

Sur les propriétés physiques homogénéisées d'une paroi osseuse

JEAN-MARIE CROLET ET MIHAELA RACILA

RÉSUMÉ. L'os humain adulte est formé de collagène et d'hydroxyapatite (Hap) selon une organisation architecturale particulière [1], [2]. Le collagène est un matériau organique et piézoélectrique alors que l'Hap est un matériau minéral n'ayant que des propriétés élastiques.

Lors du remodelage osseux, des cellules creusent une "galerie" dans cette structure et le pourtour de cette galerie est donc constitué de fragments de collagène inclus dans une matrice d'Hap.

Les propriétés piézo du collagène permettent de générer un champ électrique local qui a une influence sur la minéralisation de l'os et donc sur sa restructuration. La question posée est de savoir si le collagène situé sur le pourtour de la galerie est présent en quantité suffisante pour amorcer une minéralisation aux abords de ce pourtour.

Pour apporter un élément de réponse à cette question, nous étudions le comportement des propriétés piézoélectriques de ce pourtour. Pour cela, nous utilisons la théorie mathématique de l'homogénéisation et nous résolvons un problème de convergence.

Classification AMS 2000 des sujets. 35B27.

Mots clef et phrases. homogénéisation, piézoélectricité, remodelage osseux.

1. Introduction

On s'intéresse à un cas très particulier qui apparaît dans le processus de remodelage : celui où les ostéoclastes viennent de creuser une galerie et le tissu collagénique n'est pas encore apparu. La cavité ainsi construite ne contient que du fluide. La question naturelle est : quelles sont alors les propriétés physiques de la paroi ?

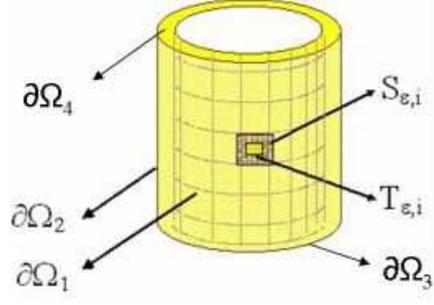
Le pourtour de la "galerie" creusée par les ostéoclastes dans la structure osseuse surminéralisée est donc constitué de fragments de collagène inclus dans une matrice d'Hap et l'on s'intéresse aux propriétés physiques homogénéisées de cette paroi. A cette fin, nous allons développer une modélisation spécifique de la paroi qui est considérée comme un film mince et utiliser la théorie de l'homogénéisation. Le développement est essentiellement de nature mathématique.

2. Position du problème

On considère un tube Ω de frontière $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3 \cup \partial\Omega_4$. $\partial\Omega_1$ est divisée en n surfaces $S_{\varepsilon,1}, \dots, S_{\varepsilon,n}$ de diamètre ε . On considère aussi des surfaces $T_{\varepsilon,1}, \dots, T_{\varepsilon,n}$ incluses dans $S_{\varepsilon,1}, \dots, S_{\varepsilon,n}$ et telles que le diamètre de $T_{\varepsilon,j}$ vaille r avec $r < \varepsilon$.

On note $S_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^n S_{\varepsilon,i}$ et $T_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^n T_{\varepsilon,i}$.

Reçu: le 3 Decembre, 2004.



Dans ce domaine Ω on considère le problème classique piézoélectrique (P_{piezo}) :

$$(P_{piezo}) \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl} \cdot e_{kl}(u^\varepsilon) + G_{kij} \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k} \right) = b_i & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(G_{jkl} \cdot e_{kl}(u^\varepsilon) - \alpha_{jk} \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k} \right) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_i^\varepsilon = c_i & \text{sur } T_\varepsilon, i = 1, 2, 3 \\ \varphi^\varepsilon = d & \text{sur } T_\varepsilon \\ u^\varepsilon = \varphi^\varepsilon = 0 & \text{sur } S_\varepsilon \setminus T_\varepsilon \\ u^\varepsilon = \varphi^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3 \cup \partial\Omega_4 \end{cases}$$

où :

u^ε	champ de déplacement
$e_{kl}(u^\varepsilon)$	tenseur de déformation
φ^ε	potentiel électrique
$\frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k}$	vecteur champ électrique
$b = (b_1, b_2, b_3)$	densité volumique de forces dans Ω
$C_{ijkl} \cdot e_{kl}(u^\varepsilon) + G_{kij} \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k}$	tenseur des contraintes
$G_{jkl} \cdot e_{kl}(u^\varepsilon) - \alpha_{jk} \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k}$	vecteur de déplacement électrique

On suppose que les coefficients élastiques, piézoélectriques et diélectriques satisfont les conditions suivantes :

- **symétrie** : $C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} = C_{ijlk}$; $G_{ijk} = G_{ikj}$; $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$
- **positivité** : $\exists \alpha > 0$ t. q. $C_{ijkl} \cdot e_{ij} \cdot e_{kl} \geq \alpha \|e\|^2$, $\forall e \in M_S^3$
 $\exists \beta > 0$ t. q. $\alpha_{ij} \cdot a_i \cdot a_j \geq \beta \|a\|_{R^3}^2$, $\forall a \in R^3$
- **bornétude** : C_{ijkl} , G_{ijk} et $\alpha_{ij} \in L^\infty(\Omega)$

3. Existence et unicité de la solution

Théorème 3.1. *Le problème (P_{piezo}) admet une solution unique $(u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)$, $(u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) \in (H^1(\Omega))^3 \times H^1(\Omega)$*

Démonstration. Soient $g^\varepsilon = (g_1^\varepsilon, g_2^\varepsilon, g_3^\varepsilon) \in (H^1(\Omega))^3$ et $h^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ telles que :

$$\begin{cases} g_i^\varepsilon = c_i, & i = 1, 2, 3 & \text{sur } T_\varepsilon \\ h^\varepsilon = d & & \text{sur } T_\varepsilon \\ g_i^\varepsilon = h^\varepsilon = 0 & & \text{sur } S_\varepsilon \setminus T_\varepsilon \\ g_i^\varepsilon \text{ et } h^\varepsilon \text{ sont uniformément bornées dans } H^1(\Omega) \end{cases}$$

$$\text{On considère : } \begin{cases} w^\varepsilon = u^\varepsilon - g^\varepsilon \\ \Psi^\varepsilon = \varphi^\varepsilon - h^\varepsilon \end{cases}$$

Alors, le problème piézoélectrique (P_{piezo}) équivaut à :

$$(P) \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl} \cdot e_{kl}(w^\varepsilon) + G_{kij} \cdot \frac{\partial \Psi^\varepsilon}{\partial x_k} \right) & = b_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl} \cdot e_{kl}(g^\varepsilon) + G_{kij} \cdot \frac{\partial h^\varepsilon}{\partial x_k} \right) \\ & = b_i^\varepsilon \text{ dans } \Omega \quad (1) \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(G_{jkl} \cdot e_{kl}(w^\varepsilon) - \alpha_{jk} \cdot \frac{\partial \Psi^\varepsilon}{\partial x_k} \right) & = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(G_{jkl} \cdot e_{kl}(g^\varepsilon) - \alpha_{jk} \cdot \frac{\partial h^\varepsilon}{\partial x_k} \right) \\ & = c^\varepsilon \text{ dans } \Omega \quad (2) \\ w^\varepsilon & = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \Psi^\varepsilon & = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On multiplie (1) par $v_i \in H_0^1(\Omega)$ et (2) par Ψ ; en utilisant la formule de Green on obtient :

$$a((w^\varepsilon, \Psi^\varepsilon), (v, \Psi)) = L(v, \Psi), \forall (v, \Psi) \in (H_0^1(\Omega))^3 \times H_0^1(\Omega),$$

où

$$\begin{aligned} a((w^\varepsilon, \Psi^\varepsilon), (v, \Psi)) &= \int_{\Omega} \left[C_{ijkl} \cdot e_{kl}(w^\varepsilon) + G_{kij} \cdot \frac{\partial \Psi^\varepsilon}{\partial x_k} \right] \cdot e_{ij}(v) dx - \\ &\quad - \int_{\Omega} \left[G_{jkl} \cdot e_{kl}(w^\varepsilon) - \alpha_{jk} \cdot \frac{\partial \Psi^\varepsilon}{\partial x_k} \right] \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} dx \end{aligned}$$

et

$$L(v, \Psi) = \int_{\Omega} b_i^\varepsilon \cdot v_i dx + \int_{\Omega} c^\varepsilon \cdot \Psi dx$$

$a(\bullet, \bullet)$ est une forme bilinéaire et continue sur $\left((H_0^1(\Omega))^3 \times H_0^1(\Omega) \right)^2$

$L(\bullet, \bullet)$ est une forme linéaire et continue sur $(H_0^1(\Omega))^3 \times H_0^1(\Omega)$

On a :

$$a((w^\varepsilon, \Psi^\varepsilon), (w^\varepsilon, \Psi^\varepsilon)) = \int_{\Omega} C_{ijkl} \cdot e_{kl}(w^\varepsilon) \cdot e_{ij}(w^\varepsilon) dx + \int_{\Omega} \left[\alpha_{jk} \cdot \frac{\partial \Psi^\varepsilon}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \Psi^\varepsilon}{\partial x_j} \right] dx$$

donc

$$\begin{aligned} a((w^\varepsilon, \Psi^\varepsilon), (w^\varepsilon, \Psi^\varepsilon)) &\geq \alpha \cdot \sum_{i=1}^3 \|w_i^\varepsilon\|_{1,\Omega}^2 + \beta \cdot \|\Psi^\varepsilon\|_{1,\Omega}^2 \geq \\ &\geq \min\{\alpha, \beta\} \cdot \|(w^\varepsilon, \Psi^\varepsilon)\|_{(H_0^1(\Omega))^3 \times H_0^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Alors, $a(\bullet, \bullet)$ est aussi coercitive sur $\left((H_0^1(\Omega))^3 \times H_0^1(\Omega) \right)^2$

D'après le théorème de Lax-Milgram on a existence et unicité pour $(w^\varepsilon, \Psi^\varepsilon)$ solution du système (P).

Donc

$$(u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) = (w^\varepsilon + g^\varepsilon, \Psi^\varepsilon + h^\varepsilon)$$

est l'unique solution du problème (P_{piezo}) □

4. Limite du système (P_{piezo})

Théorème 4.1. *La solution du problème (P_{piezo}) converge faiblement quand $\varepsilon \rightarrow 0$ vers $(u, \varphi) \in (H^1(\Omega))^3 \times H^1(\Omega)$ solution du problème :*

$$(P_{\text{lim}}) \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl} \cdot e_{kl}(u) + G_{kij} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) & = b_i & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(G_{jkl} \cdot e_{kl}(u) - \alpha_{jk} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) & = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_i & = \gamma c_i & \text{sur } \partial\Omega_1, i = 1, 2, 3 \\ \varphi & = \gamma d & \text{sur } \partial\Omega_1 \\ u^\varepsilon = \varphi^\varepsilon & = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3 \cup \partial\Omega_4 \end{cases}$$

avec $\gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{r}{\varepsilon} \in (0, 1)$

Démonstration. $(w^\varepsilon, \Psi^\varepsilon)$ est uniformément bornée dans $(H^1(\Omega))^3 \times H^1(\Omega)$ donc $(u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)$ l'est aussi. On conclut qu'il existe (u, φ) t.q. $(u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (u, \varphi)$

En multipliant (P_{piezo}) par $v_i \in D(\Omega)$ et $\Psi \in D(\Omega)$ on obtient :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \left(C_{ijkl} \cdot e_{kl}(u^\varepsilon) + G_{kij} \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k} \right) \cdot e_{ij}(v_i) dx & = \int_{\Omega} b_i \cdot v_i dx \\ \int_{\Omega} \left(G_{jkl} \cdot e_{kl}(u^\varepsilon) - \alpha_{jk} \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k} \right) \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} dx & = 0 \end{cases}$$

Par passage à la limite il vient :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \left(C_{ijkl} \cdot e_{kl}(u) + G_{kij} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) \cdot e_{ij}(v_i) dx & = \int_{\Omega} b_i \cdot v_i dx, \forall v_i \in H^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} \left(G_{jkl} \cdot e_{kl}(u) - \alpha_{jk} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} dx & = 0, \forall \Psi \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl} \cdot e_{kl}(u) + G_{kij} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) & = b_i & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(G_{jkl} \cdot e_{kl}(u) - \alpha_{jk} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) & = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

On calcule les valeurs de u sur la frontière de Ω . En multipliant (P_{piezo}) par u^ε et en utilisant la formule de Green on aura :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[C_{ijkl} \cdot e_{kl}(u^\varepsilon) + G_{kij} \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k} \right] \cdot \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} dx - c_i \cdot \int_{T_\varepsilon} \left[C_{ijkl} \cdot e_{kl}(u^\varepsilon) + G_{kij} \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k} \right] \cdot n_j d\sigma & = \\ & = \int_{\Omega} b_i \cdot u_i^\varepsilon dx \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \int_{T_\varepsilon} \left[C_{ijkl} \cdot e_{kl}(u^\varepsilon) + G_{kij} \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k} \right] \cdot n_j d\sigma & = \sum_i \int_{T_{\varepsilon,i}} \left[C_{ijkl} \cdot e_{kl}(u^\varepsilon) + G_{kij} \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k} \right] \cdot n_j d\sigma = \\ & = \left\langle \mu_\varepsilon, \left[C_{ijkl} \cdot e_{kl}(u^\varepsilon) + G_{kij} \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k} \right] \cdot n_j(x) \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

où

$$\mu_\varepsilon = \sum_i \delta_{T_{\varepsilon,i}}, \text{ avec } \langle \delta_{T_{\varepsilon,i}}, \Psi \rangle = \int_{T_{\varepsilon,i}} \Psi(x) d\sigma$$

On a

$$\langle \mu_\varepsilon, \Psi \rangle = \int_{T_\varepsilon} \Psi(x) d\sigma = \frac{r}{\varepsilon} \cdot \sum_i \int_{T_{\varepsilon,i}} \Psi(x) d\sigma = \left(\frac{1}{r} \cdot \int_{T_{\varepsilon,i}} \Psi(x) d\sigma \right)$$

Donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \mu_\varepsilon, \Psi \rangle = \gamma \cdot \int_{\partial\Omega_1} \Psi(x) d\sigma, \text{ avec } \gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{r}{\varepsilon}$$

Alors, $\mu_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma \cdot d\sigma_{\partial\Omega_1}$ faible dans $H^{-1}(\Omega)$, où

$$\langle d\sigma_{\partial\Omega_1}, \Psi \rangle = \int_{\partial\Omega_1} \Psi(x) d\sigma, \forall \Psi \in H^1(\Omega)$$

Comme $0 \leq \mu_\varepsilon \leq d\sigma_{\partial\Omega_1}$ on déduit que $\mu_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} d\sigma_{\partial\Omega_1}$ fort dans $H^1(\Omega)$

On obtiendra :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{T_\varepsilon} \left[C_{ijkl} \cdot e_{kl}(u^\varepsilon) + G_{kij} \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k} \right] \cdot n_j d\sigma = \gamma \cdot \int_{\partial\Omega_1} \left[C_{ijkl} \cdot e_{kl}(u) + G_{kij} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right] \cdot n_j d\sigma$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[C_{ijkl} \cdot e_{kl}(u) + G_{kij} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right] \cdot \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} dx - \gamma \cdot c_i \cdot \int_{\partial\Omega_1} \left[C_{ijkl} \cdot e_{kl}(u) + G_{kij} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right] \cdot n_j d\sigma = \\ = \int_{\Omega} b_i \cdot u_i dx, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} u_i = \gamma \cdot c_i, & i = 1, 2, 3 \text{ sur } \partial\Omega_1 \\ u_i = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3 \cup \partial\Omega_4 \end{cases}$$

On va procéder de la même manière pour trouver les valeurs de φ sur la frontière de Ω .

En multipliant (P_{piezo}) par φ^ε et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[G_{jkl} \cdot e_{kl}(u^\varepsilon) - \alpha_{jk} \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k} \right] \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_j} dx - \\ - d \cdot \int_{T_\varepsilon} \left[G_{jkl} \cdot e_{kl}(u^\varepsilon) - \alpha_{jk} \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k} \right] \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_j} \cdot n_j d\sigma = 0 \end{aligned}$$

On passe à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[G_{jkl} \cdot e_{kl}(u) - \alpha_{jk} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right] \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx - \\ - \gamma \cdot d \cdot \int_{\partial\Omega_1} \left[G_{jkl} \cdot e_{kl}(u) - \alpha_{jk} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right] \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \cdot n_j d\sigma = 0 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \varphi = \gamma \cdot d \text{ sur } \partial\Omega_1 \\ \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3 \cup \partial\Omega_4 \end{cases}$$

donc (u, φ) vérifie le problème (P_{lim}), avec $\gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{r}{\varepsilon} \in (0, 1)$ □

5. Conclusion

Le coefficient γ étant strictement inférieur à 1, les propriétés piézoélectriques obtenues sur le pourtour de la galerie sont diminuées.

Dans la pratique, cette diminution est telle qu'il semble difficile qu'un processus de minéralisation puisse s'amorcer dans cette zone en l'absence de tout autre phénomène.

Références

- [1] **Crolet J. M., Aoubiza B., Meunier A.**, *Compact bone : numerical simulation of mechanical characteristics*, Journal of Biomechanics, 1993, vol. 26, no. 6, pag. 677-687
- [2] **Aoubiza B., Crolet J. M., Meunier A.**, *On the mechanical characterization of compact bone structure using the homogenization theory*, Journal of Biomechanics, 1996, vol. 29, no. 12, pag. 1539-1547

(Jean-Marie Crolet) DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES,
UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ,
16 ROUTE DE GRAY, 25030, BESANÇON, FRANCE
E-mail address: jmcrolet@univ-fcomte.fr

(Mihaela Racila) DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES,
UNIVERSITÉ DE CRAIOVA,
13 RUE A.I. CUZA, R0-200585, CRAIOVA, ROUMANIE
E-mail address: mracila@yahoo.com