Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser.
Volume 32, 2005, Pages 67–74
ISSN: 1223-6934

Modélisation mathématique en Mécanique du Contact

Mircea Sofonea

Résumé. Dans ce travail nous présentons quelques considérations sur la modélisation et l'analyse variationnelle des modèles mathématiques décrivant le contact entre un corps déformable et un obstacle. Nous exemplifions ces propos à travers l'étude d'un problème élasto-visco-plastique avec compliance normale et frottement de Coulomb.

Classification AMS 2000 des sujets. Primary 74M15 ; Secondary 74M10, 49J40, 35J85.
Mots clef et phrases. contact, compliance normale, frottement de Coulomb, matériau élasto-visco-plastique, modélisation, inéquation variationnelle, solution faible.

1. Introduction

Les phénomènes de contact impliquant des corps déformables abondent en industrie et dans la vie de tous les jours. Le contact du piston avec la chemise, de la roue avec le rail et d'une chaussure avec le sol ne représentent que trois exemples parmi bien d'autres. Compte tenu du fait que ces phénomènes jouent un rôle important dans les structures et les systèmes mécaniques, ils ont été intensivement étudiés depuis longue date et la littérature relevant des Sciences de l'Ingénieur qui leur est dédiée est assez riche.

La littérature mathématique dédiée à l'étude des phénomènes de contact est plus recente. La raison réside dans le fait que, accompagnés de phénomènes physiques et de surface complexes, les processus de contact sont modélisés par des problèmes aux limites non linéaires, très difficiles. L'une des premières publications mathématiques concernant ce sujet est celle de Signorini [12], où le problème de contact unilatéral entre un corps linéairement élastique et une fondation rigide est formulé. Il s'ensuit le travail de Fichera [4] où le problème de Signorini a été résolu, en utilisant des arguments des inéquations variationnelles de type elliptique. Ceci étant dit, on peut affirmer sans nous tromper que l'étude mathématique des problèmes de contact commence avec la monographie de Duvaut et Lions [3], qui a le mérite de présenter la formulation variationnelle de plusieurs problèmes de contact, accompagnée de résultats d'existence et d'unicité de la solution. D'autres références incontournables sont les livres de Panagiotopoulous [9], Kikuchi et Oden [7], Hlaváček, Haslinger, Nečas et Lovíšek [6], dans les deux dernières l'analyse numérique de quelques problèmes de contact étant présentée. Loin de faire une énumération complète, nous citons aussi les ouvrages édités de Raous, Jean et Moreau [10] et Martins et Monteriro Marques [8], qui présentent l'état de l'art dans le domaine.

Une étude complète des phénomènes de contact comprend généralement les étapes suivantes : la modélisation, l'analyse variationnelle et numérique des modèles et la mise en oeuvre numérique. Analysons brièvement l'objectif de chacune de ces étapes.

Reçu: le 18 Novembre, 2004.

La modélisation est une étape pluridisciplinaire ; elle comprend l'ensemble des hypothèses de nature mécanique, thermodynamique et tribologique prises en considération dans la description d'un phénomène de contact. A l'issue de cette étape on associe à tout processus de contact un *modèle mathématique*, représenté par un système d'équations aux dérivées partielles associé aux conditions aux limites et éventuellement aux conditions initiales, décrivant le processus en question.

L'analyse variationnelle des modèles a pour but de préciser la consistence des modèles pour le contact ; elle comprend la dérivation de la *formulation faible* des modèles ainsi que des résultats d'existence et éventuellement d'unicité de la solution ; son objectif est aussi celui d'étudier des propriétes liées au comportement de la solution (régularité, stabilité, comportement assymptotique).

L'analyse numérique des modèles est destinée à l'étude des schémas semi-discrétisés et totalement discrétisés associés aux formulations faibles dérivées à l'étape précédente ; on y établit des résultats d'existence et d'unicité des solutions discrètes, suivis de résultats d'estimation de l'erreur et de convergence des solutions discrètes vers la solution du problème continu.

Enfin, *la mise en oeuvre numérique* a pour but d'obtenir des simulations numériques associées aux schémas discrétisés ; le bien fondé des stratégies choisies dans cette étape est garanti par les résultats de convergence dérivés à l'étape précedente. Comparés aux essais test, les résultats numériques permettent de vérifier la fiabilité des modèles mathématiques utilisés dans la description du contact.

Dans cet article nous allons présenter quelques considérations sur les deux premières étapes ci-dessus, la modélisation et l'analyse variationnelle des modèles, que nous allons illustrer à travers un exemple concret, modélisant le contact frottant d'un corps élasto-visco-plastique avec une fondation. Enfin, nous terminons avec quelques conclusions sur le rôle des Mathématiques Appliquées en Mécanique du Contact.

2. Modélisation du contact

Tel qu'il a été déjà évoqué ci-dessus, la modélisation d'un phénomène de contact est déterminée par l'ensemble des hypothèses prises en considération dans sa description. Ces hypothèses peuvent influencer ou bien la forme et la structure du système d'équations aux dérivées partielles, ou bien les conditions aux limites du modéle mathématique associé.

Parmi les hypothèses qui influencent le système d'équations aux dérivées partielles citons les hypothèses portant sur la *géométrie de la déformation* (qui conduisent à des processus en grandes ou en petites déformations), les hypothèses portant sur le *processus mécanique* (qui peut être dynamique, quasistatique ou statique), ainsi que les hypothèses portant sur le *comportement du matériau* (qui peut-être élastique, viscoélastique, viscoplastique ou autre). A part ceci, les équations du modèle peuvent être influencées par la considération de différents *phénomènes additionnels* (effets thermiques, piézoélectriques) ou bien par la considération de différentes *géométries particulières* (plaques, coques, poutres).

Les conditions aux limites sur la surface de contact sont décrites à la fois en direction de la normale et dans le plan tangent, ces dernières étant appelées *conditions de frottement*. En direction de la normale nous pouvons distinguer le contact *unilatéral* (lorsque l'obstacle est rigide), *bilatéral* (lorsqu'il n'y a pas de séparation entre le corps et l'obstacle), de *compliance normale* (lorsque l'obstacle est déformable) ou bien de *réponse normale instantanée* (lorsque la surface de contact est lubrifiée). A part le cas limite lorsque la contrainte tangentielle est nulle (le cas sans frottement), le frottement peut être *à seuil* (quand le glissement se produit que lorsque la force de frottement atteint une valeur critique) ou *sans seuil* (lorsque le glissement se produit pour n'importe quelle force de frottement). Parmi les lois de frottement à seuil, les plus utilisées dans la littérature sont celles de *Coulomb* et de *Tresca*; elles modélisent un frottement sec, alors que les lois de frottement sans seuil modélisent un frottement lubrifié.

Les conditions aux limites sont aussi influencées par la prise en considération des différents phénomènes sous-jacents qui accompagnent le contact avec frottement : l'adhérence, l'usure, les effets thermiques. Par ailleurs, même si on néglige ces phénomènes et on se limite au contact frottant avec seuil, la dépendance du seuil de frottement par rapport au glissement ou à la vitesse de glissement peut être envisagée, influençant ainsi les conditions aux limites du modèle mathématique considéré.

Vu les commentaires ci-dessus, nous concluons qu'il y a une grande variété d'hypothèses à prendre en considération lors de la modélisation des phénomènes de contact. Par ailleurs, la prise en compte des différentes conditions de contact et de frottement associées à des lois de comportement de plus en plus complexes conduit à des modèles mathématiques nouveaux et non standards, tels que nous allons voir dans les deux sections suivantes.

3. Analyse variationnelle des modèles

En général, le système d'équations aux dérivées partielles associé aux conditions aux limites et aux conditions initiales obtenu à l'étape de modélisation n'admet pas de solution classique. La raison réside principalement dans les non linéarités prises en considération dans la description du contact. Pour palier cette difficulté et dans le but de donner un sens au modèle mathématique obtenu, on est obligé à passer par la formulation *faible* ou *variationnelle* du modèle. Obtenue à l'aide de la formule de Green d'intégration par partie, cette formulation a l'avantage de prendre en considération d'une manière intrinsèque les frontières libres et les différentes conditions aux limites, et bien souvent elle conduit à des *inéquations variationnelles.*

A titre d'exemple, dans cette section nous nous limitons à passer en revue les différents types d'inéquations variationnelles représentant la formulation faible de quelques problèmes de contact pour des matériaux élastiques linéaires, dans le cas statique ou quasistatique. Partout ci-dessous $(V, (\cdot,\cdot)_V)$ représente un espace de Hilbert réel associé au champ des déplacements $\boldsymbol{u}$, a est une forme bilinéaire sur V associée aux coefficients élastiques, alors que $\boldsymbol{f}$ décrit l'action des efforts extérieurs (les forces appliquées de volume et de surface).

Le problème d'équilibre d'un corps élastique en contact sans frottement avec un obstacle rigide conduit à une inéquation variationnelle elliptique de première espèce de la forme

$$\boldsymbol{u} \in U, \quad a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) \geq (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})_V \quad \forall \boldsymbol{v} \in U, \tag{1}$$

où U est un convexe fermé non vide de V représentant l'ensemble des déplacements admissibles au problème et $\boldsymbol{f} \in V$. Si on suppose maintenant que le contact est maintenu tout au long du processus et qu'il est associé à la loi statique de frottement de Tresca, on arrive à une inéquation variationnelle de deuxième espèce de la forme

$$\boldsymbol{u} \in V, \quad a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) + j(\boldsymbol{v}) - j(\boldsymbol{u}) \geq (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})_V \quad \forall \boldsymbol{v} \in V, \tag{2}$$

où $j : V \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle convexe et semicontinue inférieurement, décrivant le frottement. En considérant maintenant un contact avec compliance normale et frottement statique de Coulomb on arrive à une formulation variationnelle de la forme

$$\boldsymbol{u} \in V, \quad a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) + j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geq (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})_V \quad \forall \boldsymbol{v} \in V, \tag{3}$$

où $j : V \times V \to \mathbb{R}$. La nouveauté consiste ici dans la dépendance de la fonctionnelle j de la solution du problème, ce qui conduit à une *inéquation quasivariationnelle* de type elliptique.

Le cas quasistatique est plus délicat ; il se caractérise par la présence de la dérivée temporelle de la solution, notée $\dot{\boldsymbol{u}}$, ce qui conduit à imposer une valeur initiale pour le champ des déplacements. Par exemple, la version quasistatique du modèle (2) consiste à trouver $\boldsymbol{u} : [0, T] \to V$ tel que $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0$ et

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}}) + j(\boldsymbol{v}) - j(\dot{\boldsymbol{u}}) \geq (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}})_V \quad \forall \boldsymbol{v} \in V, \tag{4}$$

alors que la version quasistatique de (3) consiste à trouver $\boldsymbol{u} : [0, T] \to V$ tel que $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0$ et

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}}) + j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - j(\boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}) \geq (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}})_V \quad \forall \boldsymbol{v} \in V. \tag{5}$$

Les inégalités (4) et (5) ont lieu presque partout dans l'intervalle de temps $(0, T)$ où $T > 0$; par ailleurs, $\boldsymbol{u}_0$ représente le déplacement initial et $\boldsymbol{f}$ est une fonction définie de $[0, T]$ à valeurs dans V.

Une fois la formulation variationnelle des modèles dérivée, on s'interesse aux résultats d'existence et d'unicité de la solution. Ces résultats constituent des résultats d'existence et d'unicité de la *solution faible* pour les problèmes de contact considéres. Ils sont souvent suivis de résultats de régularité, de stabilité ou de comportement assymptotique de la solution. En se limitant aux exemples de contact élastique ci-dessous, on voit qu'il existe un lien fort entre l'analyse des modèles (1)–(5) et la théorie des inéquations variationnelles elliptiques et d'évolution.

Pour plus de détails sur l'analyse variationnelle des modèles statiques (1), (2) et (3) ci-dessus nous renvoyons le lecteur intéressé aux travaux [2, 3, 9] ; par ailleurs, des résultats d'existence et d'unicité de la solution pour des modèles quasistatiques de la forme (4) et (5) peuvent être trouvés dans [5, 11].

4. Un exemple

Dans le but d'illustrer les considérations générales exposées dans les deux sections précedentes, nous présentons ici un exemple décrivant un processus de contact dans l'hypothèse des petites déformations. Partout dans la suite $\mathbb{S}^d$ represente l'espace des tenseurs symmétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^d$ alors que "$\cdot$" et $\|\cdot\|$ denotent respectivement le produit scalaire et la norme sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$. Par ailleurs, nous utilisons les notations standards pour les espaces de Lebesgue L^p et les espaces de Sobolev $W^{k,p}$ pour des fonctions à valeurs scalaires ou vectorielles.

Le contexte physique est le suivant : on considère un corps élasto-visco-plastique occupant un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$, de frontière Γ, suffisamment régulière, divisée en trois parties disjointes et mesurables Γ_1, Γ_2 et Γ_3, telles que $mes(\Gamma_1) > 0$. Soit $\boldsymbol{\nu}$ le vecteur unitaire de la normale sortante à Γ et soit $[0, T]$ un intervalle de temps, $T > 0$. Le corps est supposé fixé sur la partie Γ_1 de sa frontière alors que des forces volumiques et surfaciques de densités $\boldsymbol{f}_0$ et $\boldsymbol{f}_2$ agissent respectivement dans Ω et sur Γ_2. Sur Γ_3 le corps est susceptible d'entrer en contact avec un obstacle, ladite fondation ; le contact est avec compliance normale et frottement et le processus est quasistatique. Sous ces hypothèses, le problème mécanique considéré se formule de la façon suivante :

Problème P. *Trouver un champ des déplacements* $\boldsymbol{u} : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$ *ainsi qu'un champ des contraintes* $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{S}^d$ *tels que :*

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}) + \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})) \quad \text{dans } \Omega \times (0,T), \tag{6}$$

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f}_0 = \boldsymbol{0} \quad \text{dans } \Omega \times (0,T), \tag{7}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0,T), \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\sigma\nu} = \boldsymbol{f}_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0,T), \tag{9}$$

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g_a) \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0,T), \tag{10}$$

$$\left.\begin{array}{l} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \le p_\tau(u_\nu - g_a), \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| < p_\tau(u_\nu - g_a) \Rightarrow \dot{\boldsymbol{u}}_\tau = 0, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| = p_\tau(u_\nu - g_a) \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\lambda\, \dot{\boldsymbol{u}}_\tau, \ \lambda \ge 0 \end{array}\right\} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T), \tag{11}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0, \quad \boldsymbol{\sigma}(0) = \boldsymbol{\sigma}_0 \quad \text{dans } \Omega. \tag{12}$$

L'équation (6) représente la loi de comportement du matériau où $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$ dénote le champ des déformations linéarisé, $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkh})$ est le tenseur des coefficients élastiques et $\mathcal{G}$ est une fonction constitutive non linéaire. Ici et partout dans ce travail le point au-dessus représente la dérivée par rapport au temps. L'équation (7) est l'équation d'équilibre, (8) et (9) sont les conditions aux limites de déplacement-traction et (12) sont les conditions initiales. Les conditions aux limites (10) et (11) représentent les conditions de contact avec compliance normale et frottement de Coulomb, voir [5] pour plus de détails. Ici $u_\nu = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nu}$ est le déplacement normal, $\boldsymbol{u}_\tau = \boldsymbol{u} - u_\nu \boldsymbol{\nu}$ représente le déplacement tangentiel, $\sigma_\nu = (\boldsymbol{\sigma\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu}$ est la contrainte normale et $\boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma\nu} - \sigma_\nu \boldsymbol{\nu}$ est la contrainte tangentielle. Les fonctions p_r $(r = \nu, \tau)$ sont des fonctions positives et g_a représente l'interstice initial entre le corps et la fondation, mesuré le long de la normale $\boldsymbol{\nu}$.

Afin de présenter la formulation variationelle du problème P nous introduisons les espaces

$$V = \{\boldsymbol{v} \in H^1(\Omega)^d \mid \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \text{ sur } \Gamma_1\},$$

$$Q = \{\, \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega),\ 1 \le i,j \le d \,\}.$$

L'espace Q est un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire canonique $(\cdot,\cdot)_Q$; l'espace V sera muni du produit scalaire $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_V (\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})_Q$; il est un espace de Hilbert réel, compte tenu de l'inégalité de Korn.

Dans l'étude du problème P nous supposons que :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{E} : \Omega \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) } \mathcal{E}_{ijkl} \in L^\infty(\Omega),\ 1 \le i,j,k,l \le d. \\ \text{(c) } \mathcal{E}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathcal{E}\boldsymbol{\tau},\ \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. dans } \Omega. \\ \text{(d) Il existe } \alpha_0 > 0 \text{ tel que} \\ \qquad \mathcal{E}\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} \ge \alpha_0 \|\boldsymbol{\tau}\|^2 \ \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. dans } \Omega. \end{array}\right. \tag{13}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) Il existe } L_\mathcal{G} > 0 \text{ tel que} \\ \qquad \|\mathcal{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\| \le L_\mathcal{G} (\|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2\| + \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|) \\ \qquad \forall \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \boldsymbol{x} \in \Omega. \\ \text{(c) } \boldsymbol{x} \mapsto \mathcal{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ est mesurable dans } \Omega,\ \forall \boldsymbol{\sigma},\ \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(d) } \boldsymbol{x} \mapsto \mathcal{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) \in Q. \end{array}\right. \tag{14}$$

$$(15)$$

$$\begin{cases} \text{(a) } p_r : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+. \\ \text{(b) Il existe } L_r > 0 \text{ tel que } |p_r(\boldsymbol{x}, s_1) - p_r(\boldsymbol{x}, s_2)| \leq L_r\, |s_1 - s_2| \\ \qquad \forall\, s_1,\ s_2 \in \mathbb{R},\ \text{ p.p. } \boldsymbol{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(c) } \boldsymbol{x} \mapsto p_r(\boldsymbol{x}, s) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3,\ \forall\, s \in \mathbb{R}. \\ \text{(d) } \boldsymbol{x} \mapsto p_r(\boldsymbol{x}, s) = 0 \ \text{ pour } s \leq 0,\ \text{ p.p. } \boldsymbol{x} \in \Gamma_3. \end{cases} \tag{16}$$

$$\boldsymbol{f}_0 \in W^{1,\infty}(0,T;H), \qquad \boldsymbol{f}_2 \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_2)^d), \tag{17}$$

$$g_a \in L^2(\Gamma_3), \qquad g_a \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3, \tag{18}$$

$$\boldsymbol{u}_0 \in V, \quad \boldsymbol{\sigma}_0 \in Q, \tag{19}$$

$$(\boldsymbol{\sigma}_0, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_Q + j(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}) \geq (\boldsymbol{f}(0), \boldsymbol{v})_V \qquad \forall \boldsymbol{v} \in V, \tag{20}$$

où $j : V \times V \to \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{f} : [0,T] \to V$ sont les applications définies par

$$j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - g_a)\, v_\nu\, da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu - g_a)\, \|\boldsymbol{v}_\tau\|\, da,$$

$$(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v})_V = \int_\Omega \boldsymbol{f}_0(t) \cdot \boldsymbol{v}\, dx + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{f}_2(t) \cdot \boldsymbol{v}\, da,$$

pour tout $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$ et $t \in [0,T]$.

En utilisant la formule de Green, on obtient la formulation variationnelle du problème mécanique P :

Problème P_v**.** *Trouver le champ des déplacements* $\boldsymbol{u} : [0,T] \to V$ *et le champ des contraintes* $\boldsymbol{\sigma} : [0,T] \to Q$ *tels que :*

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t)) + \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t))) \quad \text{p.p. } t \in (0,T), \tag{21}$$

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t)))_Q + j(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}) - j(\boldsymbol{u}(t), \dot{\boldsymbol{u}}(t)) \\ &\qquad \geq (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}}(t))_V \quad \forall \boldsymbol{v} \in V, \quad \text{p.p. } t \in (0,T), \end{aligned} \tag{22}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0, \quad \boldsymbol{\sigma}(0) = \boldsymbol{\sigma}_0. \tag{23}$$

Remarquons que dans cette formulation l'équation (7) ainsi que les conditions aux limites (8)–(11) sont remplacées par l'inéquation (22) ; cette inéquation contient d'une manière intrinsèque les informations locales fournies par (7)–(11). Par ailleurs, du point de vue mathématique le Problème P_v représente un système non linéaire couplant l'équation différentielle (21) à l'inéquation variationnelle d'évolution (22), associé aux conditions initiales (23). Les difficultés majeures rencontrées dans la résolution de ce système résident dans la nonlinéarité de la fonction $\mathcal{G}$ ainsi que dans la dépendence de la fonctionnelle j de la solution du problème.

Dans l'étude du problème variationnel (21)–(23) nous avons le résultat suivant, obtenu récemment dans [1].

Théorème 4.1. *Sous les hypothèses* (13)–(20)*, il existe* $L_0 > 0$ *dependant de* Ω, Γ_1, Γ_3, $\mathcal{E}$, $\mathcal{G}$ *et* T *tel que, si* $L_\nu + L_\tau < L_0$*, alors le problème* P_v *admet au moins une solution de régularité* $\boldsymbol{u} \in W^{1,\infty}(0,T;V)$*,* $\boldsymbol{\sigma} \in W^{1,\infty}(0,T;Q)$*.*

La démonstration du Théorème 4.1 est obtenue en plusieurs étapes. Elle repose sur une méthode de discrétisation temporelle pour les inéquations variationnelles d'évolution, suivie des arguments de point fixe de Banach et de Schauder.

Nous soulignons que le Théorème 4.1 nous fournit l'existence de la solution du Problème P_v sous une hypothèse de petitesse concernant les fonctions de compliance normale, le problème de l'unicité de la solution étant laissé ouvert. Par ailleurs, on peut se demander si l'hypothèse de petitesse $L_\nu + L_\tau < L_0$ traduit une caractéristique intrinsèque du problème mécanique ou bien elle ne représente qu'une limitation imposée par les outils mathématiques employés.

Un couple $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma}\}$ satisfaisant aux relations (21)–(23) s'appelle *solution faible* du problème mécanique (6)–(12). Nous concluons par le Théorème 4.1 que le Problème P admet une solution faible si la somme $L_\nu + L_\tau$ est suffisemment petite.

5. Conclusions

Les considérations présentées dans cet article complétées par les arguments dévéloppés dans les ouvrages [5] et [11] nous amènent à quelques conclusions que nous allons structurer de la façon suivante :

– Les phénomènes de contact sont variés, fortement non linéaires et complexes. A part le frottement (qui reste l'ingédient principal), ils incluent une gamme très variée de phénomènes sous-jacents comme l'usure, l'adhésion, les effets thermiques, parmi bien d'autres.
– Une étude complète des phénomènes de contact implique des compétences variées, allant de la mécanique au calcul scientifique, en passant par l'analyse fonctionnelle, l'analyse numérique et la thermodynamique, sans oublier la tribologie.
– Des progrès importants ont été faits récemment et, comme résultat, une nouvelle discipline est née : *La Théorie Mathématique de la Mécanique du Contact* (*TMMC*). Partie intégrante des Mathématiques Appliquées, l'objectif de la *TMMC* est de présenter une description claire et précise des problèmes aux limites modélisant le contact entre corps déformables ainsi que de réaliser leur analyse variationnelle et numérique.
– Située au carrefour de plusieurs disciplines scientifiques, la caractéristique principale de la *TMMC* est la fertilisation croisée entre les modèles mécaniques et les applications dans les Sciences de l'Ingénieur, d'une part, et l'analyse mathématique et numérique, d'autre part.
– Bien que des progrès importants ont été faits, la *TMMC* est riche en problèmes ouverts qui doivent être considérés dans l'avenir.

Références

[1] A. Amassad, C. Fabre, M. Sofonea, A quasistatic viscoplastic contact problem with normal compliance and friction, *IMA Journal of Applied Mathematics*, **69**, 463-482 (2004).

[2] M. Cocu, Existence of solutions of Signorini problems with friction, *Int. J. Engng. Sci.*, **22**, 567–581 (1984).

[3] G. Duvaut, J.L. Lions, *Les inéquations en Mécanique et en Physique*, Paris, Dunod, 1972.

[4] G. Fichera, Problemi elastostatici con vincoli unilaterali. II. Problema di Signorini con ambique condizioni al contorno, *Mem. Accad. Naz. Lincei, S. VIII, Vol. VII, Sez. I*, **5**, 91-140 (1964).

[5] W. Han, M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*, Studies in Advanced Mathematics, Vol. **30**, American Mathematical Society, Somerville, MA, Providence, RI - International Press, 2002.

[6] I. Hlaváček, J. Haslinger, J. Nečas, J. Lovíšek, *Solution of Variational Inequalities in Mechanics*, New York, Springer-Verlag, 1988.

[7] N. Kikuchi, J.T. Oden, *Contact Problems in Elasticity : A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, Philadelphia, SIAM, 1988.

[8] J. A.C. Martins, M.D.P. Monteiro Marques MDP, eds., *Contact Mechanics*, Dordrecht, Kluwer, 2002.

[9] P.D. Panagiotopoulos, *Inequality Problems in Mechanics and Applications*, Boston, Birkhäuser, 1985.

[10] M. Raous, M. Jean, J.J. Moreau, eds., *Contact Mechanics*, New York, Plenum Press, 1995.

[11] M. Shillor, M. Sofonea, J.J. Telega, *Models and Variational Analysis of Quasistatic Contact*, Lecture Notes in Physics, Vol. **655**, Berlin, Springer-Verlag, 2004.

[12] Signorini A, Sopra alcune questioni di elastostatica, *Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze*, 1933.

(Mircea Sofonea) Laboratoire de Mathématiques et Physique pour les Systèmes, Université de Perpignan, 52 Avenue Paul Alduy, 66860 Perpignan, France, Tel. & Fax: 33-468661765

E-mail address: sofonea@univ-perp.fr