

## Homogénéisation et piézoélectricité. Aide à la conception d'un bio-matériau

MARIUS GHERGU, GEORGES GRISO, BÉATRICE LABAT, HOUARI MECHKOUR,  
BERNADETTE MIARA, EDUARD ROHAN ET MUSTAPHA ZIDI

---

RÉSUMÉ. Nous proposons une étude numérique du couplage entre une structure piézoélectrique poreuse et des cellules élastiques et diélectriques en vue de l'optimisation d'un bio-système destiné à la régénération osseuse.

*Classification AMS 2000 des sujets.* Primary 35B27; Secondary 74L15.

*Mots clef et phrases.* Biomécanique du solide, Homogénéisation des milieux périodiques, Piézoélectricité, Plaques.

---

### 1. Introduction

Dans ce travail nous donnons les premières idées pouvant servir à l'élaboration d'un "système intelligent" hybride combinant un matériau bio-compatible poreux et des cellules vivantes ostéoblastes. La justification d'une telle structure est de pallier les difficultés rencontrées en chirurgie reconstructive dues à la mauvaise qualité de la croissance osseuse autour des implants en facilitant la régénération de l'os. Le choix du substrat s'est porté sur un matériau piézoélectrique compte tenu des propriétés piézoélectriques des cellules ostéoblastes à l'origine de la reconstruction osseuse [9]. Bien que les conditions conduisant à une prolifération et à une division cellulaire de bonne qualité des ostéoblastes ne soient pas complètement élucidées [8], nous nous proposons de mettre en place des outils de simulation qui ne sont bien entendu que le prélude à une description plus précise du système proposé et qui devront bien entendu être suivis par une nécessaire phase d'expérimentation.

Cette présentation reprend quelques résultats d'une étude théorique sur les matériaux poreux piézoélectriques [3] et d'une première étude sur ce type de bio-système [5].

Dans le paragraphe suivant nous rappelons les modèles bidimensionnels de plaques piézoélectriques membranaires. Ensuite nous énonçons les propriétés de l'opérateur d'éclatement périodique qui conduiront aux modèles limites homogénéisés de plaques, enfin nous proposons quelques résultats de simulation.

### 2. Modélisation bidimensionnelle de plaques piézoélectriques

**2.1. Description de la géométrie.** On considère un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  constitué de microstructures  $\varepsilon Y$ , de taille  $\varepsilon$ , périodiquement réparties. Dans chaque cellule unité  $Y = [0, 1]^2$  on note  $S$  le domaine occupé par une cellule vivante,  $\bar{S} \subset Y$ . Les cellules

---

*Reçu:* le 26 Octobre, 2004.

occupent donc le domaine  $\overline{S^\varepsilon}$ ,  $S^\varepsilon = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^2} \varepsilon(\overline{S} + k) \cap \Omega$ , et la matrice poreuse le domaine  $\overline{\Omega^\varepsilon}$ ,  $\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus \overline{S^\varepsilon}$ , on note  $\Gamma^\varepsilon = \partial S^\varepsilon \cap \partial \Omega$  le bord des cellules.

**2.2. Modélisation et estimations *a priori*.** Un matériau piézoélectrique est caractérisé par ses trois tenseurs<sup>1</sup>  $c^{\alpha\beta\sigma\tau}$ ,  $e^{\alpha\beta\sigma\tau}$ ,  $d^{\alpha\beta\sigma\tau}$  dont les propriétés de symétrie et définie positivité sont donnés par :

$$\begin{aligned} c^{\alpha\beta\sigma\tau} &= c^{\beta\alpha\sigma\tau} = c^{\sigma\tau\alpha\beta}, \quad \exists \alpha_c > 0 : c^{ijkl} X_{ij} X_{kl} \geq \alpha_c X_{ij} X_{ij}, \quad \forall X_{ij} = X_{ji} \in \mathbb{R}, \\ e^{\alpha\beta\sigma} &= e^{\beta\alpha\sigma}, \\ d^{\alpha\beta} &= d^{\beta\alpha}, \quad \exists \alpha_d > 0 : d^{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta \geq \alpha_d X_\alpha X_\beta, \quad \forall X_\alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pour simplifier l'exposé on considère ici que la *matrice poreuse* est piézoélectrique, elle est donnée par  $c_m^{\alpha\beta\sigma\tau}$ ,  $e_m^{\alpha\beta\sigma\tau}$ ,  $d_m^{\alpha\beta\sigma\tau}$  et que les trous sont remplis par *des cellules* qui sont mécaniquement élastiques et possèdent des propriétés diélectriques, i.e., leur tenseur de couplage piézoélectrique  $e_c$  est nul, ses autres tenseurs sont notés  $c_c^{\alpha\beta\sigma\tau}$ ,  $d_c^{\alpha\beta\sigma\tau}$ . On suppose que les composantes de chacun de ces tenseurs appartiennent à  $L^\infty(\Omega)$ .

En théorie linéarisée de plaques minces piézoélectrique mécaniquement isotropes [7] on peut distinguer deux problèmes découplés, d'une part *un problème membranaire* qui lie les composantes horizontales  $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)$  du déplacement élastique  $\mathbf{u}^\varepsilon = (u_i^\varepsilon)$  et le potentiel électrique et d'autre part *un problème en flexion* qui donne le déplacement élastique transverse  $u_3^\varepsilon$  et dans lequel le potentiel électrique est explicite. Nous nous limiterons dans cette étude au *problème membranaire* dans lequel *les équations d'équilibre* relient le tenseur des contraintes  $\mathbf{T}$  et le déplacement électrique  $\mathbf{D}$  aux forces extérieures

$$-\mathbf{div} \mathbf{T}(\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) = \mathbf{p}, \quad -\mathbf{div} \mathbf{D}(\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

et la *loi de comportement* relie  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{D}$  au déplacement élastique et au potentiel électrique :

$$T^{\alpha\beta}(\mathbf{v}, \psi) = c^{\alpha\beta\sigma\tau} s_{\sigma\tau}(\mathbf{v}) + e^{\alpha\beta\sigma} \partial_\sigma \psi, \quad D^\sigma(\mathbf{v}, \psi) = -e^{\alpha\beta\sigma} s_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) + d^{\sigma\tau} \partial_\tau \psi,$$

où  $s_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha v_\beta + \partial_\beta v_\alpha)$  est le tenseur bidimensionnel linéarisé *des déformations*. Les conditions aux limites sont de deux types :

- des conditions homogènes de Dirichlet sur le bord externe :  $\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{0}$ ,  $\varphi^\varepsilon = 0$  sur  $\partial\Omega$
- et des conditions de transmission sur le bord intérieur  $\Gamma^\varepsilon$  : continuité du champ élastique et du potentiel électrique et continuité des composantes normales du tenseur des contraintes et du déplacement électrique

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m^\varepsilon - \mathbf{u}_c^\varepsilon &= \mathbf{0}, \quad \varphi_m^\varepsilon - \varphi_c^\varepsilon = 0, \\ [T^{\alpha\beta}(\mathbf{u}_m^\varepsilon, \varphi_m^\varepsilon) - T^{\alpha\beta}(\mathbf{u}_c^\varepsilon, \varphi_c^\varepsilon)] n_\alpha^\varepsilon &= \mathbf{0}, \\ [D^\alpha(\mathbf{u}_m^\varepsilon, \varphi_m^\varepsilon) - D^\alpha(\mathbf{u}_c^\varepsilon, \varphi_c^\varepsilon)] n_\alpha^\varepsilon &= 0, \end{aligned}$$

où les indices  $m$  et  $c$  indiquent les valeurs prises par les paramètres dans la matrice ou dans les cellules et  $\mathbf{n}^\varepsilon = (n_1^\varepsilon, n_2^\varepsilon)$  est le vecteur unitaire normal à  $\Gamma$ .

On introduit enfin les espaces fonctionnels  $V(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } d\Omega\}$ ,  $\mathbf{V}(\Omega^\varepsilon) = (V(\Omega))^2$ . Sous les conditions classiques de régularité  $\mathbf{p} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ , le problème variationnel admet une solution faible unique  $\mathbf{u}^\varepsilon \in \mathbf{V}(\Omega)$ ,  $\varphi^\varepsilon \in V(\Omega)$  donnée par :

$$\begin{cases} \int_\Omega \left( c(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) + e(\mathbf{v}, \varphi^\varepsilon) \right) dx &= \int_{\Omega^\varepsilon} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \, dx & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega), \\ \int_\Omega \left( -e(\mathbf{u}^\varepsilon, \psi) + d(\varphi^\varepsilon, \psi) \right) dx &= 0 & \forall \psi \in V(\Omega), \end{cases} \quad (1)$$

---

<sup>1</sup>Les indices et exposants latins prennent leurs valeurs dans l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$ , les indices et exposants grecs (excepté  $\varepsilon$ ) prennent leurs valeurs dans l'ensemble  $\{1, 2\}$ . On applique la convention d'Einstein des indices et exposants répétés, on utilise des caractères gras pour représenter les vecteurs.

avec les opérateurs

$$\begin{cases} c(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) = c^{\alpha\beta\sigma\tau} s_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^\varepsilon) s_{\sigma\tau}(\mathbf{v}), \\ d(\varphi^\varepsilon, \psi) = d^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi^\varepsilon \partial_\beta \psi. \end{cases} \quad e(\mathbf{v}, \psi) = e^{\alpha\beta\sigma} s_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \partial_\sigma \psi, \quad (2)$$

Les inégalités de Poincaré et de Korn dans les domaines périodiques [6] permettent d'établir que  $\int_\Omega c^{\alpha\beta\sigma\tau} s_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) s_{\sigma\tau}(\mathbf{v}) dx$  et  $\int_\Omega d^{\alpha\beta} \partial_\alpha \psi \partial_\beta \psi dx$  sont des normes respectivement sur  $\mathbf{V}(\Omega)$  et  $V(\Omega)$  et d'obtenir ainsi la majoration uniforme (la constante  $C$  dépend de  $\Omega$  et de  $Y$  mais est indépendante de  $\varepsilon$ ) :

$$\|u_1^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} + \|u_2^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} + \|\varphi^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C. \quad (3)$$

On est alors en mesure grâce aux majorations (3) de montrer qu'il existe un champ piézoélectrique limite solution d'un problème *homogénéisé* analogue à (1).

### 3. Opérateur d'éclatement périodique et modèle limite

La technique d'homogénéisation qui permet l'étude de la convergence de la suite  $\{\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon\}_\varepsilon$  se fait grâce à l'opérateur d'éclatement périodique  $\mathcal{T}^\varepsilon$  introduit dans [2].

**3.1. Opérateur d'éclatement périodique  $\mathcal{T}^\varepsilon$ .** À la décomposition unique  $x \in \mathbb{R}^2, x = \varepsilon([\frac{x}{\varepsilon}] + \{\frac{x}{\varepsilon}\})$ , où pour tout  $z \in \mathbb{R}^2$  on a  $z - [z] \in Y$ , on associe l'opérateur d'éclatement  $\mathcal{T}^\varepsilon$  défini par

$$\mathcal{T}^\varepsilon : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega \times Y), \quad \mathcal{T}^\varepsilon(v)(x, y) = v(\varepsilon[\frac{x}{\varepsilon}] + \varepsilon y), \quad x \in \Omega, y \in Y.$$

Ainsi  $\mathcal{T}^\varepsilon(c^{\alpha\beta\lambda\mu})(x, y) = c_m^{\alpha\beta\lambda\mu}, y \in Y \setminus S$  et  $\mathcal{T}^\varepsilon(c^{\alpha\beta\lambda\mu})(x, y) = c_c^{\alpha\beta\lambda\mu}, y \in S$ . On a d'une part, en notant  $O^\varepsilon = \{x \in \Omega^\varepsilon \mid \text{dist}(x, \partial\Omega^\varepsilon) < 2\varepsilon\}$ ,

$$\left| \int_{\Omega^\varepsilon} v - \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega \times Y} \mathcal{T}^\varepsilon(v) \right| \leq \int_{O^\varepsilon} |v| dx, \quad \text{pour tout } v \in L^1(\Omega),$$

et d'autre part  $\mathcal{T}^\varepsilon(vw) = \mathcal{T}^\varepsilon(v)\mathcal{T}^\varepsilon(w)$  pour tout  $v, w \in L^2(\Omega)$ . On est donc en mesure d'établir l'existence du champ limite  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \varphi \in H_0^1(\Omega)$  et des correcteurs  $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{L}^2(\Omega, \mathbf{H}_{\text{per}}^1(Y)), \bar{\varphi} \in L^2(\Omega, H_{\text{per}}^1(Y))$  définis par les convergences faibles

$$\begin{cases} \mathcal{T}^\varepsilon(s_{\alpha\beta, x}(\mathbf{u}^\varepsilon)) \rightharpoonup s_{\alpha\beta, x}(\mathbf{u}) + s_{\alpha\beta, y}(\bar{\mathbf{u}}) & \text{dans } L^2(\Omega \times Y), \\ \mathcal{T}^\varepsilon(\nabla_x \varphi^\varepsilon) \rightharpoonup \nabla_x \varphi + \nabla_y \bar{\varphi} & \text{dans } L^2(\Omega \times Y). \end{cases}$$

### 3.2. Modèle limite de plaque membranaire.

**Théorème 3.1.** *Le champ piézoélectrique limite  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \varphi \in H_0^1(\Omega)$  vérifie le problème variationnel suivant :*

$$\begin{cases} \int_\Omega (\bar{c}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \bar{e}(\mathbf{v}, \varphi)) dx = \int_\Omega \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} dx & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ \int_\Omega (-\bar{e}(\mathbf{u}, \psi) + \bar{d}(\varphi, \psi)) dx = 0 & \forall \psi \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Les nouveaux opérateurs  $\bar{c}, \bar{e}, \bar{d}$  ont la même définition que (2) dans laquelle les tenseurs  $c^{\alpha\beta\sigma\tau}, e^{\alpha\beta\sigma}, d^{\alpha\beta}$  ont été remplacés par les tenseurs homogènes effectifs  $\bar{c}^{\alpha\beta\sigma\tau}, \bar{e}^{\alpha\beta\sigma}, \bar{d}^{\alpha\beta}$  avec les mêmes propriétés de symétrie et de positivité, ils sont donnés par :

$$\begin{cases} \bar{c}^{\alpha\beta\sigma\tau} = \int_Y c^{\alpha\beta\lambda\mu} (\delta_\lambda^\sigma \delta_\mu^\tau + s_{\lambda\mu, y}(\bar{\mathbf{g}}^{\sigma\tau})) + e^{\alpha\beta\lambda} \partial_{\lambda, y} \bar{\zeta}^{\sigma\tau}, \\ \bar{e}^{\alpha\beta\sigma} = \int_Y e^{\alpha\beta\lambda} (\delta_\lambda^\sigma + \partial_{\lambda, y} \bar{\eta}^\sigma) + c_M^{\alpha\beta\lambda\mu} s_{\lambda\mu, y}(\bar{\mathbf{z}}^\sigma), \\ \bar{d}^{\alpha\beta} = \int_Y -e^{\lambda\mu\alpha} s_{\lambda\mu, y}(\bar{\mathbf{z}}^\beta) + d^{\alpha\lambda} (\delta_\lambda^\beta + \partial_{\lambda, y} \bar{\eta}^\beta), \end{cases}$$

où  $\delta_\mu^\tau$  est le symbole de Kronecker. Les correcteurs  $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\varphi})$  sont donnés par :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{u}}(x, y) &= s_{\lambda\mu}(\mathbf{u}(x))\bar{\mathbf{g}}^{\lambda\mu}(y) + \partial_\mu\varphi(x)\bar{\mathbf{z}}^\mu(y), \\ \bar{\varphi}(x, y) &= s_{\lambda\mu}(\mathbf{u}(x))\bar{\zeta}^{\lambda\mu}(y) + \partial_\mu\varphi(x)\bar{\eta}^\mu(y),\end{aligned}$$

et les fonctions de base sont solutions de cinq problèmes piézoélectriques locaux :  
- d'une part pour  $\lambda, \mu = 1, 2$ ,  $(\bar{\mathbf{g}}^{\lambda\mu} \in \mathbf{H}_{\text{per}}^1(Y), \bar{\zeta}^{\lambda\mu} \in H_{\text{per}}^1(Y))$  sont solutions de

$$\begin{cases} \int_Y (c_y(\bar{\mathbf{g}}^{\lambda\mu}, \bar{\mathbf{v}}) + e_y(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\zeta}^{\lambda\mu})) dy &= - \int_Y c^{\lambda\mu\sigma\tau} s_{\sigma\tau, y}(\bar{\mathbf{v}}) dy \\ \int_Y (-e_y(\bar{\mathbf{g}}^{\lambda\mu}, \bar{\psi}) + d_y(\bar{\zeta}^{\lambda\mu}, \bar{\psi})) dy &= \int_Y e^{\lambda\mu\sigma} \partial_{\sigma, y} \bar{\psi} dy \end{cases} \quad (4)$$

- et d'autre part pour  $\mu = 1, 2$ ,  $(\bar{\mathbf{z}}^\mu \in \mathbf{H}_{\text{per}}^1(Y), \bar{\eta}^\mu \in H_{\text{per}}^1(Y))$  sont solutions de

$$\begin{cases} \int_Y (c_y(\bar{\mathbf{z}}^\mu, \bar{\mathbf{v}}) + e_y(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\eta}^\mu)) dy &= - \int_Y e^{\alpha\beta\mu} s_{\alpha\beta, y}(\bar{\mathbf{v}}) dy \\ \int_Y (-e_y(\bar{\mathbf{z}}^\mu, \bar{\psi}) + d_y(\bar{\eta}^\mu, \bar{\psi})) dy &= - \int_Y d^{\mu\beta} \partial_{\beta, y} \bar{\psi} dy, \end{cases} \quad (5)$$

les opérateurs locaux  $c_y, e_y, d_y$  sont construits comme en (2).

On est ensuite en mesure d'établir les convergences fortes :

$$\begin{cases} s_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^\varepsilon) - s_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) - \mathcal{U}^\varepsilon(s_{\alpha\beta, y}(\bar{\mathbf{u}})) \longrightarrow 0 & \text{dans } L^2(\Omega), \\ \nabla\varphi^\varepsilon - \nabla\varphi - \mathcal{U}^\varepsilon(\nabla_y\bar{\varphi}) \longrightarrow 0 & \text{dans } L^2(\Omega), \end{cases}$$

où  $\mathcal{U}^\varepsilon$  est l'opérateur de moyennisation

$$\mathcal{U}^\varepsilon(v)(x) = \int_Y v\left(\varepsilon\left[\frac{x}{\varepsilon}\right] + \alpha z, \left\{\frac{x}{\varepsilon}\right\}\right) dz, \quad \forall v \in L^2(\Omega \times Y).$$

Toutes les démonstrations se trouvent dans [3].

## 4. Résultats numériques

**4.1. Description de la structure et nature des inclusions.** Le bio-matériau est constitué

- d'une matrice piézoélectrique de classe 4mm, le Ba Ti O<sub>3</sub> dont les caractéristiques sont données dans les tableaux ci-dessous

$\frac{\alpha\beta\sigma\tau}{c^{\alpha\beta\sigma\tau}}$	1111	1122	1122	1212			
	15.85	8.10	5.31	5.43	5.43	11.3	
$\frac{\alpha\beta\sigma}{e^{\alpha\beta\sigma}}$	112	211	222		$\frac{\alpha\beta}{d^{\alpha\beta}}$	11	22
	21.3	-0.93	5.10			174.4	9.7

Le Tenseur d'élasticité  $c^{\alpha\beta\sigma\tau}$  est donné en [10·GPa], le tenseur diélectrique  $d^{\alpha\beta}$  est donné en [ $10^{-10}$ ·F/m] et le tenseur de couplage  $e^{\alpha\beta\sigma}$  est donné en [C/m<sup>2</sup>].

- de cellules élastiques de coefficients de Lamé  $\lambda, \mu$  et de fibres de rigidité  $\gamma$  et dont les propriétés diélectriques sont données par  $d, \bar{d}$  (cf. [5] pour une description plus précise)

$\lambda$	$\mu$	$\gamma^\alpha$	$d^\alpha$	$\bar{d}^\alpha$
1.7	0.45	1	10	0.1

Les constantes élastiques  $\lambda, \mu, \gamma^\alpha$  sont données en [10·GPa], les propriétés diélectriques  $d, \bar{d}$  sont données en [ $10^{-10}$ ·F/m]

Compte tenu de l'anisotropie de la matrice due à la polarisation nous avons étudié l'influence de la rotation d'une cellule occupant un domaine ellipsoïdal dont le rapport des axes est de 0.3788. Les 13 résultats suivants donnent les coefficients homogénéisés et la traction surfacique (pour un élément particulier) correspondent à une rotation qui varie de 0 à 180 degrés par pas de  $\pi/12$ .

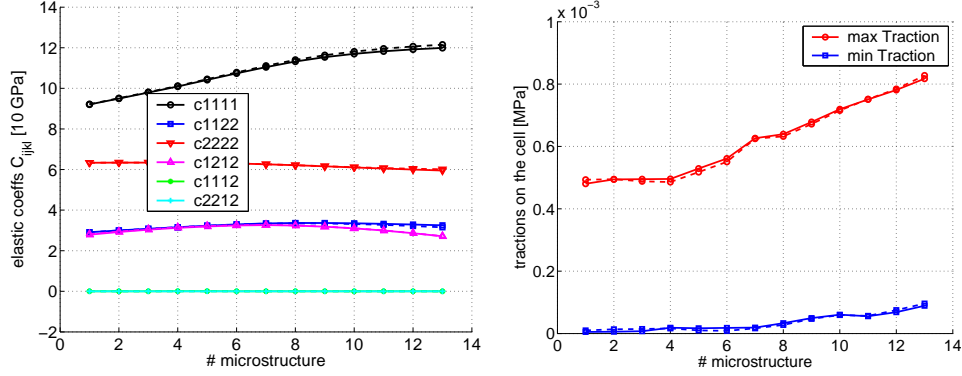


FIG. 1. Le tenseur d'élasticité  $C_{ijkl}^H$  et la traction surfacique pour différents microstructures

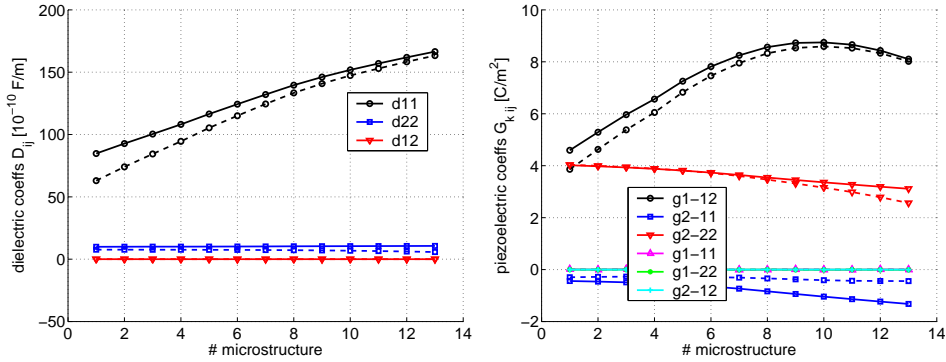


FIG. 2. Le tenseur diélectrique  $d_{ij}^H$  et le tenseur de couplage  $g_{ijk}^H$  pour différents microstructures

## 5. Conclusion

Ces premiers résultats montrent la grande sensibilité des paramètres homogénéisés à l'orientation des cellules, d'autres études portant sur la forme des inclusions sont présentées en [5]. Les développements futurs qui visent à se rapprocher le plus possible des caractéristiques des différents types d'os devront prendre en compte la loi d'évolution des cellules, les conditions de contact entre les cellules et le substrat [1], le type de stimulation externe par les champs de contraintes induits par les charges physiologiques ou par un champ électrique artificiel, les lois de comportement non linéaires pour permettre des grandes déformations, et pour des raisons évidentes liées à la morphologie il y aura lieu de passer à des modèles de coques [4].

## 6. Remerciements

Ce travail a été rendu possible grâce au projet européen “Smart Systems” HPRN-CT-2002-00284.

## Références

- [1] K. Anselme, Osteoblast adhesion on biomaterials (Review), *Biomaterial*, **21**, 667-681 (2000).
- [2] D. Cioranescu, A. Damlamian et G. Griso, Periodic unfolding and homogenization, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, **335**, 99-104 (2002).
- [3] M. Ghergu, G. Griso, H. Mechkour et B. Miara, Homogenization of thin piezoelectric structures, à paraître.
- [4] M. Ghergu, G. Griso, H. Mechkour et B. Miara, Homogénéisation de coques minces piézoélectriques perforées, *C. R. Mécanique*, **333**, 249-255 (2005).
- [5] B. Labat, B. Miara, E. Rohan et M. Zidi, Homogenization theory applied to the design of bone bio-material, *First European Conference on Micro and Nano technologies*, Octobre 2004, Paris.
- [6] O. Oleinic, G. Shamaev et G. Yosifian, *Mathematic problems in elasticity and homogenisation*, NorthHolland, 1992.
- [7] M. Rahmoune, Analyse et simulation numérique de plaques piézoélectriques. Application au contrôle santé, *Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie*, 1997.
- [8] V.I. Sikavitsas, J.S. Temeno et G.A. Mikos, Biomaterials and bone mechanotransduction (Review), *Biomaterial* **22**, 2581-2593 (2001).
- [9] C.C. Silva, D. Thomazini, A.G. Pinheiro, N. Aranha, S.D. Figueiro, J.C. Góes et A.S.B Sombra, Collagen - hydroxyapatite films : piezoelectric properties, *Materials Science and Engineering*, **B86**, 210-218 (2001).

(Marius Ghergu) DÉPARTÉMENT DE MATHÉMATIQUE,  
UNIVERSITÉ DE CRAIOVA,  
13, BOULEVARD A.I. CUZA,  
200585 CRAIOVA, ROUMANIE  
*E-mail address:* [mghergu@yahoo.fr](mailto:mghergu@yahoo.fr)

(Georges Griso) UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE,  
LABORATOIRE JACQUES-LOUIS LIONS,  
4, PLACE JUSSIEU,  
75252 PARIS, FRANCE  
*E-mail address:* [georges.griso@wanadoo.fr](mailto:georges.griso@wanadoo.fr)

(Béatrice Labat) UNIVERSITÉ PARIS 12 VAL DE MARNE,  
INSTITUT SUPÉRIEUR DES BIOSCIENCES DE PARIS,  
61, AVENUE DU GÉNÉRAL DE GAULLE,  
94010 CRÉTEIL CEDEX, FRANCE  
*E-mail address:* [labat@univ-paris12.fr](mailto:labat@univ-paris12.fr)

(Houari Mechkour) LABORATOIRE DE MODÉLISATION  
ET SIMULATION NUMÉRIQUE, ESIEE,  
2, BOULEVARD BLAISE PASCAL,  
93160 NOISY-LE-GRAND, FRANCE  
*E-mail address:* [mechkouh@esiee.fr](mailto:mechkouh@esiee.fr)

(Bernadette Miara) LABORATOIRE DE MODÉLISATION  
ET SIMULATION NUMÉRIQUE, ESIEE,  
2, BOULEVARD BLAISE PASCAL,  
93160 NOISY-LE-GRAND, FRANCE  
*E-mail address:* [miarab@esiee.fr](mailto:miarab@esiee.fr)

(Eduard Rohan) DÉPARTEMENT DE MÉCANIQUE,  
FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES  
NEW TECHNOLOGIES RESEARCH CENTRE,  
UNIVERSITY OF WEST BOHEMIA,  
22, UNIVERZITNÍ,  
306 14 PLZEŇ, RÉPUBLIQUE TCHÈQUE  
*E-mail address:* [rohan@kme.zcu.cz](mailto:rohan@kme.zcu.cz)

(Mustapha Zidi) UNIVERSITÉ PARIS 12 VAL DE MARNE,  
INSTITUT SUPÉRIEUR DES BIOSCIENCES DE PARIS,  
61, AVENUE DU GÉNÉRAL DE GAULLE,  
94010 CRÉTEIL CEDEX, FRANCE  
*E-mail address:* [zidi@univ-paris12.fr](mailto:zidi@univ-paris12.fr)