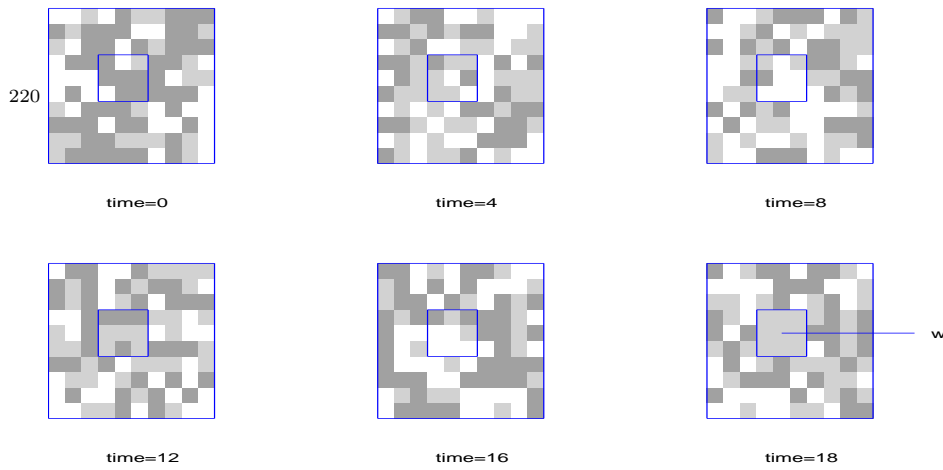


FIG. 7 – Evolution de l'AC contrôlé. L'état désiré est atteint sur la région $\omega = \{c_{i,j}, | 4 \leq i,j \leq 6\}$ au temps $T = 18$.

- Nous nous sommes limités dans cette étude à des horizons de temps T obtenus par le calcul alors que le problème classique de la contrôlabilité suppose que le temps est fixé au départ.
- Il reste à envisager le contrôle autrement et rechercher une solution théorique dans un cadre plus général.

Références

- [1] A.G. Butkovskii, A.I. Egorov, K.A. Luriev, Optimal control of distributed systems, *SIAM J. Cont.*, **6**(3), (1968).
- [2] B. Chopard, M. Droz, *Cellular automata modelling of physical systems*, Cambridge, Collection Alea-Sacley, Cambridge University Press, 1998.
- [3] A. El Jai, K. Kassara, Spreadable Distributed Systems, *Mathematical and Computer Modelling*, **20**(1), 47-64 (1994).
- [4] A. El Jai, K. Kassara, Spreadability of transport systems, *Int. Journal Sys. Sci.*, **27**(7), 681-688 (1996).
- [5] A. El Jai, A.J. Pritchard, *Sensors and controls in the analysis of distributed systems*, J. Wiley, Texts in Applied Mathematics Series, 1988.
- [6] A. El Jai, E. Zerrik, M.C. Simon, Regional observability and sensors structures, *Int. Journal of Sensors and Actuators*, **32**(2), 95-102 (1993).
- [7] S. El Yacoubi, A. El Jai, J. Karrakchou, Spreadability and spray actuators, *Applied Mathematics and Computer Science*, **8**(2), 367-379 (1998).
- [8] S. El Yacoubi, *Théorie des systèmes distribués: des EDP vers les automates cellulaires*, Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Perpignan, 1999.
- [9] S. El Yacoubi, A. El Jai, Cellular Automata and Spreadability, *Mathematical and Computer modelling*, à paraître.
- [10] S. El Yacoubi, A. El Jai, N. Ammor, Regional controllability with cellular automata models, *Lecture Notes in computer sciences*, LCNS 2493, Springer, 357-367 (2002).
- [11] R.J. Gaylord, K. Nishidate, *Modeling Nature. Cellular Automata Simulations with Mathematics*, New York, Springer, 1996.
- [12] J.L. Lions, **a-** *Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Paris, Dunod, 1968. **b-** Contrôlabilité exacte des systèmes distribués, *C.R.A.S.*, **302**(I)(13), 471-475 (1986).
- [13] D.L. Russell, Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations. Recent progress and open questions, *SIAM Rev.*, **20**, 639-739, (1978).
- [14] T. Toffoli, Cellular automata as an alternative to (rather than approximation of) differential equations in modeling physics, *Physica D*, **10**, 117-127 (1984).

- [15] R. Triggiani, Controllability and observability in Banach spaces with bounded operators, *SIAM J. Cont.*, **13**, 462-491 (1975).
- [16] D. Ucinski and S. El Yacoubi, Simulating cellular automata with Maple, *MapleTech*, **1**, 1-7 (1998).
- [17] S. Wolfram, *Cellular automata and complexity: collected papers*, Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- [18] E.H. Zerrik, *Analyse Régionale des Systèmes à Paramètres Distribués*, Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Rabat, Maroc, 1993.

(Samira El Yacoubi) LABORATOIRE DE THÉORIE DES SYSTÈMES
UNIVERSITÉ DE PERPIGNAN
AVENUE DE VILLENEUVE, 66860 PERPIGNAN, FRANCE
TEL/FAX: 33-468661760
E-mail address: yacoubi@univ-perp.fr

(Przemyslaw Jacewicz) LABORATOIRE DE THÉORIE DES SYSTÈMES
UNIVERSITÉ DE PERPIGNAN
AVENUE DE VILLENEUVE, 66860 PERPIGNAN, FRANCE
TEL/FAX: 33-468661760
E-mail address: jacewicz@univ-perp.fr

(Nezha Ammor) DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE
UNIVERSITÉ MOHAMMED V
RABAT, MAROC
E-mail address: nammor@yahoo.fr