Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser.
Volume 32, 2005, Pages 16–25
ISSN: 1223-6934

Ondes hydrodynamiques amorties

Olivier Goubet

Résumé. Nous dressons dans cet article un panorama (non exhaustif) de l'étude de l'équation de Korteweg-de Vries, en présence d'un amortissement et d'un terme de force. Les questions qui nous interessent sont liées à l'existence d'un attracteur global pour le système dynamique ainsi défini, à sa dimension, et à sa régularité.

Classification AMS 2000 des sujets. 35B40, 35B41.
Mots clef et phrases. equations d'ondes hydrodynamiques, amortissement, comportement pour les grands temps.

1. Introduction

L'objet de cet article est de donner un panorama (malheureusement non exhaustif) des recherches qui ont trait au comportement pour les grands temps des solutions d'équations d'ondes hydrodynamiques en présence d'un amortissement.

Cette étude participe des systèmes dynamiques en dimension infinie, dont le lecteur pourra trouver une présentation plus complète dans les ouvrages de référence que sont [25], [15], [22].

2. Choix du modèle mathématique

Nous allons nous focaliser sur un modèle asymptotique pour une onde monodirectionnelle se déplaçant en surface d'un fluide dans un canal peu profond. Ce modèle, l'équation de Korteweg-de Vries, s'écrit dans le cadre conservatif comme suit

$$u_t + u_x + u_{xxx} + uu_x = 0. \tag{1}$$

Ce modèle a été obtenu à partir des équations d'Euler (en supposant l'écoulement irrotationnel) par Boussinesq vers 1877 et redécouvert par Korteweg et de Vries en 1890. Nous supposons ici par exemple la variable d'espace x décrivant $\mathbb{R}$. Quitte à considérer un repère se déplaçant avec l'onde nous oublierons dans la suite le terme u_x dans (1).

Nous nous interessons ici à la compétition de l'influence d'une dissipation (de type γu) et d'un terme de force (supposé indépendant du temps) sur la dynamique. L'équation de KdV amortie devient donc

$$u_t + u_{xxx} + \gamma u + uu_x = f(x), \tag{2}$$

où $\gamma > 0$, $f(x)$ sont donnés.

Reçu: le 20 Décembre, 2004.

Remarque 2.1. *Dans la littérature, cette dernière équation est appelée équation de KdV faiblement amortie. Cette terminologie s'expliquera dans le corps de l'article. Notons néanmoins que cette terminologie est malheureuse si on s'interesse à la vitesse de convergence vers l'équilibre des solutions de*

$$u_t + u_{xxx} + \gamma u + uu_x = 0, \tag{3}$$

qui est exponentielle, alors que pour l'équation fortement amortie

$$u_t + u_{xxx} - \gamma u_{xx} + uu_x = 0, \tag{4}$$

elle décroit polynomialement [2].

2.1. Un système dynamique en dimension infinie. Nous considérons maintenant (2) avec une donnée initiale $u_0(x)$. La variable t est le temps et la variable d'espace x décrit $\mathbb{R}$; nous considèrerons aussi le cas d'une variable d'espace x dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, avec conditions aux limites périodiques (ceci sera noté par $x \in \mathbb{T}$).

Nous introduisons maintenant la notion de semi-groupe (ou de flot) associé à l'équation (2). Soit H un espace de Hilbert. Pour u_0 dans H, nous définissons $S(t)u_0$ comme la solution de (2) calculée à l'instant t. Ceci présuppose que le problème de Cauchy associé à l'équation d'évolution est bien posé au sens de Hadamard, i.e. que l'on soit capable de construire une unique solution à valeurs dans $C(0, T; H)$ (ou dans un sous espace plus petit), et que l'on ait continuité par rapport à la donnée initiale. Comme nous nous interessons au comportement asymptotique de tels flots, nous supposerons que l'on puisse aller jusqu'à $T = +\infty$.

Remarque 2.2. *Ceci amène à constater que si on traite avec deux espaces différents $V \subset H$, on dispose de deux semi-groupes différents, car les topologies en dimension infinie ne coincident pas.*

Définition 2.3. *Le semi-groupe sera dit dissipatif s'il possède un ensemble absorbant* $\mathbf{B}$*, i.e. un ensemble borné dans H tel que pour toute trajectoire $S(t)u_0$, il existe un temps T (qui ne dépend que de $||u_0||_H$), tel que pour $t > T$, $S(t)u_0 \in$* $\mathbf{B}$.

Supposons avoir un tel ensemble absorbant. Les questions suivantes se pose alors.
Question 1 : Existe-t-il un attracteur global $\mathcal{A}$ pour le système dynamique ainsi défini ?
Rappelons

Définition 2.4. *$\mathcal{A}$ est un attracteur global pour $S(t)$ si $\mathcal{A}$ est un sous-ensemble compact de H, invariant par le flot des solutions ($S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$, $t > 0$), qui attire toutes les trajectoires (uniformément sur les bornés de H).*

Question 2 : Cet attracteur est-il de dimension (fractale ou de Haussdorf) finie ?
Rappelons que cette propriété est non triviale car nous travaillons dans un espace de dimension infinie H, et qu'un compact de H peut être de dimension infinie.

Question 3 : Qu'en est-il de la régularité d'un tel attracteur ?
Nous ne parlons pas ici de la régularité de $\mathcal{A}$ en tant qu'ensemble, mais de la régularité des points qui le composent : sont-ils dans un espace de Hilbert plus petit que H ?
Le reste de cet article est consacré à tenter de donner des réponses à ces questions.

3. Existence de l'attracteur

3.1. Solutions fortes de l'équation de KdV. Considérons ici la variable d'espace x dans $\mathbb{T}$. Considérons la force extérieure f dans $\dot{L}^2(\mathbb{T})$,

$$\dot{L}^2(\mathbb{T}) = \{u \in L^2(\mathbb{T}); \int_{\mathbb{T}} u(x)dx = 0\}.$$

Le problème de Cauchy associé à (2) (notez que pour le problème de Cauchy local la dissipation et le terme de force ne jouent aucun rôle) a tout d'abord été abordé à l'aide de méthodes de compacité [26] ou de régularisation [4]. Le résultat principal avec ces méthodes est le suivant

Théorème 3.1. *(2) fournit un semi-groupe dissipatif dans* $\dot{H}^2(\mathbb{T}) = \dot{L}^2(\mathbb{T}) \cap H^2(\mathbb{T})$.

Ici $H^2(\mathbb{T})$ est l'espace de Sobolev classique des fonctions dont les dérivées premières et secondes sont dans $L^2(\mathbb{T})$. Formellement, on doit supposer par ces méthodes la donnée initiale suffisamment régulière pour assurer l'unicité de la solution : considérons deux solutions de (2), et considérons $w(t) = S(t)u_0 - S(t)v_0 = u - v$ leur différence. Alors

$$w_t + w_{xxx} + \gamma w = -(\frac{u+v}{2} w)_x, \tag{5}$$

d'où, en multipliant par w et en intégrant par parties

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w||^2_{L^2(\mathbb{T})} + \gamma||w||^2_{L^2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} (u_x(t,x) + v_x(t,x))w(t,x)^2 dx. \tag{6}$$

Par injection de Sobolev u_x est une fonction bornée et on conclut par un argument de type Gronwall.

Ceci permet de se convaincre que le problème de Cauchy est localement bien posé en temps. Pour démontrer l'existence d'un borné absorbant, il faut s'appuyer sur des inégalités d'energie dans $H^2(\mathbb{T})$. Nous renvoyons ici à [10].

Remarque 3.2. *Il faut ici rappeler que dans le cadre conservatif (1), l'équation est complètement intégrable par la méthode de la diffusion inverse. Ceci explique qu'il existe une infinité d'invariants pour l'équation de KdV dans le cas conservatif. Ces égalités d'énergie se transforment en inégalités dans le cas dissipatif.*

Nous avons assez de matériel pour donner les premiers résultats concernant l'existence d'un attracteur global pour le système dynamique associé à [10].

Théorème 3.3. *Toute solution de (2) converge dans* H^2*-faible pour* $t \to +\infty$ *vers* $\mathcal{A}_2$*. Cet ensemble est un attracteur faible pour le système dynamique*

Remarque 3.4. *La notion d'attracteur global a été en premier lieu introduite en dimension infinie pour des équations aux dérivées partielles paraboliques sur des domaines bornés. Pour de tels systèmes, le semi-groupe associé est régularisant en temps fini (positif), c'est à dire envoie par exemple* H^2 *dans* H^3*. C'est donc un opérateur compact sur* H^2*, et l'attracteur global est construit comme ensemble omega-limite du borné absorbant. Pour des équations d'ondes comme (2), le semi-groupe associé n'est pas régularisant ; le problème d'évolution est réversible en temps ! On perd donc la compacité du semi-groupe pour la topologie forte ce qui a conduit JM. Ghidaglia a travailler avec la topologie faible. Ceci explique la terminologie "faiblement dissipatif".*

La question naturelle fut alors de se demander si cet attracteur faible n'était pas un attracteur fort. Appliquant un argument subtil due à J. Ball (publié dans [3], plus de dix ans après avoir été présenté lors d'un séminaire), le résultat fut amélioré comme suit (cf [11])

Théorème 3.5. *$\mathcal{A}_2$ est un attracteur au sens classique dans $H^2(\mathbb{T})$.*

3.2. Cas de la droite réelle. Supposons ici x dans $\mathbb{R}$. La situation dans ce cadre était sensiblement différente. Tout d'abord parce que les méthodes développées par C. Kenig, G. Ponce et L. Vega perméttaient de résoudre le problème de Cauchy dans l'espace $H^1(\mathbb{R})$; par opposition aux méthodes de compacité l'idée est de résoudre par une méthode de point fixe l'équation intégrale associée à (2) dans un espace convenable. Succintement définissons par $W(t)u_0$ le semi-groupe linéaire associé à l'équation d'Airy

$$u_t + u_{xxx} = 0;\ u(0,x) = u_0(x). \tag{7}$$

Même si ce goupe est un groupe d'isométrie sur $L^2(\mathbb{R})$, on peut démontrer une décroissance en norme $L^\infty(\mathbb{R})$ de la solution issue d'une fonction intégrable. Cette propriété de *dispersion* sur le semi-groupe s'explique mathématiquement par des argument de type phase stationnaire. De plus, des résultats fins d'analyse harmonique permettent d'établir des résultats de régularisation presque partout en temps pour ce groupe. Une fois établi tous ces résultats sur le groupe linéaire, il faut démontrer que l'équation (la variable d'espace étant omise)

$$u(t) = W(t)u_0 - \frac{1}{2}\int_0^t W(t-s)\partial_x(u^2(s))ds, \tag{8}$$

admet un point fixe dans un sous-espace ad hoc de $C(-T, T; H^1(\mathbb{R}))$. Nous avons écrit ici l'équation dans le cas conservatif, la dissipation et la force extérieure ne jouant aucun rôle dans le problème de Cauchy local. Le temps d'existence dépendant de la norme associée de la condition initiale, on étend le résultat d'existence en utilisant les inégalités d'énergie associée à l'EDP sous-jacente (il faut au passage prouver que la solution de (8) est effectivement solution de cette EDP).

La seconde différence est liée au fait que l'injection de l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ n'est pas compacte. Il est donc plus délicat de prouver un quelconque résultat de compacité pour un ensemble candidat au rôle d'attracteur. En premier lieu cet obstacle fut contourné dans [1], en supposant que la force extérieure était de plus dans un espace à poids. Il s'avère en fait que cet hypothèse est superflue. Dans [18], P. Laurençot établit

Théorème 3.6. *Il existe $\mathcal{A}_2$ un attracteur global dans $H^2(\mathbb{R})$.*

L'idée de la preuve est de décomposer, le semi-groupe en deux opérateurs continus $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$, où $S_1(t)$ est un opérateur compact et où $S_2(t)$ converge vers 0 uniformément sur tout borné. Ceci est lié à la notion de semi-groupe asymptotiquement compact (cf [25], [15], [22]).

Pour être complet, citons que l'étude du semi-groupe de KdV dans $H^1(\mathbb{R})$ a été réalisée dans [24], en s'appuyant sur les techniques de C. Kenig, G. Ponce et L. Vega.

4. Dimension de l'attracteur

4.1. Contraction des volumes. Nous présentons ici une approche qui permet de démontrer que dans certains cas la dimension de l'attracteur global est finie. Ici nous ne précisons pas ce que nous entendons comme dimension (il s'agit du distingo entre dimension de Hausdorff et dimension fractale). Nous esquissons ici une adaptation de la méthode de A. Douady et J. Oesterlé au cadre de la dimension infinie (pour une approche complète et rigoureuse nous renvoyons à [25] et aux références qui s'y trouvent).

L'idée est de regarder comment le flot contracte les volumes infinitésimaux. Considérons par exemple le flot donné par l'équation (2) sur $\dot{L}^2(\mathbb{T}) \cap H^2(\mathbb{T})$. Suivant l'article original de JM. Ghidaglia, nous allons expliquer comment démontrer que $\mathcal{A}_2$ présente une dimension finie dans $\dot{H}^1(\mathbb{T})$.

Remarque 4.1. *Ici encore, nous avons à jongler entre différentes topologies. Remarquons que si $V \subset H$, alors l'injection naturelle étant une application lipschitzienne, la dimension dans H d'un ensemble est majorée par la dimension dans V.*

Qui dit travailler avec des volumes infinitésimaux dit travailler avec la différentielle du flot. Démontrer que le flot est différentiable en dimension infinie est non trivial ; il faut parfois se contenter de démontrer qu'il est différentiable le long de l'attracteur. Sur notre exemple, on peut démontrer (cf [10])

Proposition 4.2. *Soit $u(t) = S(t)u_0$ une trajectoire complète dans $\mathcal{A}_2$. Alors $v = DS(t)(u_0)h$ est bien défini à valeurs dans $\dot{H}^1(\mathbb{T})$, et est solution de l'équation d'évolution non autonome*

$$v_t + \gamma v + v_{xxx} + (uv)_x = 0;\ v(0) = h. \tag{9}$$

On considère alors m un entier et $h_1, ...h_m$ une famille orthonormée dans $H^1(\mathbb{T})$. Soient $v_i(t) = DS(t)(u_0)h_i$ les solutions de (9) issues de h_i. Si on forme alors le déterminant de Gram $G_m(t)$ dans $H^1(\mathbb{T})$ de $v_1(t), ..., v_m(t)$, alors celui-ci représente l'évolution d'un m-volume infinitésimal le long du flot. Il est alors prouvé dans [10]

Théorème 4.3. *Il existe m assez grand tel que pour tout choix du m-uplet $h_1, ...h_m$ le volume $G_m(t)$ décroit vers 0 quand t tend vers $+\infty$. En conséquence, il existe une constante numérique C telle que $\dim_{H^1}(\mathcal{A}_2) \le Cm$.*

Esquisse de preuve : on peut démontrer que $G_m(t)$ est solution de l' équation différentielle

$$\frac{d}{dt}G_m(t) = \mathrm{Tr}\left(DS(t)(u_0)Q_m(t)\right)G_m(t), \tag{10}$$

où le membre de droite représente la trace de l'opérateur de rang fini $DS(t)(u_0)Q_m(t)$, $Q_m(t)$ étant le projecteur sur l'espace vectoriel engendré par $v_1(t), ..., v_m(t)$. Par conséquent si, pour m assez grand,

$$\Lambda_m = \limsup_{t\to+\infty} \sup_{u_0\in\mathcal{A}_2} \frac{1}{t}\int_0^t \sup_{\mathrm{Rang}Q=m} Tr\left((DS(s)(u_0)Q\right) ds < 0, \tag{11}$$

alors on a décroissance des volumes m-dimensionels. Le membre de gauche dans (11) correspond à la somme des m premiers exposants de Lyapunov (globaux) du système (cf [25]).

Il est établit dans [10] qu'il existe K dépendant des données de l'équation γ, f tel que

$$\Lambda_m \leq -2\gamma m + K \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\lambda_j^{1/4}}, \tag{12}$$

où les λ_j sont les valeurs propres de l'opérateur de Laplace sur $\mathbb{T}$. Par conséquent

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\lambda_j^{1/4}} \sim c\sqrt{m}, \tag{13}$$

et le semi-groupe décroit les volumes dès que $-2\gamma m + cK\sqrt{m} < 0$.

4.2. Autres questions relatives à la dimension. La première remarque est que la borne supérieure de la dimension de l'attracteur provenant de la méthode précédente est très couteuse en termes des données de l'équations que sont par exemple $\frac{1}{\gamma}, ||f||_{L^2}$. Des travaux sont en cours pour améliorer l'estimation de cette borne supérieure.

Un problème ouvert est aussi de donner une borne inférieure de la dimension de cet attracteur en fonction des données $\frac{1}{\gamma}, ||f||_{L^2}$. Une démarche classique est d'exhiber une structure incluse dans $\mathcal{A}_2$ (une solution stationnaire par exemple) et de calculer la dimension de la variété instable liée à cette structure. On obtient ainsi une borne inférieure sur la dimension de $\mathcal{A}_2$. Nous voudrions ici citer le travail numérique de M. Cabral et R. Rosa qui décrit une complexité croissante de la structure de $\mathcal{A}_2$ quand les données $\frac{1}{\gamma}, ||f||_{L^2}$ augmentent.

Pour conclure ce bref survol des questions relatives à la dimension de l'attracteur, nous revenons au cas où x décrit la droite réelle dans son ensemble. La encore, la situation est sensiblement différente. Comme nous l'avons vu précedemment, la majoration de la dimension de l'attracteur dépend de la répartition des valeurs propres de l'opérateur de Laplace (en fonction du domaine considéré). Dans le cas de la droite réelle, la reproduction stricto-sensu du même calcul aboutirait à une impasse. Se pose alors le problème ouvert suivant : dans le cas $x \in \mathbb{R}$ l'attracteur est-il de dimension finie ? Un moyen de contourner la difficulté serait de supposer la force extérieure dans un certain espace à poids (cf [1]). Pour le cas général (c'est à dire sans cet hypothèse supplémentaire), la réponse pourrait être positive ; la clef serait certaines inégalités de Sobolev collectives, établies dans un autre cadre par E. Lieb et W. Thirring (cf [25], [19], [23]).

5. Régularité de l'attracteur

5.1. Un problème lié à la dimension infinie. Considérons une nouvelle fois notre système dynamique (2), par exemple vu dans $\dot{L}^2(\mathbb{T}) \cap H^2(\mathbb{T})$, avec une force extérieure dans $\dot{L}^2(\mathbb{T}) \cap H^k(\mathbb{T})$. L'exemple le plus simple de structures dans cet attracteur sont les solutions stationnaires u^* solutions de

$$u^*_{xxx} + \gamma u^* + u^* u^*_x = f(x), \tag{14}$$

Pour $k \geq 0$, il est aisé de voir que u^* appartient en fait à $H^{k+3}(\mathbb{T})$. Par contre l'attracteur $\mathcal{A}_2$ est un sous ensemble de $H^2(\mathbb{T})$. Existe-t-il des trajectoires dans l'attracteur moins régulières que les solutions stationnaires ?

Cette question a plusieurs conséquences sur la dynamique du problème. Admettons un instant que l'on puisse considérer deux flots associés à (2), l'un dans $\dot{H}^1(\mathbb{T})$, l'autre dans $\dot{H}^2(\mathbb{T})$. Admettons avoir prouvé l'existence des deux attracteurs correspondants $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$. Par invariance par le flot, il est aisé de voir que $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$. Enonçons alors

Proposition 5.1. *Si $\mathcal{A}_1 \subset \dot{H}^2(\mathbb{T})$, alors $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1$.*

Ceci veut dire que l'attracteur global du système, qui représente le régime permanent du flot, ne dépend pas du l'espace mathématique choisi pour étudier le flot.

Un autre conséquence liées à ces questions de régularité de l'attracteur (régularité spatiale mais aussi temporelle des trajectoires) est la notion de *modes déterminants.* Introduits par C. Foias et G. Prodi pour les équations de Navier-Stokes, les modes déterminants correspondent à un sous-ensemble de dimension finie tel que la projection d'une solution sur ce sous-espace détermine l'asymptotique de cette solution. Le nombre de modes déterminants, à l'instar de la dimension de l'attracteur, mesure la complexité du système dynamique considéré (cf [8], [16]).

5.2. Equations d'ondes faiblement amorties. La théorie des systèmes dynamiques en dimension infinie a été tout d'abord introduite pour une classe d'équations aux dérivées partielles paraboliques, telles le système de Navier-Stokes en dimension 2 ou des équations de type réaction-diffusion. Pour de telles équations, la question de régularité de l'attracteur se réglait systématiquement par l'argument suivant : soit $\mathcal{A}$ un ensemble invariant par un semi-groupe régularisant $S(t)$ (qui envoie H^k dans H^{k+p} par exemple pour $t > 0$), alors cet ensemble est forcément inclus dans H^{k+p}. Pour des équations d'évolution paraboliques avec une force extérieure analytique (dans une certaine classe de Gevrey par exemple), on aboutit alors à un attracteur constitué de fonctions analytiques.

Pour les équations d'ondes amorties, un tel raisonnement tombe en défaut, les flots étant réversibles en temps et donc sans effet régularisant *en temps fini.* Un premier résultat pour une équation d'onde, l'équation de sine-Gordon est établi par A. Haraux. Soit

$$u_{tt} + \gamma u_t - u_{xx} = f + \beta \sin u, \tag{15}$$

avec données initiales $(u(0), u_t(0))$ dans $V = H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$ et la force extérieure de carré intégrable. Soit $S(t)$ le semi-groupe correspondant. Alors

Théorème 5.2. *$S(t)$ possède un attracteur global dans V qui est un sous-ensemble compact de $(H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)) \times H_0^1(0,1)$.*

Cette propriété remarquable a été appelée *effet régularisant asymptotique*; de manière imagée, le flot agissait comme si $S(+\infty)$ présentait un effet régularisant. A ce moment, au milieu des années 1990, la classification des équations d'évolution dissipative s'établissait comme suit :

- Equations paraboliques (effet régularisant en temps fini)
- Equations d'ondes avec effet régularisant asymptotique (typiquement équations du second ordre comme sine-Gordon)
- Equations d'ondes faiblement amorties (comme les équations dispersives amorties que sont Schrödinger non-linéaire et Korteweg-de Vries)

Nous allons maintenant voir que ce distingo n'a pas lieu d'être

5.3. Effet régularisant asymptotique pour KdV. Suivant un résultat similaire pour les équations de Schrödinger non-linéaires (cf [12]), I. Moise et R. Rosa établissent le résultat suivant

Théorème 5.3. *Considère la force extérieure f dans $\dot{H}^k(\mathbb{T})$. Considère le flot associé à (2) dans $\dot{H}^3(\mathbb{T})$. Alors il existe un attracteur global $\mathcal{A}_3$ qui est un sous-ensemble compact de $\dot{H}^k(\mathbb{T})$.*

Esquisse de preuve : supposons avoir prouvé l'existence de l'attracteur global $\mathcal{A}_3$. Soit $u(t)$ une trajectoire complète incluse dans cet attracteur. Développons en séries de Fourier

$$u(t,x) = \sum_{k\neq 0} \hat{u}_k(t) e^{ikx}. \tag{16}$$

La régularité spatiale de u se lit sur la queue de son développement de Fourier. On introduit alors un seuil de troncature en fréquence, $N >> 1$ (N dépend en fait de γ, f), et on traque

$$z(t,x) = Q_N u(t,x) = \sum_{|k|>N} \hat{u}_k(t) e^{ikx}, \tag{17}$$

par $Z(t,x)$ solution de l'équation d'évolution non-autonome

$$Z_t + \gamma Z + Z_{xxx} + (Q_N)\left((u - z + Z)(u_x - z_x + Z_x)\right) = (Q_N) f, \tag{18}$$

qui n'est autre que la projection de l'équation de KdV sur les grandes fréquences, mais avec la condition initiale $Z(0) = 0$. Tout le travail consiste à prouver que $Z(t)$ demeure dans un sous-ensemble borné de $H^k(\mathbb{T})$ et que Z et z sont arbitrairement proches quand t tend vers $+\infty$. $\square$

Remarquons que ce résultat implique que si la force régulière est une fonction de classe C^∞, alors l'attracteur est aussi constitué de fonctions de classe C^∞. Un problème ouvert aujourd'hui [28] est d'établir le résultat correspondant où analytique remplace C^∞, à l'instar du résultat [21] pour les équations de Schrödinger non-linéaires.

Ces différents résultats appellent les remarques suivantes : qu'en est-il du semi-groupe sur $\dot{H}^2(\mathbb{T})$ pour KdV ? Pourquoi avoir seulement $\mathcal{A}_3$ dans $H^k(\mathbb{T})$ alors que les solutions stationnaires sont dans $H^{k+3}(\mathbb{T})$? Les freins sont-ils techniques où existe-t-il une raison plus profonde ?

6. Solutions peu régulières pour KdV

6.1. L'approche de J. Bourgain. Au début des années 1990, J. Bourgain a introduit une nouvelle approche qui a révolutionné l'étude du problème de Cauchy pour les équations d'ondes dispersives. Ceci a aussi eu un impact sur l'étude des système dynamiques dissipatifs correspondants.

L'idée est de construire une solution comme point fixe (sur des petits intervalles de temps) de l'équation intégrale (8), dans les espaces $X^{\rho,b}$ dont la norme est la suivante (présentée ici dans le cas $x \in \mathbb{R}$)

$$||u||^2_{X^{\rho,b}} = \int\int_{\tau\in\mathbb{R},\xi\neq 0} (1 + |\tau - \xi^3|)^{2b} |\xi|^{2\rho} |\hat{u}(\xi,\tau)|^2 d\tau. \tag{19}$$

Cette norme s'explique de la manière suivante. Soit $u(t,x)$ une fonction. Soit $W(t)$ le groupe linéaire correspondant à l'équation d'Airy (7). Alors

$$||u||^2_{X^{\rho,b}} = ||W(-t)u(t,x)||^2_{H^b_t H^\rho_x}.$$

Cette norme trivialise les estimations sur le groupe libre (cf [9], [5]) et concentre les difficultées sur le terme bilinéaire. Ce programme a été poursuivi par de nombreux auteurs. Un des premiers résultat de J. Bourgain [5] avec le méthode est cette suivant (écrit dans le cas dissipatif)

Théorème 6.1. *Le semi-groupe $S(t)$ correspondant à KdV est bien défini dans $L^2(\mathbb{R})$ (respectivement dans $\dot{L}^2(\mathbb{T})$).*

Il faut maintenant observer que ces méthodes permettent d'appréhender le problème de Cauchy pour KdV en deça de L^2, i.e. pour des données dans des espaces de Sobolev d'ordre négatif.

Nous allons conclure maintenant cet article en présentant des résultats qui utilisent les méthodes de J. Bourgain pour les questions inhérentes à la régularité de l'attracteur. Des recherches sont en cours pour utiliser ces méthodes sur des questions relatives aux calculs sur les dimensions.

6.2. Régularité de l'attracteur : derniers résultats. Les deux théorèmes suivants concluent l'étude de la régularité de l'attracteur dans le cadre L^2. Le premier correspond à [13], le second à [14]. Supposons la force extérieure de carré intégrable.

Théorème 6.2. *L'équation de KdV dans $\dot{L}^2(\mathbb{T})$ possède un attracteur global $\mathcal{A}$ dans L^2, qui est un sous-ensemble compact de H^3.*

Théorème 6.3. *L'équation de KdV dans $L^2(\mathbb{R})$ possède un attracteur global $\mathcal{A}$ qui est un sous-ensemble compact de H^3.*

Comme relevé précedemment ceci a une conséquence très simple. Vous pouvez définir le flot associé à l'équation de KdV dissipative sur L^2, H^1, H^2, vous avez toujours le même ensemble comme attracteur global.

Pour conclure, nous souhaitons citer le travail de K. Tsugawa [27] (en s'appuyant sur la "I-method" de J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka et T. Tao [6] inspirée des travaux de Bourgain), qui démontre des résultats d'existence d'attracteurs pour le flot de KdV dans des espaces de Sobolev d'ordre négatif (assez petits).

Références

[1] E. Alarcon, *Existence and finite dimensionality of the global attractor for a class of nonlinear dissipative equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 123 (1993), no. 5, 893–916.

[2] C. J. Amick, J. L. Bona, and M. E. Schonbek, *Decay of solutions of some nonlinear wave equations*, J. Differential Equations, 81 (1989), pp. 1–49

[3] J. Ball, *Global attractors for damped semilinear wave equations. Partial differential equations and applications*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 10 (2004), no. 1-2, 31–52.

[4] J. Bona and R.S. Smith, *The initial value problem for Korteweg-de Vries equation*, Philos. trans. Roy. Soc. London ser. A , 278, pp 555-604, (1975).

[5] J. Bourgain, *Fourier transform restriction phenomena for certain lattices subsets and application to nonlinear evolution equations II. the KdV equation*, GAFA 3, 209-262, (1993).

[6] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka et T. Tao *Global well-posedness for KdV in Sobolev spaces of negative index*, Electron. J. Differential Equations 2001, No. 26, 7 pp.

[7] A. Douady et J. Oesterlé, *Dimension de Hausdorff des attracteurs*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 290 (1980), no. 24, A1135–A1138.

[8] C. Foias et G. Prodi, *Sur le comportement global des solutions non-stationnaires des équations de Navier-Stokes en dimension* 2, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 39 1967 1–34.

[9] J. Ginibre, *Le problème de Cauchy pour des EDP semi-linéaires périodiques en variables d'espace (d'après Bourgain)*, Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/95. Astérisque No. 237 (1996), Exp. No. 796, 4, 163–187.

[10] J-M. Ghidaglia, *Weakly damped forced Korteweg-de Vries equations behave as a finite dimensional dynamical system in the long time*, J. Diff. Eq., 74, pp 369-390, (1988).

[11] J-M. Ghidaglia, *A note on the strong convergence towards attractors for damped forced KdV equations*, J. Diff. Eq. **110**, 356-359, (1994).

[12] O. Goubet, *Regularity of the attractor for a weakly damped nonlinear Schrodinger equation*, Applicable Analysis, vol. 60, pp 99-119, 1996.

[13] O. Goubet, *Asymptotical smoothing effect for a weakly damped nonlinear KdV equation*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, vol 6, 3, pp 625-644, 2000.

[14] O. Goubet, R. Rosa, *Asymptotic smoothing and the global attractor for a weakly damped kdv equation on the real line*, J. of Diff. Eq., vol 185, 1, pp 25-53, 2002.

[15] J. Hale, *Asymptotic behavior of Dissipative Systems*, Math. surveys and Monographs, vol 25, AMS, Providence, 1988.

[16] J. Hale et G. Raugel, *Regularity, determining modes and Galerkin methods*, J. Math. Pures Appl. (9) 82 (2003), no. 9, 1075–1136.

[17] A. Haraux, *Two remarks on dissipative hyperbolic problems*, Nonlinear Partial Diff. Eq. and their Appl., Collège de France Seminar, 7, H. Brezis and J.L. Lions Eds., Pitman, London, 1985.

[18] P. Laurençot, *Compact attractor for weakly damped driven Korteweg-de Vries equations on the real line*, Czechoslovak Math. J. 48(123) (1998), no. 1, 85–94.

[19] E. Lieb, W. Thirring, Inequalities for the moments of the eigenvalues of the Schrödinger hamitlonian and their relation to Sobolev inequalities, *studies in mathematical physics*, E. Lieb, B. Simon and A. Wightman Eds., Princeton University Press, Princeton 1976.

[20] I. Moise and R. Rosa, On the regularity of the global attractor of a weakly damped, forced Korteweg-de Vries equation, *Adv. in Diff. Equ., 2, n° 2*, (1997), 257-296.

[21] M. Oliver and E.S. Titi, Analyticity of the attractor and the number of determining nodes for a weakly damped driven nonlinear Schrödinger equation, *Indiana Univ. Math. Journal*, vol 47, 1, (1998), 49-73.

[22] G. Raugel, *Global attractors in partial differential equations*. Handbook of dynamical systems, Vol. 2, 885–982, North-Holland, Amsterdam, 2002.

[23] R. Rosa, communication personnelle, 2004.

[24] R. Rosa, *The global attractor of a weakly damped, forced Korteweg-de Vries equation in* $H^1(\mathbb{R})$, VI Workshop on Partial Differential Equations, Part II (Rio de Janeiro, 1999). Mat. Contemp. 19 (2000), 129–152.

[25] R. Temam, *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics,* Springer-Verlag, Second Edition, 1997.

[26] R. Temam, *Sur un problème non-linéaire*, J. Math. Pures et Appli., 48, pp 159-172, (1962).

[27] K. Tsugawa, *Existence of the global attractor for weakly damped, forced KdV equation on Sobolev spaces of negative index*, Commun. Pure Appl. Anal. 3 (2004), no. 2, 301–318.

[28] M. Ziane, communication personnelle, 2004.

(Olivier Goubet) LAMFA CNRS UMR 6140,
Université de Picardie Jules Verne,
33 rue Saint-Leu 80039 Amiens cedex, France