Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser.
Volume 31, 2004, Pages 94–101
ISSN: 1223-6934

Quelques classes des variétés métriques à 3-structures presque de contact

T. Tshikuna-Matamba

Résumé. The purpose of this paper is to show that the method of Oubiña, serves to define some classes of almost contact metric manifolds with 3-structure.

This method applies uniquely in the field of cosymplectic and Sasakian structures. In the case of Kenmotsu manifolds, one has to use the warped product.

Classification AMS 2000 des sujets. 53C15, 53C26.
Mots clef et phrases. variétés métriques presque de contact, variétés métriques à 3-structures presque de contact, variétés hyperkählériennes.

1. Introduction

Dans [G-H], A Gray et L.M. Hervella ont défini 16 classes de structures presque hermitiennes. Utilisant $\tilde{M}= M^{2m+1} \times \mathbb{R}$ le produit d'une variété métrique presque de contact par la droite réelle, J. A. Oubiña [Ou1, Ou2] a montré que $\tilde{M}$ peut être munie de deux structures presque hermitiennes conformément difféomorphes. En faisant parcourir ces structures dans la classification de Gray et Hervella, Oubiña a pu définir quelques classes remarquables des structures métriques presque de contact en géométrie cosymplectique et en géométrie sasakienne [Ou2].

Par ailleurs, la notion du produit déformé $\bar{M} = \mathbb{R} \times_f M'$ de la droite réelle par une variété kählérienne a permis à K. Kenmotsu [Ke] de définir une classe des variétés métriques presque de contact qui ne se situent ni dans le type cosymplectique ni dans le type sasakien. Reprenant la métrique de Kenmotsu et promenant la variété M' dans la classification de Gray et Hervella, nous avons pu dégager, dans [TM], quelques classes remarquables des structures métriques presque de contact apparentées à celle de Kenmotsu.

Le but de cette note est de montrer que ces deux méthodes s'appliquent au cas des variétés métriques à trois structures presque de contact. Il suffit de considérer, pour le premier cas, $\tilde{M} = M^{4m+3} \times \mathbb{R}$, le produit d'une variété à trois structures presque de contact par la droite réelle; ce produit est une variété presque hyperhermitienne qui jouera le même rôle que la variété presque hermitienne. Pour le deuxième cas, nous définissons le produit déformé de $\mathbb{R}^3$ par une variété presque hyperhermitienne et procédons comme dans [TM].

Reçu: July 20, 2004.

Ce papier est subdivisé de la manière suivante:

La deuxième section est consacrée aux préliminaires sur les variétés. Nous y rappelons les notions fondamentales qui interviendront dans les différentes classes.

A la troisième section nous montrons comment la méthode de Oubiña est utilisée. Nous généralisons au cas des structures presque hyperhermitiennes, le lemme de Oubiña [Ou1].

La quatrième section concerne la méthode du produit déformé. Le théorème 4.2 permet de définir quelques classes remarquables des variétés à 3-structures dans la géométrie de Kenmotsu.

La dernière section donne quelques exemples des variétés métriques à 3-structures presque de contact.

2. Préliminaires sur les variétés

Soit M une variété différentiable de dimension impaire $2m+1$.On appelle structure presque de contact sur M, la donnée d'un triplet (ϕ,ξ,η) tel que
ξ est un champ de vecteurs caractéristique;
η est une 1-forme différentielle sur M telle que $\eta(\xi)$=1;
ϕ est un champ de tenseurs de type (1,1) vérifiant la condition $\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi$.

Lorsqu'il existe un tenseur métrique g sur M tel que $g(\phi X,\phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$,on dit que g est une métrique compatible avec la structure presque de contact; dans ce cas, le quadruplet (g,ϕ,ξ,η) est une structure métrique presque de contact et (M,g,ϕ,ξ,η) est appelée variété métrique presque de contact. Nous noterons par ∇ la connexion riemannienne attachée à g.

Eu égard au tenseur de courbure sectionnelle d'un 2-plan contenant le champ de vecteurs ξ, on distingue trois types des variétés métriques presque de contact qui sont:
(a) variété *sasakienne* si $(\nabla_X\phi)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X$;
(b) variété *cosymplectique* si $(\nabla_X\phi)Y = 0$;
(c) variété de *Kenmotsu* si $(\nabla_X\phi)Y = g(\phi X,Y)\xi - \eta(Y)\phi X$.

Soit (M,g) une variété riemannienne de dimension impaire $4m+3$. Une 3-structure métrique presque de contact sur M est la donnée d'un triplet $(\phi_i,\xi_i,\eta_i)_{i=1,2,3}$ des structures presque de contact, chacune étant compatible avec la structure riemannienne g et vérifiant les conditions suivantes:
(2.1) $\eta_j(\xi_i) = 0, i \neq j$;
(2.2) $\phi_i(\xi_j) = -\phi_j(\xi_i) = \xi_k$, pour $i \neq k$, $i < j$ et $j \neq k$;
(2.3) $\eta_i(\phi_j X) = -\eta_j(\phi_i X) = \eta_k(X)$;
(2.4) $\phi_i(\phi_j X) - \eta_j(X)\xi_i = -\ \phi_j(\phi_i X) + \eta_i(X)\xi_j = \phi_k X$;
(2.5) $g(\xi_i,\xi_j) = 0$, pour $i \neq j$.

On notera une variété métrique à trois structures presque de contact par $(M,g,(\phi_i,\xi_i,\eta_i)_{i=1}^3)$.

Lorsque parmi les trois structures (ϕ_i,ξ_i,η_i), deux seulement appartiennent à une classe $\mathcal{P}$, on dit que $(M,g,(\phi_i,\xi_i,\eta_i)_{i=1}^3)$ est dans cette classe. En d'autres termes, une variété métrique à 3-structures sasakiennes signifie que parmi les $(\phi_i,\xi_i,\eta_i)_{i=1,2,3}$, deux structures au moins sont sasakiennes [Ku].

On appelle structure presque hypercomplexe la donnée d'un triplet (J_1,J_2,J_3) des structures presque complexes se comportant comme des quaternions en vérifiant les conditions:
(2.6) $J_i^2 X = -X$;
(2.7) $J_1J_2 = J_3 = -J_2J_1$.

Lorsqu'il existe un tenseur métrique g tel, que pour chaque J_i,(g,J_i) est kählérienne, on dit que $(g,(J_i)_{i=1}^3)$ est une structure hyperkählérienne [Hi]. Pour tout J_i, le tenseur de Nijenhuis, noté N_{J_i}, est un tenseur de type (1,2) défini par
$N_{J_i}(X,Y) = [X,Y] + J_i[J_iX,Y] + J_i[X,J_iY] - [J_iX,J_iY]$.
Dire que (g,J_i) est kählérienne signifie que N_{J_i} est intégrable, c'est-à-dire que $N_{J_i}(X,Y) = 0$.

Comme dans le cas des variétés à 3-structures sasakiennes, pour être hyperkählérienne, il suffit que, parmi les $(g,J_i)_{i=1}^3)$, deux de ces structures le soient [Cal]. On sait que, pour tout i, on définit une 2-forme fondamentale (forme de Kähler), Ω_i en posant $\Omega_i(X,Y) = g(X,J_iY)$. En vue de généraliser une portion de la géométrie kählérienne, A. Gray et L.M. Hervella [G-H] ont défini seize classes des variétés presque hermitiennes. Parmi ces classes, certaines ne sont pas définies par des structures intégrables. C'est le cas des variétés presque kählériennes ou quasi kählériennes par exemple.

A l'instar des variétés presque hermitiennes, nous convenons de parler des variétés presque hyperhermitiennes et adoptons la terminologie suivante.Si deux structures (g,J_i) sont dans l'une des classes définies par Gray et Hervella, nous dirons que $(g,(J_i)_{i=1}^3)$ est dans cette classe. Ceci nous permet de contourner la difficulté rencontrée par D.V. Alekseevsky et S. Marchiafava [A-M1] pour définir les variétés quasi hyperkählériennes.

Rappelons quelques définitions.

On dit qu'une variété presque hyperhermitienne est:

(a) *hyperkählérienne* si $\nabla J_i = 0$;
(b) *presque hyperkählérienne* si $d\Omega_i = 0$:
(c) *nearly hyperkählérienne* si $(\nabla_X J_i)X = 0$;
(d) *quasi hyperkählérienne* si $(\nabla_X \Omega_i)(Y,Z) + (\nabla_{J_iX}\Omega_i)(J_iY,Z) = 0$.

Notons qu'on définit une 4-forme différentielle globale,Ω, par
$\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_1 + \Omega_2 \wedge \Omega_2 + \Omega_3 \wedge \Omega_3$; Lorsque $(\nabla\Omega) = 0$, on dit que (g,J_i) est hyperkählérienne. Pour d'autres classes, le recours à la 4-forme Ω n'est pas toujours facile; c'est pour cela qu'on se rabat sur les 2-formes différentielles Ω_i. Pour une étude un peu plus approfondie des structures presque hypercomplexes, on peut consulter [A-M2] .

3. Méthode de Oubiña

Soit $(M^{4m+3},g,(\phi_i,\xi_i,\eta_i)_{i=1}^3)$ une variété métrique à 3-structures presque de contact, au sens de Kuo [Ku]. Le produit $\tilde{M} = M^{4m+3} \times \mathbb{R}$ est une variété de dimension 4m+4 = 4(m+1) qui est multiple de 4 et que nous convenons de noter par 4n. Notons par $(X,r.d/dt)$ un élément de $\chi(\tilde{M})$ lorsque $X \in \chi(M)$, t est une variable réelle tandis que r est une fonction sur $M^{4m+3} \times \mathbb{R}$.Posons
(3.1) $\tilde{J}_i(X,r.d/dt) = (\phi_i X - r\xi_i,\eta_i(X)d/dt)$,
et définissons une métrique $\tilde{g}$ sur $\tilde{M}^{4n}$ en posant
(3.2) $\tilde{g}((X,r_1 d/dt),(Y,r_2 d/dt)) = g(X,Y) + r_1 r_2$.

Comme l'a fait Oubiña dans [Ou1] et [Ou2], on peut définir une métrique conforme $\tilde{g}^0$ sur $\tilde{M}^{4n}$ par
(3.3) $\tilde{g}^0 = e^{2s}\tilde{g}$,
où s est une fonction de $\tilde{M}^{4n}$ telle que $s(x,t) = t$ pour $(x,t) \in M^{4m+3} \times \mathbb{R}$.

Lemme 3.1. *Pour $i = 1,2,3$, les conditions suivantes sont équivalentes.*
(a) g est une métrique compatible avec chaque structure (ϕ_i,ξ_i,η_i);
(b) $\tilde{g}$ est une métrique hyperhermitienne sur$(\tilde{M}^{4n},(\tilde{J}_i)_{i=1}^3)$;
(c) $\tilde{g}^0$ est une métrique hyperhermitienne sur $(\tilde{M}^{4n},(\tilde{J}_i)_{i=1}^3)$.

Démonstration. Montrons que (a) implique (b). On sait que $(\tilde{J}_i(X,r.d/dt) = (\phi_i X - r\xi_i,\eta_i(X)d/dt))$. Donc $\tilde{g}(\tilde{J}_i(X,r_1 d/dt),\tilde{J}_i(Y,r_2 d/dt)) = \tilde{g}((\phi_i X - r_1\xi_i,\eta_i(X)d/dt),(\phi_i Y - r_2\xi_i,\eta_i(Y)d/dt)) =$
$g(\phi_i X - r_1\xi_i,\phi_i Y - r_2\xi_i) + \eta_i(X)\eta_i(Y)$.
Comme $g(\phi_i X - r_1\xi_i,\phi_i Y - r_2\xi_i) = g(\phi_i X - r_1\xi_i,\phi_i Y) + g(\phi_i X - r_1\xi_i, - r_2\xi_i) = g(\phi_i X,\phi_i Y) + g(-r_1\xi_i,\phi_i Y) + g(\phi_i X,-r_2\xi_i) + g(-r_1\xi_i,-r_2\xi_i = g(X,Y) - \eta_i(X)\eta_i(Y) + r_1 r_2$ car $g(-r_1\xi_i,\phi_i Y) = 0 = g(\phi_i X, - r_2\xi_i)$, alors
$\tilde{g}(\tilde{J}_i(X,r_1 d/dt),\tilde{J}_i(Y,r_2 d/dt)) = g(X,Y) + r_1 r_2 = \tilde{g}((X,r_1 d/dt),(Y,r_2 d/dt))$; ce qui prouve que $\tilde{g}$ est une métrique hyperhermitienne sur $(\tilde{M}^{4n},\tilde{J}_i)$.

Pour montrer que (b) implique (c), on procède par calcul direct.
$\tilde{g}^0(\tilde{J}_i(X,r_1 d/dt),\tilde{J}_i(Y,r_2 d/dt)) = e^{2s}\tilde{g}(\tilde{J}_i(X,r_1 d/dt,\tilde{J}_i(Y,r_2 d/dt)) =$
$e^{2s}\tilde{g}(X,Y) = \tilde{g}^0(X,Y)$.

Considérons le cas où (c) implique (a). On suppose que
$\tilde{g}^0(\tilde{J}_i(X,r_1 d/dt,\tilde{J}_i(Y,r_2 d/dt)) = \tilde{g}^0((X,r_1 d/dt),(Y,r_2 d/dt))$ et on veut montrer que $g(\phi_i X,\phi_i Y) = g(X,Y) - \eta_i(X)\eta_i(Y)$. Par calcul on a
$\tilde{g}^0(\tilde{J}_i(X,r_1 d/dt),\tilde{J}_i(Y,r_2 d/dt)) = e^{2s}(g(\phi_i X,\phi_i Y) + \eta_i(X)\eta_i(Y))$ et
$\tilde{g}^0((X,r_1 d/dt),(Y,r_2 d/dt)) = e^{2s}g(X,Y)$; ce qui permet de tirer $g(\phi_i X,\phi_i Y) + \eta_i(X)\eta_i(Y) = g(X,Y)$ et ceci achève la preuve. □

Par ce lemme, $(\tilde{M}^{4n},\tilde{g},\tilde{J}_i)$ et $(\tilde{M}^{4n},\tilde{g}^0,\tilde{J}_i)$ sont des variétés hyperhermitiennes difféomorphes. Pour chaque i, on peut établir plusieurs identités parmi lesquelles:
(3.4) $(\tilde{\nabla}_{(X,r_1 d/dt)}\tilde{J}_i)(Y,r_2 d/dt) = ((\nabla_X\phi_i)Y - r_2\nabla_X\phi_i,(\nabla_X\eta_i)Y d/dt)$;
(3.5) $(\tilde{\nabla}^0_{(X,r_1 d/dt)}\tilde{J}_i)(Y,r_2 d/dt) = ((\nabla_X\phi_i)Y + \eta_i(Y)X - g(X,Y\xi_i - r_2(\phi_i X + \nabla_X\xi_i) + (-\Phi_i(X,Y) + (\nabla_X\eta_i)Y)d/dt)$.

Les formes fondamentales sont obtenues par
(3.6) $\tilde{\Omega}_i((X,r_1d/dt),(Y,r_2d/dt)) = \Phi_i(X,Y) + r_1\eta_i(Y) - r_2\eta_i(X)$
(3.7) $\tilde{\Omega}_i^0((X,r_1d/dt),(Y,r_2d/dt)) = e^{2s}(\Phi_i(X,Y) + r_1\eta_i(Y) - r_2\eta_i(X))$.

Proposition 3.1. *Une 3-structure métrique presque de contact $(g,(\phi_i,\xi_i,\eta_i)_{i=1}^3)$ est 3-cosymplectique,3-quasi-K-cosymplectique ou 3-nearly cosymplectique si, et seulement si, $(\tilde{M}^{4n},\tilde{g},(\tilde{J}_i)_{i=1}^3)$ est hyperkählérienne, quasi hyperkählérienne ou nearly hyperkählérienne respectivement.*

Démonstration. Supposons que $(g,(\phi_i,\xi_i,\eta_i)_{i=1}^3)$ soit une structure 3-cosymplectique. Cela signifie que $(\nabla_X\phi_i)Y = 0$. On sait que $(\nabla_X\eta_i)Y = g(\nabla_X\xi_i,Y)$.
Comme $\nabla_X\xi_i = 0$, alors $(\nabla_X\eta_i)Y = 0$ et dans ce cas, en utilisant (3.4), on a $(\tilde{\nabla}_{(X,r_1d/dt)}(Y,r_2d/dt) = 0$ dont on déduit $\tilde{\nabla}\tilde{J}_i = 0$.
Ce qui définit une structure hyperkählérienne.

Réciproquement, si $(\tilde{M}^{4n},\tilde{g},(\tilde{J}_i)_{i=1}^3)$ est hyperkählérienne, alors (3.3) conduit à $(\nabla_X\phi_i)Y - r_2\nabla_X\xi_i = 0$, et $(\nabla_X\eta_i)Y = 0$.
Mais $(\nabla_X\eta_i)Y = g(\nabla_X\xi_i,Y)$. Donc $g(\nabla_X\xi_i,Y) = 0$; ceci étant valable pour tout Y, on en déduit que $\nabla_X\xi_i = 0$ ce qui conduit à $(\nabla_X\phi_i)Y = 0$ qui définit une structure 3-cosymplectique.

□

Les autres cas sont établis de manière analogue.

Proposition 3.2. *Une 3-structure métrique presque de contact $(g,(\phi_i,\xi_i,\eta_i)_{i=1}^3)$, est 3-sasakienne, 3-quasi-K-sasakienne si, et seulement si, $(\tilde{M}^{4n},\tilde{g}^0,(\tilde{J}_i)_{i=1}^3)$, est hyperkählérienne, quasi hyperkählérienne ou presque hyperkählérienne respectivement.*

Démonstration. Comme à la propossition qui précède, si $(M^{4m+3},g,(\phi_i,\xi_i,\eta_i)_{i=1}^3)$ est une variété 3-sasakienne, alors pour tout i=1,2,3, on a $(\nabla_X\phi_i)Y = g(X,Y)\xi_i - \eta_i(Y)X$, qui donne $(\nabla_X\phi_i)Y - g(X,Y)\xi_i + \eta_i(Y)X = 0$; cette dernière relation, combinée au fait que $\phi_iX+\nabla_X\xi_i = 0$, (3.5) donne $(\tilde{\nabla}^0_{(X,r_1d/dt)}\tilde{J}_i)(Y,r_2d/dt) = 0$ et ceci montre que la variété $(\tilde{M}^{4n},\tilde{g}^0,(\tilde{J}_i)_{i=1}^3)$ est hyperkählérienne.

Réciproquement, si $(\tilde{M}^{4n},\tilde{g}^0,(\tilde{J}_i)_{i=1}^3)$ est hyperkählérienne, alors $(\tilde{\nabla}^0_{(X,r_1d/dt)}\tilde{J}_i)(Y,r_2d/dt) = 0$. Dans ce cas, (3.5) donne
(3.8) $(\nabla_X\phi_i)Y + \eta_i(Y)X - g(X,Y)\xi_i - r_2(\phi_iX + \nabla_X\xi_i) = 0$, et
(3.9) $-\Phi_i(X,Y) + (\nabla_X\eta_i)Y = 0$.

Examinons d'abord (3.9). Etant donné que $\Phi_i(X,Y) = g(X,\phi_iY)$, la relation (3.9) donne $(\nabla_X\eta_i)Y = g(X,\phi_iY)$ et comme $(\nabla_X\eta_i)Y = g(\nabla_X\xi_i,Y)$ alors

$$g(X,\phi_iY) = g(\nabla_X\xi_i,Y)$$

dont on déduit $g(\nabla_X\xi_i,Y) + g(\phi_iX,Y) = 0$ ou encore
(3.10) $g(\phi_iX + \nabla_X\xi_i,Y) = 0$.
La relation (3.10) étant vraie pour tout Y, alors $\phi_iX + \nabla_X\xi_i = 0$ et ceci fait que la relation (3.8) devient $(\nabla_X\phi_i)Y = g(X,Y)\xi_i - \eta_i(Y)X$; ce qui définit une structure

3-sasakienne.

De manière analogue, on établit les autres cas.

□

4. Méthode du Produit Déformé

Soit$(M'^{4n'},g',(J'_i)_{i=1}^3)$ une variété presque hyperhermitienne, $(\mathbb{R}^3,I_3,(\phi_i,\xi_i,\eta_i)_{i=1}^3)$ une variété métrique à 3-structures presque de contact et f une fonction positive, différentiable sur $\mathbb{R}^3$, telle que $f(t_1,t_2,t_3) = ce^{t_1t_2t_3}$ où c est une constante strictement positive. En posant $(t_1,t_2,t_3) = t$; nous noterons $f(t)$ au lieu de $f(t_1,t_2,t_3)$ et par la suite nous omettrons t.

Notons par $\bar{M} = \mathbb{R}^3 \times_f M'^{4n'}$ le produit déformé de $\mathbb{R}^3$ par $M'^{4n'}$ et posons
(a) $\bar{g} = \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & f^2(t)g' \end{pmatrix}$
(b) $\bar{\xi_i} = (\xi_i,0)$
(c) $\bar{\eta_i} = (\eta_i,0)$
(d) $\bar{\phi_i} = (\phi_i,J'_i)$.

Proposition 4.1. *Telle que définie ci-dessus,* $(\bar{g},(\bar{\phi_i},\bar{\xi_i},\bar{\eta_i})_{i=1}^3)$ *est une 3-structure métrique presque de contact.*

Démonstration. $\bar{g}(\bar{\xi_i},\bar{\xi_i}) = \bar{g}((\xi_i,0),(\xi_i,0)) = I_3(\xi_i,\xi_i) = 1.$
$\bar{\eta_i}(\bar{\xi_i}) = \eta_i(\xi_i) = 1;$
$\bar{\phi_i}(\bar{\xi_i}) = \phi_i(\xi_i) = 0.$
Notons par $\bar{X} = (X,X')$ un élément de $\chi(M)$ où $X \in \chi(R^3)$ et $X' \in \chi(M'^{4n'})$. On a $\bar{\phi_i}(\bar{X}) = (\phi_i X,J'_i X')$; ceci donne
$\bar{\phi}_i^2(\bar{X}) = -(X,X') + \eta_i(X)(\xi_i,0)$. Etant donné que $\bar{\xi_i} = (\xi_i,0)$ et que $\bar{\eta_i}(X,X') = (\eta_i(X),0)$, on aura $\bar{\phi}_i^2(\bar{X}) = -\bar{X} + \bar{\eta}_{i(\bar{X})}\bar{\eta_i}$.

Les autres conditions se vérifient par un calcul analogue.

□

Le calcul semblable à celui qui a conduit à (3.4) donne les identités suivantes:
(4.1) $(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{\phi_i})\bar{Y} = f^2(t)(\nabla'_{X'}J')Y' + \bar{g}(\bar{\phi_i}\bar{X},\bar{Y})\bar{\xi_i} - \bar{\eta_i}(\bar{Y})\bar{\phi_i}\bar{X};$
(4.2)
$$(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{\Phi}_i)(\bar{Y},\bar{Z}) = f^2(t)(\nabla'_{X'}\Omega'_i)(Y',Z') + \bar{\eta_i}(\bar{Z})\bar{\Phi}_i(\bar{X},\bar{Y}) + \bar{\eta_i}(\bar{Y})\bar{\Phi}_i(\bar{Z},\bar{X})$$
(4.3)
$$d\bar{\Phi}_i(\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}) = f^2(t)d\Omega'_i(X',Y',Z') + 2/3\sigma\left\{\bar{\eta_i}(\bar{X})\bar{\Phi}_i(\bar{Y},\bar{Z})\right\}.$$

Théorème 4.1. *Soit* $\bar{M} = \mathbb{R}^3 \times_f M'^{4m'}$ *le produit déformé de* $\mathbb{R}^3$ *par* $M'^{4m'}$*, comme ci-dessus. Alors,* $\bar{M}$*, est une variété:*

a) *3-de Kenmotsu si, et seulement si, M' est hyperkählérienne;*
b) *3-presque de Kenmotsu si, et seulement si, M' est presque hyperkählérienne;*
c) *3-nearly de Kenmotsu si, et seulement si, M' est nearly hyperkählérienne.*

Démonstration. (a) Si M est 3-de Kenmotsu, alors par définition

$$(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{\phi}_i)\bar{Y} = \bar{g}(\bar{\phi}_i\bar{X},\bar{Y})\bar{\xi}_i - \bar{\eta}_i(\bar{Y})\bar{\phi}_i\bar{X}.$$

Ceci étant, on voit que dans (4.1) on a $(\nabla'_{X'}J'_i)Y' = 0$ qui montre que M' est une variété hyperkählérienne.

Réciproquement, si M' est hyperkählérienne, alors $(\nabla'_{X'}J'_i)Y' = 0$ et ceci fait que (4.1) se réduit à

$$(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{\phi}_i)\bar{Y} = \bar{g}(\bar{\phi}_i\bar{X},\bar{Y})\bar{\xi}_i - \bar{\eta}_i(\bar{Y})\bar{\phi}_i\bar{X}$$

qui est la relation de définition d'une variété 3-de Kenmotsu.

Le même procédé permet d'établir les autres énoncés en ce sens que (4.2) conduit à la structure nearly de Kenmotsu et (4.3) à la structure 3-presque de Kenmotsu. $\square$

5. Quelques exemples

5.1. Structure 3-cosymplectique. L'exemple le plus familier est de prendre $\mathbb{R}^3$ et de poser $\xi_1 = \partial/\partial y$, $\xi_2 = \partial/\partial x$, $\xi_3 = \partial/\partial z$, $\eta_1 = dy$, $\eta_2 = dx$, $\eta_3 = -dz$. Les ϕ_i sont définies par les matrices

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\phi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit que pour tout i=1,2,3, $d\eta_i = 0$. On peut vérifier que (ϕ_i,ξ_i,η_i) est 3-cosymplectique. Mais $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^4$ est l'exemple le plus familier d'une variété hyperkählérienne. On sait que $\mathbb{R}^{4m}$ est une variété hyperkählérienne, en prenant S^3 la sphère unité dans $\mathbb{R}^4$, on peut vérifier que $S^3 \times \mathbb{R}^{4m}$ est 3-cosymplectique lorsque les composantes des ϕ_i sont des constantes.

5.2. Structure 3-sasakienne. Dans $\mathbb{R}^4$, considérons la sphère unité S^3 et un champ de vecteurs unitaire μ, normal à S^3, mais défini par

$$\mu = \sum_{i=1}^{2} \left(x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + y^i \frac{\partial}{\partial y^i} \right)$$

où les (x^i,y^i) sont les coordonnées cartésiennes de $\mathbb{R}^4$. Comme dans [Sa], prenons

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Posons $\xi_i = J_i\mu$ et notons par η_i les 1-formes duales de ξ_i.Par exemple $\eta_1 = x^1dy^1 - y^1dx^1 + x^2dy^2 - y^2dx^2$. Si on prend $\phi_i = J_i + \eta_i \otimes \mu$, on vérifie que $S^3 \times \mathbb{R}^4$ est une variété 3-sasakienne. De manière générale, $S^{4m+3} \times \mathbb{R}^{4m}$ est une variété 3-sasakienne.

5.3. Structure 3-de Kenmotsu. Dans [Cap], on a montré que si M_1 et M_2 sont des variétés cosymplectiques, alors $M_1 \times M_2$ est une variété kählérienne.De manière analogue, on peut montrer que si M_1 et M_2 sont des variétés cosymplectiques-kählériennes, alors $M_1 \times M_2$ est hyperkählérienne. Dans ce cas, $\bar{M} = \mathbb{R}^3 \times_f (M_1 \times M_2)$ est une variété 3-de Kenmotsu.

5.4. Structure 3-presque de Kenmotsu. Comme à l'exemple qui précède, si M_1 et M_2 sont des variétés presque cosymplectiques-presque kählériennes, alors $M_1 \times M_2$ est presque hyperkählérienne. De ce fait, $\bar{M} = \mathbb{R}^3 \times_f (M_1 \times M_2)$ est une variété 3-presque de Kenmotsu.

5.5. Structure 3-nearly de Kenmotsu. On peut également montrer que si M_1 et M_2 sont des variétés closely cosymplectiques-nearly kählériennes, alors $M_1 \times M_2$ est nearly hyperkählérienne. Ce qui fait que $\bar{M} = \mathbb{R}^3 \times_f (M_1 \times M_2)$ est une variété 3-nearly de Kenmotsu.

Références

[A-M1] D.V. Alekseevsky, S. Marchiafava, Almost quaternionic Hermitian and quasi-Kähler manifolds, *Complex Structures and Vector Fields*, World Sci. Co. Singapore, 150-175 (1994).

[A-M2] D.V. Alekseevsky, S. Marchiafava, Quaternionic structures on a manifold and subordinates structures, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **171**, 206-273 (1996).

[Cal] E. Calabi, Métriques Kählériennes et fibrés holomorphes, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, **12**, 269-294 (1979).

[Cap] M. Capursi, Some remarks on the product of two almost contact manifolds, *An. Sti. Univ. "Al.I. Cuza", Iasi*, **30**, 75-89 (1984).

[G-H] A. Gray, L.M. Hervella, The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants, *An. Mat. Pura Appl.*, **123**, 35-58 (1980).

[Hi] N. Hitchin, Hyperkähler manifolds, *Séminaire Bourbaki*, **748**, 137-165 (1992).

[Ke] K. Kenmotsu, A class of almost contact Riemannian manifolds, *Tôhoku Math. J.*, **24**, 93-103 (1972).

[Ku] Y.Y. Kuo, On almost contact 3-structure, *Tôhoku Math. J.*, **22**, 325-332 (1970).

[Ou1] J.A. Oubiña, New classes of almost contact metric structures, *Publicationes Mathematicae*, Debrecen, **32**, 187-193 (1985).

[Ou2] J.A. Oubiña, *A classification for almost contact structures*, manuscript (1985).

[Sa] S. Sasaki, Spherical space forms with normal contact 3-structure, *J. Differential Geometry*, **6**, 305-315 (1972).

[TM] T. Tshikuna-Matamba, Nouvelles classes de variétés de Kenmotsu, *An. Sti. Univ."Al.I.Cuza", Iasi*, **38**, 167-175 (1992).

(T. Tshikuna-Matamba) Département de Mathématiques
Institut Supérieur Pédagogique
B.P. 282-Kananga
République Démocratique du Congo
E-mail address: tshikmat@yahoo.fr