Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser.
Volume 31, 2004, Pages 59–65
ISSN: 1223-6934

Die Barnette'sche Vermutung und die Grinberg'sche Formel

André Krooss

Zusammenfassung. Die Menge der Gebiete eines Graphen, der die Voraussetzungen der Barnette'schen Vermutung erfüllt, wird in zwei Teilmengen zerlegt, so dass die Grindberg'sche Formel bezüglich dieser Zerlegung erfüllt ist. Daraufhin werden einige Eigenschaften der gefundenen Zerlegung untersucht.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 05C38.
Key words and phrases. Barnette's Conjecture, Grinberg's Formula, Hamiltonian circuits.

Die Barnette'sche Vermutung, die 1969 zum ersten Mal veröffentlicht wurde, besagt, dass jeder kubische, 3-zusammenhängende, planare, bipartite Graph einen hamiltonschen Kreis enthält [1]. Ein Graph, der die Bedingungen der Barnette'schen Vermutung erfüllt,wird im Weiteren Barnette'sch genannt.

1968 hat E.J. Grinberg eine Formel aufgestellt, die für planare, hamiltonsche Graphen gilt [2]. Zerlegt man mit Hilfe des hamiltonschen Kreises die Menge der Gebiete eines planaren, hamiltonschen Graphen in zwei Teilmengen, dann gilt die Grinberg'sche Formel bezüglich dieser Zerlegung. Ein Graph, der eine Zerlegung der Menge aller seiner Gebiete bezüglich der die Grinberg'sche Formel gilt besitzt, habe die Eigenschaft $\mathcal{G}$. Die Eigenschaft $\mathcal{G}$ ist also eine notwendige Bedingung für die Hamiltonschheit eines Graphen.

Hier wird bewiesen, dass jeder Barnette'sche Graph die Eigenschaft $\mathcal{G}$ besitzt.

Sei $\tilde{F}$ eine Menge von Gebieten. Dann wird mit $\tilde{F}^{(i)}$ die Menge der i-Ecke von $\tilde{F}$ bezeichnet.

Definition 1. *Ein planarer Graph habe die Eigenschaft $\mathcal{G}$, wenn eine Zerlegung der Menge seiner Gebiete in zwei Teilmengen $\tilde{F}, \bar{F}$ existiert, so dass gilt:*

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}(i-2)(|\tilde{F}^{(i)}| - |\bar{F}^{(i)}|) = 0$$

Im Weiteren sei stets $\mathbf{G} = (V, E)$ Barnette'scher Graph und F die Menge der Gebiete von $\mathbf{G}$. Diese seien 3-gefärbt z.B. mit den Farben Rot, Grün, Blau. Seien F_r, F_g, F_b die entsprechenden Mengen der Gebiete einer Farbe. Es gelte $|F_r| \leq |F_b|$ und $|F_g| \leq |F_b|$.

Lemma 1. $\forall i \in \{r, g, b\} : \ |F_i| \geq 2$

Beweis: Aus der eulerschen Polyederformel folgt mit der Kubischheit von $\mathbf{G}$:

$$|F| = \frac{1}{2}|V| + 2 \tag{1}$$

Received: November 18, 2004.

Besitzt eine Farbe nur ein Gebiet, so gilt für die beiden anderen Farben $j, k \in \{r, g, b\}$ nach (1) und weil jedes Gebiet an mindestens vier Ecken angrenzt:

$$\sum_{f \in F_j} |V(f)| + \sum_{f \in F_k} |V(f)| \geq 4(\frac{1}{2}|V| + 1) = 2|V| + 4$$

Andererseits grenzt jede Ecke wegen des 3-Zusammenhangs von **G** an drei verschiedene Gebiete und somit wegen der Kubischheit an genau ein Gebiet jeder der drei Farben. Also:

$$\sum_{f \in F_j} |V(f)| + \sum_{f \in F_k} |V(f)| = 2|V|$$

□

Lemma 2. **G** *besitzt folgende Eigenschaften:*
(1) $2\big||F_r| - |F_g|\big| < |V| - 2|F_b|$
(2) $2(|F_r| - |F_g|) \equiv |V| - 2|F_b| (mod 4)$

Beweis: Da $|F| = |F_r| + |F_g| + |F_b|$ ist folgt mit (1):

$$|F_r| + |F_g| + |F_b| = \frac{1}{2}|V| + 2 \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow 2|F_r| + 2|F_g| = |V| + 4 - 2|F_b| \tag{3}$$

Zu *1.*: Da mindestens zwei Gebiete in F_g enthalten sind, gilt: $4|F_g| > 4$ und mit Formel (3):

$$2|F_r| - 2|F_g| < |V| - 2|F_b|$$

Analog gilt:

$$-2|F_r| + 2|F_g| < |V| - 2|F_b|$$

Und damit:

$$2\big||F_r| - |F_g|\big| < |V| - 2|F_b|$$

Zu *2.*: Aus Formel (3) erhält man:

$$2|F_r| + 2|F_g| \equiv |V| - 2|F_b| (mod 4)$$

Wegen $4|F_g| \equiv 0 (mod 4)$ gilt nun:

$$2|F_r| - 2|F_g| \equiv |V| - 2|F_b| (mod 4)$$

Und daraus folgt die Behauptung. □

Lemma 3. *Sei $f' \in F_b$. Dann gibt es mindestens*

$$\frac{|V(f')| - 2}{2}$$

4-Ecke in F_b.

Beweis: Sei $f' \in F_b$. Für $|V(f')| = 4$ gilt:

$$\frac{|V(f')| - 2}{2} = 1$$

also die Behauptung.

Sei nun $|V(f')| > 4$. Aus (2) folgt wegen $|F_r| \leq |F_b|$, $|F_g| \leq |F_b|$:

$$3|F_b| \geq \frac{1}{2}|V| + 2$$

$$\Leftrightarrow |V| \leq 6|F_b| - 4 \tag{4}$$

Da jede Ecke von **G** an genau ein Gebiet jeder Farbe angrenzt, gilt:

$$\sum_{f\in F_b} |V(f)| = |V|$$

und somit wegen (4) :

$$\sum_{f\in F_b} |V(f)| \le 6|F_b| - 4$$

$$\Leftrightarrow \sum_{f\in F_b} |V(f)| \le \Big(\sum_{f\in F_b} 6\Big) - 4$$

$$\Leftrightarrow \sum_{f\in F_b} \big(6 - |V(f)|\big) \ge 4$$

$$\Leftrightarrow \sum_{f\in F_b^{(4)}} \big(6-|V(f)|\big) + \underbrace{\sum_{f\in F_b\setminus F_b^{(4)}} \big(6-|V(f)|\big)}_{=:\Sigma} \ge 4$$

Jedes Gebiet $f \in (F_b \setminus F_b^{(4)})$ besitzt mindestens sechs Ecken. Also ist in der Summe Σ jeder Summand negativ oder null. Da $|V(f')| > 4$ ist, ist $f' \in (F_b \setminus F_b^{(4)})$. Damit gilt: $\Sigma \le 6 - |V(f')|$.

$$\Rightarrow \Big(\sum_{f\in F_b^{(4)}} 2\Big) + 6 - |V(f')| \ge 4$$

$$\Leftrightarrow 2|F_b^{(4)}| \ge |V(f')| - 2$$

$$\Leftrightarrow |F_b^{(4)}| \ge \frac{|V(f')| - 2}{2}$$

□

Lemma 4. *Für alle $k \in \mathbb{Z}$, die die Eigenschaften*
(1) $|k| \le |V| - 2|F_b|$
(2) $k \equiv |V| - 2|F_b| (mod 4)$
erfüllen, existiert eine Partitionierung von F_b in $\tilde{F}_k$ und $\bar{F}_k$ derart, dass:

$$k = \sum_{i\in\mathbb{N}} (i-2)(|\tilde{F}_k^{(i)}| - |\bar{F}_k^{(i)}|) \qquad (5)$$

Beweis: Sei $|V| - 2|F_b| =: p$. Dann sei $\tilde{F}_p := F_b$ und $\bar{F}_p := \emptyset$.
$\tilde{F}_{k-4}$ und $\bar{F}_{k-4}$ entstehen induktiv aus $\tilde{F}_k, \bar{F}_k$ auf folgende Weise:
(I): Wenn $\tilde{F}_k$ ein 4-Eck f enthält, setze:

$$\tilde{F}_{k-4} := \tilde{F}_k \setminus \{f\}, \quad \bar{F}_{k-4} := \bar{F}_k \cup \{f\}$$

(II): Wenn $\tilde{F}_k$ kein 4-Eck besitzt, dann sei $f_{max} \in \tilde{F}_k$ ein Gebiet mit maximaler Eckenzahl. Setze:

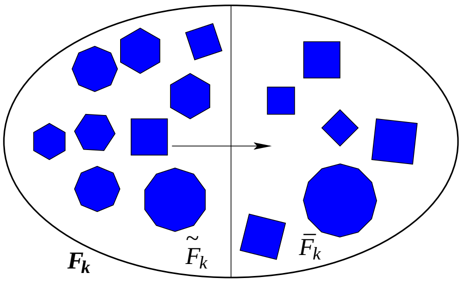
$$j := \frac{|V(f_{max})| - 4}{2}$$

Seien $f_1, ..., f_j$ 4-Ecke aus $\bar{F}_k$. Dann setze:

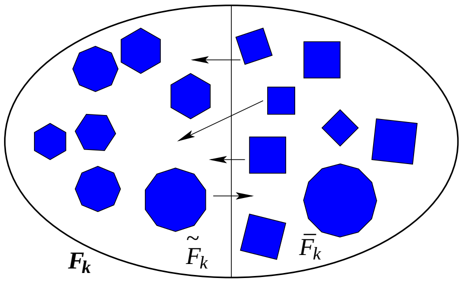
$$\tilde{F}_{k-4} := (\tilde{F}_k \setminus \{f_{max}\}) \cup \{f_1, ..., f_j\},$$

$$\bar{F}_{k-4} := (\bar{F}_k \setminus \{f_1, ..., f_j\}) \cup \{f_{max}\}$$

Wenn $\tilde{F}_{k-4} \ne \emptyset$, werde (I) oder (II) nun auf $\tilde{F}_{k-4}$ und $\bar{F}_{k-4}$ angewendet.



Fall (I)



Fall (II)

Zuerst ist zu zeigen, dass dieses Verfahren wohldefiniert ist:

Es gilt: $\tilde{F}_p \cup F_p = F_b \cup \emptyset = F_b$. Da in jedem Schritt genau die Elemente, die aus $\tilde{F}_k$ entfernt werden, zu $\bar{F}_{k-4}$ hinzugefügt werden und genau die Elemente, die aus $\bar{F}_k$ entfernt werden, zu $\tilde{F}_{k-4}$ hinzugefügt werden, gilt nach jedem Schritt wieder: $\tilde{F}_{k-4} \cup \bar{F}_{k-4} = F_b$.

Sei $\tilde{F}_k \neq \emptyset$. Dann existiert entweder ein 4-Eck in $\tilde{F}_k$, dann tritt Fall (I) ein, oder es existiert kein solches 4-Eck. Dann sind alle 4-Ecke von F_b in $\bar{F}_k$. Nach Lemma 3 existieren dann $\forall f \in F_b$ mindestens $\frac{|V(f)|-2}{2}$ 4-Ecke in $\bar{F}_k$. Also existieren insbesondere $\frac{|V(f_{max})|-4}{2}$ 4-Ecke in $\bar{F}_k$. Somit kann Fall (II) angewendet werden.

Da F_b endlich viele Gebiete besitzt und in Fall (I) immer ein Gebiet aus $\tilde{F}_k \subset F_b$ entfernt wird, kann Fall (I) nur endlich oft hintereinander auftreten. Dann gilt entweder $\tilde{F}_k = \emptyset$, oder Fall (II) tritt ein. Dabei wird ein Gebiet mit mehr als vier Ecken von $\tilde{F}_k$ entfernt. Da Gebiete mit mehr als vier Ecken weder im Fall (I) noch im Fall (II) zu $\tilde{F}_k$ hinzugefügt werden, kann Fall (II) nur endlich oft auftreten. Also endet das Verfahren nach endlich vielen Schritten.

Mit den auf diese Weise erhaltenen Zerlegungen wird nun das Lemma bewiesen. Zuerst wird induktiv gezeigt, dass $\tilde{F}_k$ und $\bar{F}_k$ die Gleichung (5) erfüllen:

Induktionsanfang:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i\in\mathbb{N}}(i-2)(|\tilde{F}_p^{(i)}| - |\bar{F}_p^{(i)}|)\\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}}(i-2)(|F_b^{(i)}| - |\emptyset^{(i)}|)\\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} i|F_b^{(i)}| - \sum_{i\in\mathbb{N}} 2|F_b^{(i)}|\\
&= \sum_{f\in F_b} |V(f)| - \sum_{f\in F_b} 2
\end{aligned}
$$

Und da jede Ecke von $\mathbf{G}$ an genau ein Gebiet jeder Farbe angrenzt:

$$= |V| - 2|F_b| = p$$

Induktionsschluss: Sei nun $(\tilde{F}_k, \bar{F}_k)$ eine durch das Verfahren gewonnene Zerlegung und $\tilde{F}_k \neq \emptyset$.

Fall (I):

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}(i-2)(|\tilde{F}_{k-4}^{(i)}| - |\bar{F}_{k-4}^{(i)}|)$$

$$= \sum_{i\in\mathbb{N}}(i-2)(|\tilde{F}_k^{(i)}| - |\bar{F}_k^{(i)}|) - (|V(f)|-2) - (|V(f)|-2)$$

Nach Induktionsvoraussetzung und wegen $|V(f)| = 4$:

$$= k - 4$$

Fall (II):

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}(i-2)(|\tilde{F}_{k-4}^{(i)}| - |\bar{F}_{k-4}^{(i)}|)$$

$$= \sum_{i\in\mathbb{N}}(i-2)(|\tilde{F}_k^{(i)}| - |\bar{F}_k^{(i)}|) - 2(|V(f_{max})|-2) + 2\sum_{f\in\{f_1,\dots,f_j\}}(|V(f)|-2)$$

Nach Induktionsvoraussetzung:

$$= k - 2(|V(f_{max})|-2) + 2\sum_{f\in\{f_1,\dots,f_j\}}(|V(f)|-2)$$

Da $j = \frac{|V(f_{max})|-4}{2}$ und somit $2(|V(f_{max})|-2) = 4j+4$ und da $|V(f)| = 4 \quad \forall f \in \{f_1, ..., f_j\}$:

$$= k - 4j - 4 + 2\sum_{f\in\{f_1,\dots,f_j\}} 2$$

$$= k - 4j - 4 + 4j = k - 4$$

Nun ist noch zu zeigen, dass für alle k, die die Bedingungen *1.* und *2.* erfüllen, ein Paar $(\tilde{F}_k, \bar{F}_k)$ existiert.

Seien $\tilde{F}_q$ und $\bar{F}_q$ die Mengen, mit der das Verfahren abbricht. Dann gilt:

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}(i-2)(|\tilde{F}_q^{(i)}| - |\bar{F}_q^{(i)}|)$$

$$= \sum_{i\in\mathbb{N}}(i-2)(|\emptyset^{(i)}| - |F_b^{(i)}|)$$

$$= -\sum_{i\in\mathbb{N}}(i-2)(|\tilde{F}_p^{(i)}| - |\bar{F}_p^{(i)}|) \;\; = \;\; -p$$

Also existiert nach Konstruktion für alle k mit $-p \leq k \leq p$ und $k \equiv p(mod4)$ ein Paar $(\tilde{F}_k, \bar{F}_k)$, das die Gleichung (5) erfüllt. □

Satz 1. *Sei* **G** *Barnette'scher Graph und F die Menge der Gebiete von* **G**. *Dann kann F so in zwei Teilmengen $\tilde{F}$ und $\bar{F}$ zerlegt werden, dass gilt:*

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}(i-2)(|\tilde{F}^{(i)}| - |\bar{F}^{(i)}|) = 0$$

Ist **G** *gebietsweise 3-gefärbt, können $\tilde{F}$ und $\bar{F}$ zusätzlich so gewählt werden, dass beide Mengen Gebiete genau zweier Farben enthalten.*

Insbesondere besitzt jeder Barnette'sche Graph die Eigenschaft $\mathcal{G}$.

Beweis: Es gilt:

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}(i-2)(|F_r^{(i)}| - |F_g^{(i)}|)$$

$$= \sum_{i\in\mathbb{N}}\big(i(|F_r^{(i)}| - |F_g^{(i)}|) - 2(|F_r^{(i)}| - |F_g^{(i)}|)\big)$$

$$= \sum_{i\in\mathbb{N}} i|F_r^{(i)}| - \sum_{i\in\mathbb{N}} i|F_g^{(i)}| - 2(|F_r| - |F_g|)$$

$$\sum_{f\in F_r} |V(f)| - \sum_{f\in F_g} |V(f)| - 2(|F_r| - |F_g|)$$

und da jede Ecke von **G** an genau ein Gebiet jeder Farbe angrenzt:

$$= |V| - |V| - 2(|F_r| - |F_g|) = -2(|F_r| - |F_g|) =: -k$$

Aus Lemma 2 und Lemma 4 folgt, dass für k eine Partitionierung von F_b in $\tilde{F}_k$ und $\bar{F}_k$ existiert, so dass:

$$k = \sum_{i\in\mathbb{N}} (i-2)(|\tilde{F}_k^{(i)}| - |\bar{F}_k^{(i)}|)$$

Also ist:

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \Big((i-2)(|F_r^{(i)}| - |F_g^{(i)}|) + (|\tilde{F}_k^{(i)}| - |\bar{F}_k^{(i)}|)\Big) = -k + k = 0$$

Somit gilt für $\tilde{F} = F_r \cup \tilde{F}_k$, $\bar{F} = F_g \cup \bar{F}_k$:

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} (i-2)(|\tilde{F}^{(i)}| - |\bar{F}^{(i)}|) = 0.$$

Da $F_r, F_g, \tilde{F}_k, \bar{F}_k$ nur Gebiete einer Farbe enthalten, enthalten $\tilde{F}$ und $\bar{F}$ Gebiete höchstens zweier Farben.

Angenommen, $\tilde{F}$ enthalte Gebiete nur einer Farbe. Dann ist $\tilde{F} = F_r$, $\bar{F} = F_g \cup F_b$ und es gilt:

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} (i-2)(|F_r^{(i)}| - |F_g^{(i)}| - |F_b^{(i)}|) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i\in\mathbb{N}} (i-2)(|F_r^{(i)}| - |F_g^{(i)}|) = \sum_{i\in\mathbb{N}} (i-2)|F_b^{(i)}| = |V| - 2|F_b|$$

Dies steht im Widerspruch zu Aussage *1* von Lemma 2. Also enthält $\tilde{F}$ und analog auch $\bar{F}$ Gebiete genau zweier Farben. □

Die Bedingung, dass die Farbe, deren Gebiete in Lemma 4 in zwei Mengen aufgeteilt werden, die meisten Gebiete besitzt, kann nicht vernachlässigt werden. Im Graphen von Abbildung 1 enthalten F_r und F_g jeweils vier Gebiete mit sechs Ecken und F_b enthält sechs Gebiete mit vier Ecken. Will man nun F_r partitionieren in $\tilde{F}_r$ und $\bar{F}_r$ derart, dass für $\tilde{F} := \tilde{F}_r \cup F_b$, $\bar{F} := \bar{F}_r \cup F_g$ gilt:

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} (i-2)(|\tilde{F}^{(i)}| - |\bar{F}^{(i)}|) = 0 \tag{6}$$

dann muss wegen

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} (i-2)(|F_b^{(i)}| - |F_g^{(i)}|) = 12 - 16 = -4$$

gelten:

$$\underbrace{\sum_{i\in\mathbb{N}} (i-2)(|\tilde{F}_r^{(i)}| - |\bar{F}_r^{(i)}|)}_{:=\Sigma} = 4$$

Da F_r nur 6-Ecke enthält und $|F_r| = 4$, folgt aber:

$$\Sigma = 4|\tilde{F}_r| - 4|\bar{F}_r| = 4k - 4(4-k),\ k \in \{0, ..., 4\}$$

Damit ist $\Sigma \in \{16, 8, 0, -8, -16\}$ und insbesondere $\Sigma \neq 4$.

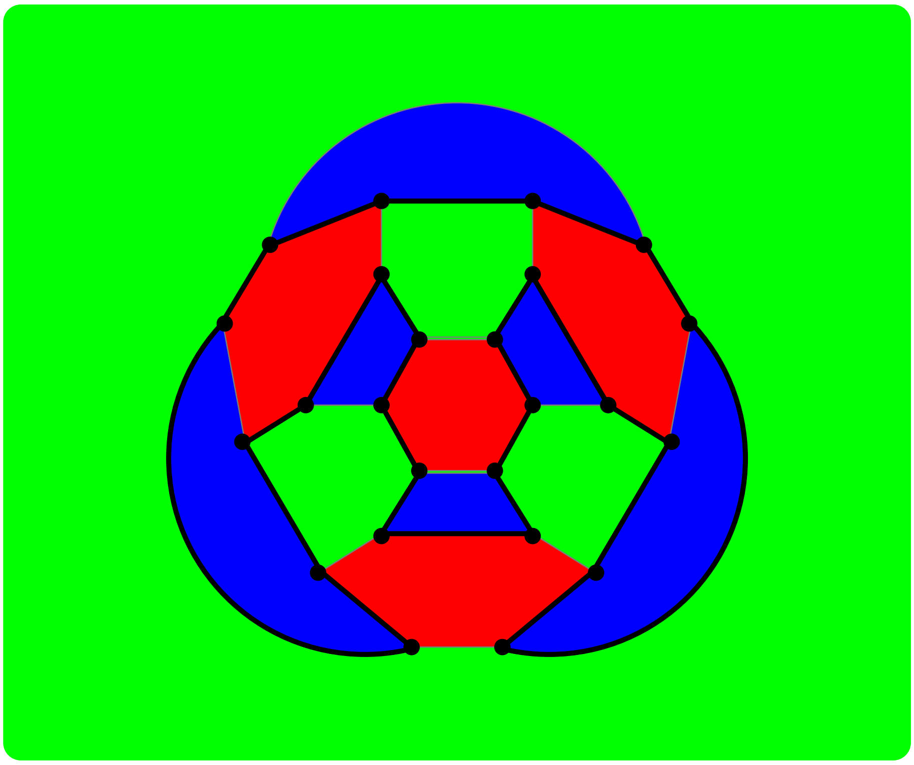


Abbildung 1

Der in Abbildung 1 eingezeichnete hamiltonsche Kreis zeigt, dass nicht jeder hamiltonsche Kreis in einem Barnette'schen Graphen Gebiete genau zweier Farben auf seinen beiden Seiten haben muss. Insbesondere existieren Zerlegungen $\{\tilde{F}, \bar{F}\}$ von F so, dass (6) erfüllt ist über die in Satz 1 charakterisierten Zerlegungen hinaus.

Literatur

[1] B. Grünbaum, Conjecture 5, *Recent Progress in Combinatorics*, New York, Academic Press, 343 (1969).

[2] E.J. Grinberg, Plane homogeneous graphs of degree three without hamiltonian circuits, *Lativan Math. Yearbook*, **4**, 51-58 (1968).

(André Krooß) Metzer Str. 45
44137 Dortmund
Germany
E-mail address: `unzugelassenes_login@gmx.de`