Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser.
Volume 31, 2004, Pages 66–73
ISSN: 1223-6934

Connexions projectives. Directiones modèrnes d'étude

Gheorghe Murărescu

Abstract. In this paper we give a short description of the main actual results concerning the theory of projective connections and new considerations are presented.

Classification AMS 2000 des sujets. 53C05, 53C10.
Mots clef et phrases. directiones modernes d'étude pour connexions projectives, le lien entre elles, connexions Finsler projective.

1. Introduction

La théorie des connexiones projectives s'est developée en même temps dans deux dirrections, suives toute-de-suite d'une troisième voie, que fait le lien entre les deux premiers.

La voie Weyl [20], Eisenhart [5], Veblen [18], T.Y. Thomas [16] est liée des transformations projectives des connexions linéaires. La voie E. Cartan [1] unifie l'idée de Klein concernant la notion de groupe des transformations géomètriques et la notion de parallèlisme, en attachant le long de chaque courbe d'une varieté différentiable les espaces projectives tangents; cette voie a conduit à la théorie des connexions sur les espaces fibrées de plus tard.

La troisième voie a été initiée par T.Y. Thomas, K. Yano [21] et continuée par I. Vaisman [17], S Ishihara et K. Yano [21] et l'auteur de ce travail [10], [11], [12], [13]; les connexions projectves s'étudient à l'aide des connexions linéaires specielles sur une varieté à une dimension de plus.

L'idée de Cartan a été fondamenté, du point de vue global, par Ch. Ehresmann [4] qui introduit la notion de connexion Cartan; cette idée a été continue par S. Kobayashi [7].

T. Hangan [6] étudie certains propriété généraux des connexions projectives en appliquant la méthode des congruences de G. Vrănceanu.

Concernant les géodesiques , E. Cartan [1] définit les seul connexions que dotent une varieté à géodésiques données.

En partant de ces résultats, dans [10] et puis dans thesse[11], nous définisons et étudions les connexions projectives généraux à l'aide des connexions Cartan définies sur les espaces fibrés projectives.

H. Wakakuwa [19] et récemment C. Segura et J. Etayo [14] étudient les connexions projectives sur l'espace fibré des répères projectives, en reprenant l'idée de I.C. Gasparini [2] . V. Cruceanu [3], en reprenant d'une manière moderne l'idée de E. Cartan, définit localement le transport projectif siuvant d'une courbe sur une variété différentable et introduit la connexion projective comme un objet géometrique (Γ_0, Γ, Γ^0) à l'aide des répères projectifs naturelles, où Γ_0 este un champ tensoriel de

Reçu: November 12, 2004.
Ce travail a été presenté au V-ème Congres des Mathématiciens Romains, Piteşti, juin, 2003

type $(1,1)$, Γ est un connexion linéaire et Γ^0- un champ tensoriel de type $(0,2)$; en particulier, on trouvent les connexions clasiques subordonnées.

En utilisant la méthode de l'academicien R. Miron [9], concernant la théorie des $d-$connexions sur les éspaces fibrés vectoriels et la troisième voie de la définition des connexions projectives, en colaboration avec P. Stavre, nous avons défini et etudi les connexions Finsler-projectives normaux [15].

Nous présentons brièvement (et chronologiqument) les études modèrnes (et recéntes) concernants les connexions projectives et aussi quelque nouveaux contributions.

2. L'étude des connexions projectives normales par S.Kobayashi et T. Nagano [8]

Entre les connexions linéaires Γ et $\overline{\Gamma}$ qui dotent une variété M à géodésique éxiste la bien connue relation locale:

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \delta^i_j a_k + \delta^i_k a_j, \tag{1}$$

(a_k)= un covector.

La connexion projective normale, définie par E. Cartan [1] a l'avantage d'étre unique par rapport aux courbes autoparalléles.

Définition 2.1. *La connexion Cartan ω donée localement par $(\omega^i, \omega^i_j, \omega_j)$, définit une connexion projective normale, si:*

$$(N_1)\Omega^i = 0;\ (N_2)\sum \Omega^i_i = 0;\ (N_3)\sum R^i_{jik} = 0,$$

où $\Omega = (\Omega^i, \Omega^i_j, \Omega_j)$ est la forme de courbure et (R^i_{jhk}) sont les coefficients de courbure.

On démontre l'existence de ces connexions, les identités de Bianchi; on définit un r-repère à l'aide d'un r-jet, puis l'ensemble $P^r(M)$ de r-répères on organise comme un fibré principal à groupe structural $G^r(n)$. Dans cette théorie intervient seulement $P^2(M)$ et $P^1(M) = L(M)$ à $G^1(n) = GL(n, \mathbf{R})$; il existe un isomorphisme entre $P^1(\mathbf{R}^n)$ et le group affine $A(n, \mathbf{R})$, consideré comme un fibré principal $A(\mathbf{R}^n, GL(n, \mathbf{R}))$ à

$$\mathbf{R}^n = A(M, \mathbf{R})/GL(n, \mathbf{R})$$

L'action du groupe $G^2(n)$ sur $P^2(M)$ est donnée par:

$$us = (u^i, u^i_j, u^i_{jk})(s^i_j, s^i_{jk}) = (u^i, u^i_p \cdot s^p_j, u^i_p \cdot s^p_{jk} + u^i_{qr} \cdot s^q_j s^r_k),$$

mais l'opération dans $G^2(n)$ est donnée par:

$$\overline{s}s = (\overline{s}^i_p \cdot s^p_{jk} + \overline{s}^i_{qr} \cdot s^q_j \cdot s^r_k)$$

On considère la sousgroupe $H^2(n) \subset G^2(n)$ formé par les éléments (s^i_j, s^i_{kj}) où $s^i_{kj} = -(s^i_j \cdot s_k + s^i_k \cdot s_j)$.

Il résulte que $H^2(n)$ est isomorphe avec le sousgroupe $H \subset PL(n, \mathbf{R})$- le groupe projectif, H étant le sousgroupe des transformations de la forme:

$$y^i = \frac{a^i_j x^j}{1 + a_j x^j}. \tag{2}$$

Définition 2.2. *On appele structure projective sur M, le sousfibré $P' \subset P^2(M)$ à groupe structurel $H^2(n)$, que s'identifie par isomorphisme à H.*

On peut définir une connexion linéaie sans torsion, comme une section $\Gamma : M \to P^2(M)/G^1(n)$, mais une section $M \to P^2(M)/H^2(n)$ est en correspondence bijective à la structure projective $P^{'}$, donc nous avons la diagrame:

$$\begin{array}{ccc} P^2(M)/G^1(n) & \longrightarrow & P^2(M)/H^2(n) \\ {}_{\Gamma}\nwarrow & & \nearrow_{P'} \\ & M & \end{array}$$

Donc, il résulte que deux connexions linéaires Γ et $\overline{\Gamma}$, sans torsions, sont en correspondence projective si elles appartiennent à la structure $P^{'}$. Dans componéntes localles résulte la rélation (1).

3. L'étude des connexions projectives réalisé par l'auteur [10],[11],[12],[13]

Soit $P(M,G)$ où $G = PL(n,R)$, qui, comme groupe de transformations, actionne sous la forme:

$$y^i = \frac{a^i + a^i_j x^j}{1 + a_j x^j} \tag{3}$$

Le sousgroup d'isotropie H du point $0(0,...,0) \in P^n$-l'espace projectif, a les equations localles $a^i = 0$ (donc les transformations du H sont de la forme (2)).

Il existe le sousfibré $P^{'}(M,H)$ et on réalise la "soudure" [7] d'espace fibré associé $E(M, PL(n,\mathbf{R}), P^n, P)$ avec la base M et aussi il existe une connexion Cartan sur $P^{'}$[7].

Définition 3.1. *On appele connexion projective une connexion Cartan ω définit sur $P^{'}$.*

Evidement, l'algèbre Lie du groupe $PL(M,\mathbf{R})$ est g=$pl(M,\mathbf{R})$=$\mathbf{R}^n + gl(n,\mathbf{R}) + \mathbf{R}^{*n}$ et les champs de vecteurs gauche-invariants sur $PL(n,\mathbf{R})$, que coincident dans l'élément identité à $(\partial/\partial a^i, \partial/\partial a^i_j, \partial/\partial a_j)$ détermine la base naturelle en $pl(n,\mathbf{R})$; la forme de la connexion projective ω est donnée dans cette base par $(\omega^i, \omega^i_j, \omega_j)$.

Un élément $u \in P^{'}$ a les coordonnées localles (x^i, a^i_j, a_j) et $R_b u = (x^i, a^i_k b^k_j, a_k b^k_j + b_j)$. En notant $s^*\omega$ par ω_U (s etant la section: $U \subseteq M \to P^{'}$), nous avons:

$$s^*\omega^i = \omega^i_{_U} = \Gamma^i_{jk;U} dx^k, s^*\omega^i_j = \omega^i_{j;U} = \Gamma^i_{jk;U} dx^k, s^*\omega_j = \omega_{j;U} = \Gamma^i_{jk;U} dx^k;$$

nous appelons les fonctions Γ_U, **coeficients de la connexion projective** ω.

Entre ω et ω_U, après la formule

$$\omega(X) = ad(a^{-1})\omega_U(\pi^{'} X) + a^{-1}da$$

nous avons:

$$\begin{array}{rcl} \omega^i & = & \overset{\sim i}{a}_k \,\omega^k_U, \omega^i_j = \overset{\sim i}{a}_k \,\omega^k_{h;U} a^h_j + \overset{\sim i}{a}_k \,\omega^k_U a_j + \delta^i_j \,\overset{\sim k}{a}_h \,\omega^h_U a_k + \overset{\sim i}{a}_k \, da^k_j, \\ \omega_j & = & \omega_{k;U} a^k_j - a_h \,\overset{\sim h}{a}_k \,\omega^k_{l;U} a^l_j - a_h \,\overset{\sim h}{a}_k \,\omega^k_U a_j - a_h \,\overset{\sim h}{a}_k \, da^k_j + da_j \end{array} \tag{4}$$

(nous notons a^{-1} par $\tilde{a}$).

En considérant les fonctions de transition $\Psi_{UV} : U \cap V \to H$ de la forme $\left\{a^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^j}(x), a_j(x)\right\}$, $x \in U \cap V$ on obtient les formules de transformation pour les coefficients Γ:

$$\begin{aligned}
\overline{\Gamma}^i_l &= \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}\Gamma^k_j \frac{\partial x^j}{\partial x^l}, \qquad (5)\\
\overline{\Gamma}^i_{jh} &= \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}\cdot\frac{\partial^2 x^k}{\partial \overline{x}^j \partial \overline{x}^h} + \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^k}\Gamma^k_{lp}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j}\cdot\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^h} + a_j \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}\Gamma^k_l \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^h} + \delta^i_j a_k \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^l}\Gamma^l_p \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^h},\\
\overline{\Gamma}_{jh} &= \Gamma_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^j}\cdot\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^h} - a_k \overline{\Gamma}^k_{jh} + a_j a_k \overline{\Gamma}^k_h + \frac{\partial a_j}{\partial \overline{x}^h}.
\end{aligned}$$

Dans les travaux [3],[12],[21], on considere le cas $a_k = 0$, mais on peut interpreter cette consideration dans les coordonnées homogènes comme la conservation du hyperplan "à l'infini" de l'equation $x^0 = 0$. D'après les rélations (5), on constate que dans ce cas particulier, la connexion projective ω est définie par un tenseur te type $(1,1)$, une connexion linéaire et un tenseur de type $(0,2)$.

Quand les cartes locales sur U et V coincident, $\{\overline{x}^i\} = \{x^i\}$, la seconde rélation (5) devient:

$$\overline{\Gamma}^i_{jh} = \Gamma^i_{jh} + a_j \Gamma^i_h + \delta^i_j a_k \Gamma^k_h, \qquad (6)$$

mais, pour les répères demi-naturelles (où $\omega^i_U = \omega^i_V = dx^i$, donc $\Gamma^i_j = \delta^i_j$) nous avons

$$\overline{\Gamma}^i_{jh} = \Gamma^i_{jh} + a_j \delta^i_h + a_h \delta^i_j, \qquad (7)$$

c'est -à-dire justement la rélation 1.

D'après les équations de structure d'une connexion Cartan générale s'obtient les équations de structure pour la connexion projective ω.

La **2-forme de courbure-torsion** $\Omega = (\Omega^i, \Omega^i_j, \Omega_j)$ s'exprime sous la forme:

$$\Omega^i = \frac{1}{2}R^i_{kl}\omega^k \wedge \omega^l,\ \Omega^i_j = \frac{1}{2}R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l,\ \Omega_j = \frac{1}{2}R_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l, \qquad (8)$$

en appelent $R = (R^i_{kl}, R^i_{jkl}, R_{jkl})$ la **fonction de courbure-torsion**. En notant $s^*\Omega = \Omega_U$ et $s^*R = R_U = (R^i_{kl;U}, R^i_{jkl;U}, R_{jkl;U})$, on obtient la généralization des formules comme dans les cas classique, par example:

$$\begin{aligned}
R^i_{kl;U} &= \Gamma^i_{kl;U} - \Gamma^i_{lk;U} \qquad (9)\\
R^i_{jkl;U} &= \partial_k \Gamma^i_{jl;U} - \partial_l \Gamma^i_{jk;U} + \Gamma^i_{sk;U}\cdot\Gamma^s_{jl;U} - \Gamma^i_{sl;U}\cdot\Gamma^s_{jk;U} + \delta^i_k \Gamma_{jl;U} \qquad (10)\\
&\quad -\delta^i_l \Gamma_{jk;U} + \delta^i_j(\Gamma_{lk;U} - \Gamma_{kl;U}).
\end{aligned}$$

4. Connexions projectives en sens Weyl-Thomas-Wakakuwa[17],[19]

Dans ce cas on considère l'espace tangent T_xM comme un espace affin $n-$dimensionel et $\mathbf{R}$, un espace affin 1-dimensionel, mais $T^{n+1}_x M = \mathbf{R}\times T_xM$, comme un espace affin $(n+1)$-dimmensionel. L'élément $u = (X_0, X_1, ..., X_n) \in T^{n+1}_x M$ on appele le repère en x. $L^{n+1}M$ ={l'ensemble des repères u} s'organise comme un espace fibré principal sur lequel actionne le groupe $GL(n+1, \mathbf{R})$:

$$ua = (X'_0, X'_1, ..., X'_n)$$

à $X'_\mu = a^\lambda_\mu X_\lambda$, $\alpha, \lambda, \mu = 0, 1, ..., n,\ ;i, j, k = 1, ..., n$.

En notant la base (vectorielle) de $T^{n+1}_x M$ par (e_0, e_j) à $e_0 = (e^*, 0)$ et $e_j = (0, \partial/\partial x^j)$, la représentation d'un repère est:

$$X_\mu = X^\lambda_\mu e_\lambda,\ X = (X^\lambda_\mu) \in GL(n+1, R),$$

de sorte que (x^i, X^λ_μ) est un système de coordonnée locaux en $\pi^{-1}(U)$.

Pour $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)$ nous avons:

$$x^{'i} = x^{'i}(x^1, ..., x^n), \ X^{'} = AX \quad \text{á} \quad A = (A^\lambda_\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial x^{'i}}{\partial x^j}\right) \end{pmatrix} \tag{11}$$

les relations qui résultent d'après:$e_j = \frac{\partial x^{'i}}{\partial x^j} e^{'}_i$, $e_0 = e^{'}_0$.

Les fonctions de transition sont: $\Psi_{UV} = X^{'} \cdot X^{-1} = A \in GL(n+1, R)$.

Sur l'ensemble des rèperes $\{u\}$ on introduit la relation d'équivalence $E: \quad u \sim \lambda u$, $\lambda \neq 0$ dans $T^{n+1}_x M \setminus \{0\}$.

Une classe d'équivalence, notée aussi par u, sera nommé **repère projectif** mais l'espace $L^{n+1}M/E$ sera nommé fibré des repères projectifs sur M à la groupe structural $PL(n, R) = GL(n+1, R)/E$. On appele **l'espace projectif l'espace tangent** en x à M l'espace $PT_x M = (T^{n+1}_x M - \{0\})/E$. La connexion linéaire $\overline{\omega}$ sur $L^{n+1}M$ est $gl(n+1, R)$-valuée et :

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}^\lambda_\mu E^\mu_\lambda, s^*\overline{\omega} = \omega_U = \omega^\lambda_{U;\mu} E^\mu_\lambda, \omega^\lambda_{U;\mu} = \gamma^\lambda_{i\mu} dx^i.$$

Pour $U \cap V \neq \emptyset$ il résulte:

$$\omega^\lambda_{V;\mu} = A^\lambda_\alpha \omega^\alpha_{V;\beta} A^{-\beta}_\mu + A^\lambda_\alpha \cdot d\overline{A}^\alpha_\mu, (A^{-\lambda}_\mu) = (A^\mu_\lambda)^{-1}, \tag{12}$$

$$\overline{\omega}^\lambda_\mu = \overline{X}^\lambda_\alpha \cdot \omega^\alpha_{\beta;U} X^\beta_\mu + \overline{X}^\lambda_\alpha \cdot dX^\alpha_\mu, \overline{X} = X^{-1}, \tag{13}$$

$$\overline{\omega} = X^{-1}\omega_U X + X^{-1} dX. \tag{14}$$

Si C est le centre d'algèbre Lie $gl(n+1, R)$, généré par la matrice unité d'ordre $(n+1)$, alors $\overline{\omega}$ (mod C) détérmine l'algèbre Lie du groupe projectif $PL(n, R)$; dans ce sence on dit que $\overline{\omega}$(mod C) **définit la connexion projective** Γ_p que est unique déterminée par $\omega^\alpha_{\beta;U} - \delta^\alpha_\beta \omega^0_{0;U}$ d'après [10].

On donne l'expression:

$$\omega^i_{0;U} = \Gamma^i_{j0} dx^i,$$
$$\omega^i_{j;U} - \delta^i_j \omega^0_{0;U} = \Gamma^i_{kj} dx^k$$

où

$$\Gamma^i_{j0} = \gamma^i_{j0}, \Gamma^0_{kj} = \gamma^0_{kj}.$$

Tout-de-suite on constate que (Γ^i_{j0}) est un tenseur de type $(1,1)$, (Γ^0_{kj})- un tenseur de type $(0,2)$ mais (Γ^i_{kj}) sont les coefficients locaux d'une connexion linéaire sur $L^n(M)$, nommée **basique** pour Γ_p. Pour $\omega^i_{0;U} = dx^i$, donc $\Gamma^i_{j0} = \delta^i_j$ on obtient la connexion projective canonique. Une transformation de base $(e_0, e_j) \to (e^{'}_0, e^{'}_j)$ sur $\pi^{-1}(U)$ qui conserve l'hyperplan de l'infini (donc conserve e_0), est de la forme:

$$e^{'}_0 = e_0, \ e^{'}_j = \varphi_j e_0 + e_j \tag{15}$$

où $\varphi_j = \varphi_j(x^1 ... x^n)$-covecteur.

Cette transformation implique la transformation des coordonnées:

$$X = (X^\lambda_\mu) \to X^{'} = (X^{'\lambda}_\mu), X = \Phi X^{'}, \Phi = \begin{pmatrix} 1 & \varphi \\ 0 & (1) \end{pmatrix}.$$

Dans le nouveau système des coordonnées $(x^i, X^{'\lambda}_\mu)$, généré par (15), sur $\pi^{-1}(U)$, la formule (14) dévient:

$$\overline{\omega} = (X^{'})^{-1}(\Phi^{-1}\omega_U \Phi + \Phi^{-1} d\Phi) X^{'} + (X^{'})^{-1} dX^{'} \tag{16}$$

d'où les forme localles ω_U et $\omega_U^{'} = \Phi^{-1}\omega_U\Phi + \Phi^{-1}d\Phi$ détérmine dans chaque voisinage de coordonnées de même connexion projective sur M.

En expression localle, on a:

$$\begin{aligned} \Gamma'^{i}_{kj} &= \Gamma^i_{kj} + \delta^i_j\varphi_k + \delta^i_k\varphi_j, \\ \Gamma'^{0}_{kj} &= \Gamma^0_{kj} + \partial\varphi_j/\partial x^k - -\Gamma^i_{kj}\varphi_i - \varphi_j\varphi_k. \end{aligned} \tag{17}$$

La première relation est de nouveau de type (1).

De suite, on défini une différentiation covariante, on déduit les equation des structures, la forme de la courbure et la connection projective normale unique détérminée par une classe des connexions linéaires- bazique, projective correspondantes (par une relation de type (1)).

5. Conexions Finsler-projectives [15]

Ces connexions ont été introduites par P.Stavre et l'auteur qui puis a étudie les structures Finsler projectives métriques et conformes. Pour étudie ces structures, nous avons utilisé la théorie moderne des fibré vectoriels $\zeta = (E, P, M)$, équipés avec une connexion nonlinéaire N et une $d-$connexion linéaire D sur E, la théorie fondée par l'academicien R. Miron [9].

Dans le cas de notre théorie, la fibre type est $F = \mathbf{R}$.

Nous notons par $\{X_\alpha\} = \left\{\delta/\delta x^i, \frac{\partial}{\partial y}\right\}$, $y = x^0$, $i, j, k = 1, ..., n$; α, β, $\gamma = 1, ..., n, 0$, la base adaptée et par $\{U_\alpha\} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ la base naturelle sur E; de même, nous notons par $\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}(x, y)$ les coefficients locaux dans $\{X_\alpha\}$ et par $\gamma^\sigma_{\alpha\beta}(x, y)$, coefficients locaux dans $\{U_\alpha\}$ pour la connexion D.

La connexion nonlinéaire N a les coefficients locaux N_α et nous avons le lien:

$$\frac{\delta}{\delta x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} - N_k\frac{\partial}{\partial y}.$$

Définition 5.1. *La connexion D s'appelle **quasi-projective normale (q-p-n)**, si les coefficients Γ satisfont les relations:*

$$\Gamma^0_{00} = w\Gamma^i_{i\alpha} \text{ où } w = -\frac{1}{n+1}. \tag{18}$$

Cette définition a un caractère géometrique si et seulement si les transformées locaux de coordonnées $(x, y) \longrightarrow (x', y')$ sont de la forme:

$$\begin{aligned} x^{i'} &= x^{i'}(x^1, ..., x^n), \qquad \Delta = \det\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right) \neq 0 \\ y' &= f(x^1, ..., x^n) \cdot y, \qquad f(x) = \Delta^{-W} \end{aligned}$$

S'imposent les conditions d'homogenitées pour y.

Nous définisons les coefficients de type Weyl:

$$\begin{aligned} J^i_{jk} &= \Gamma^i_{jk} + \left(\delta^i_j\partial N_k/\partial y + \delta^i_k\partial N_j/\partial y\right), \\ J^i_{jkh} &= \delta J^i_{jh}/\delta x^k - \delta J^i_{jk}/\delta x^h + J^r_{jh}J^i_{rk} - J^r_{jk}J^i_{rh}, \\ J_{jk} &= J^i_{jki} \end{aligned} \tag{19}$$

Entre les connexions (q-p-n) D et $\overline{D}$ nous définsons la transformation $t : D \to \overline{D}$ par $\overline{D}_X Y = D_X Y + \sigma(X) \cdot hY + \sigma(Y) \cdot hX$, où σ est un d-champs de type $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les coefficients J sont invariants par rapport aux transformations t.

Définition 5.2. *La classe* $\overset{*}{D} = \left\{ \cdots D, \overline{D} \cdots \right\}$ *des connexions (q-p-n), liées par les transformations t , s'appele* ***connexion Finsler-projective*** *(C-P-F), attachée à la connexion N .*

La connexion D^* est linéaire, symétrique mais n'est pas une d-connexion . Localement, la connexion $\overset{*}{D}$ est donnée par:

$$\begin{aligned} \Gamma^{*i}_{jk} &= \Gamma^i_{jk}, \Gamma^{*i}_{k0} = y^{-1}\delta^i_k, \Gamma^{*0}_{jk} = \Gamma^{8i}_{jk} \cdot N_i + (y/(n-1)) \cdot J_{jk} - \delta N_j/\delta x^k \\ \Gamma^{*i}_{00} &= 0, \Gamma^{*0}_{k0} = 0, \Gamma^{*0}_{00} = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

dans la base adaptée. Dans la base naturelle D^* est donnée par:

$$\gamma^{*i}_{jk} = J^i_{jk}, \gamma^{*i}_{k0} = y^{-1}\delta^i_k, \gamma^{*0}_{jk} = (y/(n-1)) \cdot J_{jk}, \gamma^{*i}_{00} = 0, \gamma^{*0}_{k0} = 0\,, \gamma^{*0}_{00} = 0, \tag{21}$$

Dans la base adaptée, la transformation t est donnée par:

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \sigma_j\delta^i_k + \sigma_k\delta^i_j, \overline{\Gamma}^i_{k0} = \Gamma^i_{k0}, \overline{\Gamma}^0_{jk} = \Gamma^0_{jk}, \overline{\Gamma}^i_{00} = \Gamma^i_{00}\,, \overline{\Gamma}^0_{0k} = \Gamma^0_{0k}, \overline{\Gamma}^0_{00} = \Gamma^0_{00}. \tag{22}$$

Observations.

a) Dans les formules (20) et (21) au surplus des coeffcients N_i, des constantes et $y \in \mathbf{R}$, de premier ordre entre les coefficients J, invariants aux transformation t, soulignant le caractère projectif de la connexion D^*.

b) La première formule (22) ressemble des formules (1) et (7) pour les connexions projectives classiques.

La classe, que définit la connexion D^*, contient les $d-$ connexions D de la forme:

$$D_X = D^0_X + \tau(\cdot, X), X \in \chi(E)$$

le champ tensoriel τ ayant les componnentes de la forme:

$$\tau^i_{jk} = \sigma_j\delta^i_k + \sigma_k\delta^i_j, \tau^i_{k0} = 0, \tau^0_{0k} = 0, \tau^0_{00} = 0....... \tag{23}$$

La courbure R^* de la connexion D^* s'exprime seulement par les coefficient Finsler-projectifs J:

$$\begin{aligned} R^{*i}_{jkh} &= J^i_{jkh} - \frac{1}{n-1}(\delta^i_k J_{jh} - \delta^i_h J_{jk}), R^{*i}_{jk0} = \frac{\partial J^i_{jk}}{\partial y}, \\ R^{*0}_{jkh} &= R^{*i}_{jkh} \cdot N_i + \frac{y}{n-1}\left(\frac{\partial J_{jk}}{\partial x^h} - \frac{\partial J_{jh}}{\partial x^k} + J^r_{jh} \cdot J_{rk}\right), R^{*\sigma}_{\alpha\beta\gamma} = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

(pour les restes).

Les relations (24), de nouveau soulignent le caractère projectif de la connexion D^*.

Nous étudions, pour les connexions D^*: l'algèbre Lie du groupe d'holonomie, les courbes autoparalléles, des structures finsler-projective mètriques et conformes.

References

[1] E. Cartan, *Leçon sur la théorie des espaces à connexion projective*, Paris, 1937.

[2] I. Cattaneo-Gasparini, Suelle connessioni proiective, *Ann. di Mat. pura ed appl.*, **50**, 467-473 (1960).

[3] V. Cruceanu, Structures et conexions classiques sur une variété differéntiable, *An. St. Univ. "A.I. Cuza"*, **XXII**, 181-190 (1976).
[4] Ch. Ehresmann, Les conexions infinitésimales dans un espace fibré differeéntiable, *Coll. Top. Bruxelles*, 29-55 (1950).
[5] L.P. Eisenhart, *Non-Riemannian Geometry*, Amer. Math. Soc., 1927.
[6] T. Hangan, Sur les connexions projectives, *Rev. Math. pures et Appl.*, **3**, 256-276 (1958).
[7] S. Kobayashi, Theory of connections, *Ann. Math. Pura ed Appl.*, **113**, 119-194 (1957).
[8] S. Kobayashi, T. Nagano, On projective connexions, *J. Math-Mec*, **13**, 215-235 (1964).
[9] R. Miron, M. Anastasiei, *Fibrate vectoriale, spaţii Lagrange. Aplicaţii în teoria relativităţii*, Ed. Acad. Rom., 1987.
[10] G. Murărescu, Sur la théorie globale des connexions projectives, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **269**, 141-143 (1969).
[11] G. Murărescu, *Contribuţii la studiul geometriei diferenţiabile a spaţiilor fibrate cu grup structural proiectiv*, Teză Iaşi, 1969.
[12] G. Murărescu, Sur les connections projectives. Lien entre certains points de vue dans leur étude, *Mathematica, Cluj*, **37**, 147-153 (1985).
[13] G. Murărescu, *Fibrate proiective în geometria diferenţială, Teoria conexiunilor proiective*, Craiova, Ed. INFO, 2002.
[14] C. Segura, J. Etayo, Conecciónes en el fibrado de las fererencias proyectivas, *Mat. Contrib., Ed. Univ. Compl. Madrid*, 83-90 (1986).
[15] P. Stavre, G. Murărescu, Connexions Finsler-projectives normales, *Bull. Math. Soc. Sci. Rom.*, **37**(1-2), 133-147 (1993).
[16] T.Y. Thomas, On the projective and equiprojective geometry of paths, *Proc. Nat. Acad.*, **11**, 199-2003 (1925).
[17] I. Vaisman, *Contributions à la géométrie différentielle projective-symplectique*, An. St. Univ. "A. I. Cuza", Monografii, 1966.
[18] O. Veblen, Projective tensors and connections, *Proc. Nat. Acad.*, **14**, 154-156 (1928).
[19] H. Wakakuwa, Holonomy group, *Publ of the St. Group of Geom.*, **6**, (1971).
[20] H. Weyl, On the foundations of general infinitesimal geometry, *Bull Amer. Math. Soc.*, **35**, 716-725 (1929).
[21] K. Yano, S. Ishihara, Differential geometry of fibred spaces, *Kodai Math. Sem. Rep.*, **19**, 257-288 (1967).

(Gheorghe Murărescu) Department of Mathematics, University of Craiova,
Al. I. Cuza street, 13, Craiova RO-200585, Romania, Tel/Fax: 40-251412673
E-mail address: `muraresc@inf.ucv.ro`