Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser.
Volume 32, 2005, Pages 200–206
ISSN: 1223-6934

Problèmes antiplans de contact avec frottement pour des matériaux viscoélastiques à mémoire longue

Andaluzia Matei et Thierry-Vincent Hoarau-Mantel

Résumé. Nous considérons un problème antiplan quasistatique de contact avec frottement de Tresca pour des matériaux viscoélastiques à mémoire longue. Pour des raisons numériques, nous proposons une régularisation de la fonctionnelle non differentiable (non différentiabilité due au terme de frottement) apparaîssant dans la formulation variationnelle de ce problème mécanique. Cette régularisation est obtenue en remplaçant la fonction $|\cdot|$ par la fonction $\sqrt{|\cdot|^2+\rho^2}$, où ρ est un paramètre strictement positif. Nous avons obtenu un résultat d'existence, d'unicité et de convergence.

Classification AMS 2000 des sujets. 74M10, 74M15, 49J40.

Mots clef et phrases. matériaux viscoélastiques à mémoire longue, problème antiplan, inéquation variationnelle d'évolution, régularisation.

1. Introduction

Nous étudions un problème de contact avec frottement entre un corps cylindrique déformable et une fondation. Ce travail est une continuation des travaux [4, 8]. Nous nous interessons au cas des déformations antiplanes, *i.e.* le champ des déplacements est parallèlle aux génératrices du cylindre et est indépendant de la coordonnée axiale. De tels problèmes ont déja été étudiés par plusieurs auteurs, sous plusieurs lois de contact et de frottement et différentes lois de constitution, citons par exemple [1, 5, 6, 7]. Dans l'étude de ce problème nous négligeons les termes d'inertie dans l'équation du mouvement ce qui nous conduit à un problème quasistatique. Nous dérivons une forme faible de ce problème sous forme d'une inéquation variationnelle d'évolution intégro-différentielle. Pour ce problème variationnelle nous ecrivons une forme régularisé, en remplaçant la fonctionnele non differentiable par une fonctionelle differentiable, qui depend d'un parametre strictement positif ρ. Notre principal résultat porte sur l'existence et l'unicité de solutions faibles ainsi que le comportement de la solution faible du problème régularisé par rapport au paramètre ρ. La démonstration de ce théorème se déroule en diverses étapes que nous préciserons par la suite, et est basée notamment sur des arguments relatifs aux inégalités variationnelles d'évolution.

La structure de ce papier est la suivante. À la section 2, nous présentons le problème mécanique considéré. À la section 3, nous listons les hypothèses et donnons les formulations variationnelles. À la section 4, nous présentons notre principal résultat d'existence, d'unicité et de convergence, à savoir le Théorème 4.1 ainsi que les étapes de la démonstration de ce théorème.

Reçu: le 14 Novembre, 2004.

2. Cadre physique et requis

Nous considérons un corps cylindrique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, rapporté dans le repère orthogonal cartésien $(Ox_1x_2x_3)$, situé dans une configuration d'origine fixe et non déformée. Nous admettons que les génératrices de ce cylindre $\mathcal{B}$ sont parallèles à l'axe Ox_3. Sa coupe transversale est un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, repéré dans le plan (Ox_1x_2). Le corps cylindrique est supposé suffisamment long afin de négliger les effets dans la direction axiale. Nous pouvons alors écrire que $\mathcal{B} = \Omega \times]-\infty, +\infty[$. Notons Γ la frontière de ce domaine Ω, divisée en trois parties mesurables Γ_i, $i = 1, 2, 3$ avec $mes\,\Gamma_1 > 0$. Le cylindre est bloqué sur cette partie $\Gamma_1\times]-\infty, +\infty[$, subit à la fois des forces volumiques $\boldsymbol{f}_0$ dans $\mathcal{B}$ et des forces surfaciques $\boldsymbol{f}_2$ sur $\Gamma_2 \times]-\infty, +\infty[$ et est en contact avec une fondation tout au long de la partie $\Gamma_3 \times]-\infty, +\infty[$.
Nous supposons que les forces sujettes au temps sont de la forme

$$\boldsymbol{f}_0 = (0, 0, f_0) \quad \text{avec} \quad f_0 = f_0(x_1, x_2, t) : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{f}_2 = (0, 0, f_2) \quad \text{avec} \quad f_2 = f_2(x_1, x_2, t) : \Gamma_2 \times [0, T] \to \mathbb{R}. \tag{2}$$

Le champ de déplacements $\boldsymbol{u}$, appelé *déformation antiplane*, s'écrit

$$\boldsymbol{u} = (0, 0, u) \quad \text{avec} \quad u = u(x_1, x_2, t) : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}. \tag{3}$$

Nous considérons des matériaux de type viscoélastique à mémoire longue, dont le comportement est décrit par la loi de comportement suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(tr(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})))\boldsymbol{Id} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) + 2\int_0^t b(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\,ds, \tag{4}$$

où $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$ est le tenseur des contraintes, $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = (\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}))$ est le tenseur des déformations, $b : [0, T] \to \mathbb{R}$ la fonction de relaxation, $\lambda > 0$, $\mu > 0$ les constantes de Lamé et $\boldsymbol{Id}$ le tenseur unité de $\mathbb{R}^3$. Nous nous plaçons dans le cas quasi-statique. En considérant les relations (1), (3) et (4), l'équation d'équilibre se réduit à la forme scalaire suivante

$$\mu\Delta u(t) + \int_0^t b(t-s)\Delta\, u(s)ds + f_0(t) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times]0, T[. \tag{5}$$

Le vecteur normal unitaire $\boldsymbol{\nu}$ sur $\Gamma \times]-\infty, +\infty[$ se réécrit sous la forme

$$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, 0) \qquad \text{avec} \quad \nu_i = \nu_i(x_1, x_2) : \Gamma \to \mathbb{R}, \ i = 1, 2. \tag{6}$$

Compte tenu de la relation (6), le vecteur des contraintes de Cauchy adopte une forme particulière dans le cas des problèmes antiplans :

$$\boldsymbol{\sigma\nu} = (0, 0, \mu\partial_\nu u + \int_0^t b(t-s)\,\partial_\nu u(s)ds), \tag{7}$$

où la notation $\partial_\nu u$ désigne la dérivée normale et se définit par $\partial_\nu u = u_{,1}\nu_1 + u_{,2}\nu_2$. Nous pouvons réécrire la condition aux limites $\boldsymbol{\sigma\nu} = \boldsymbol{f}_2$ sur $\Gamma_2 \times]-\infty, +\infty[$ suivant les reformulations que nous venons de faire sur les forces surfaciques (2) ainsi que sur le vecteur des contraintes (7) :

$$\mu\,\partial_\nu u + \int_0^t b(t-s)\,\partial_\nu u(s)ds = f_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times]-\infty, +\infty[. \tag{8}$$

Présentons la condition de contact et de frottement sur la partie $\Gamma_3 \times]-\infty, +\infty[$. La première remarque vient de l'observation des relations (3) et (6) qui impliquent $u_\nu = 0$, donc le contact est bilateral et en plus, on note ici la forme particuliere du composante tangentielle du champ de deplacement, $\boldsymbol{u}_\tau = (0, 0, u)$. Les déplacements étant bloqués sur la partie Γ_1, nous avons

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times]-\infty, +\infty[. \tag{9}$$

De plus, pour la composante tangentielle du champ des contraintes nous avons

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = (0, 0, \sigma_\tau) \quad \text{avec} \ \ \sigma_\tau = \mu\, \partial_\nu u + \int_0^t b(t-s)\, \partial_\nu u(s) ds. \tag{10}$$

Pour le frottement, nous considérons la loi de frottement de Tresca

$$|\boldsymbol{\sigma}_\tau| \leq g, \ \dot{\boldsymbol{u}}_\tau \neq \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_\tau = -g\, \frac{\dot{\boldsymbol{u}}_\tau}{|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau|}. \tag{11}$$

En tenant compte de la spécificité du problème antiplan, le contact frottant peut être modelisé sur Γ_3 pour tout $t \in [0, T]$ comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} |\mu\, \partial_\nu u(t) + \displaystyle\int_0^t b(t-s)\, \partial_\nu u(s) ds| \leq g, \\ |\mu\, \partial_\nu u(t) + \displaystyle\int_0^t b(t-s)\, \partial_\nu u(s) ds| = -g\, \dfrac{\dot{u}(t)}{|\dot{u}(t)|} \ \text{si} \ \dot{u} \neq 0. \end{array} \right. \tag{12}$$

Il ne reste plus qu'à compléter ces équations en donnant le déplacement initial

$$u(0) = u_0 \ \ \text{dans} \ \ \Omega, \tag{13}$$

où u_0 est une fonction donnée dans la section Ω.
Par consequent, notre problème antiplan peut se formuler comme suit.

Problème $\mathcal{P}$. *Trouver* $u : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$ *tel que, pour tout* $t \in [0, T]$, *les relations* (5), (8), (9), (12) *et* (13) *sont vérifiées.*

3. Hypothèses et formulations variationnelles

Dans cette section, nous listons les hypothèses ainsi que les notations utilisées par la suite et donnons la formulations variationnelle du problème physique envisagé.
Nous allons faire les hypothèses ci-après.
Les forces volumiques et de tractions sont supposées avoir la régularité

$$f_0 \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)), \tag{14}$$

$$f_2 \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Gamma_2)). \tag{15}$$

La fonction seuil g satisfait aux hypothèses

$$g \in L^\infty(\Gamma_3) \quad \text{et} \quad g(x) \geq 0 \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3 \tag{16}$$

et la fonction de relaxation b possède la régularité

$$b \in C^1(0, T). \tag{17}$$

Finallement, nous supposons

$$u_0 \in V, \tag{18}$$

où l'espace V, donné par

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \ \ | \ \ v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\},$$

est muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_V$ et de la norme induite $|\cdot|_V$ définies par

$$(u, v)_V = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx \quad \text{et} \quad |u|_V = |\nabla u|_{L^2(\Omega)^2} \quad \forall\, u, v \in V.$$

Nous introduisons la fonctionnelle $j : V \to \mathbb{R}_+$ donnée par

$$j(v) = \int_{\Gamma_3} g\,|v| da \qquad \forall v \in V. \tag{19}$$

De la condition (16), nous pouvons affirmer que l'intégrale intervenant dans la relation (19) est bien définie.
Nous désignons par $f : [0,\, T] \to V$ la fonction basée sur la représentation de Riesz, donnée par

$$(f(t), v)_V = \int_\Omega f_0(t) v\, dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) v\, da \quad \forall v \in V, \quad \text{p.p. } t \in]0,\, T[. \tag{20}$$

Les conditions (14) et (15) montrent qu'une telle fonction f possède la régularité

$$f \in W^{1,2}(0, T; V). \tag{21}$$

Nous considérons de plus la condition de compatibilité ci-après

$$\mu\,(u_0, v)_V + j(v) \geq (f(0), v)_V \qquad \forall v \in V. \tag{22}$$

La formulation variationnelle du problème $\mathcal{P}$, obtenue à l'aide de la formule de Green et en tenant compte des conditions aux limites est la suivante.

Problème $\mathcal{P}_V$. *Trouver $u : [0, T] \to V$ tel que*

$$\begin{aligned} &\mu\,(u(t), v - \dot{u}(t))_V + (\int_0^t b\,(t-s) u(s) ds, v - \dot{u}(t))_V + j(v) - j(\dot{u}(t)) \\ &\geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V \qquad \forall v \in V, \quad p.p. \quad t \in (0, T), \end{aligned} \tag{23}$$

$$u(0) = u_0. \tag{24}$$

La fonctionnelle j dans (23) étant non différentiable, il est convenable d'un point de vue numérique de considérer une version régularisée de ce problème.

Problème $\mathcal{P}_{reg}$. *Trouver $u_\rho : [0, T] \to V$ tel que*

$$\begin{aligned} &\mu\,(u_\rho(t), v - \dot{u}_\rho(t))_V + (\int_0^t b\,(t-s) u_\rho(s) ds, v - \dot{u}_\rho(t))_V + j_\rho(v) - j_\rho(\dot{u}_\rho(t)) \\ &\geq (f(t), v - \dot{u}_\rho(t))_V \qquad \forall v \in V, \quad p.p. \quad t \in (0, T), \end{aligned} \tag{25}$$

$$u_\rho(0) = u_0, \tag{26}$$

où

$$j_\rho(v) = \int_{\Gamma_3} g\,\sqrt{v^2 + \rho^2} da \qquad \forall v \in V,\ \rho > 0. \tag{27}$$

Le problème $\mathcal{P}_{reg}$ représente la formulation variationnelle du problème $\mathcal{P}$ lorsque la loi de frottement de Tresca (11) est remplacée par la loi régularisée

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = -g\,\frac{\dot{\boldsymbol{u}}_\tau}{\sqrt{|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau|^2 + \rho^2}},\ \rho > 0.$$

Il ne reste plus à présent qu'à énoncer notre résultat d'existence, d'unicité et de convergence, ce qui fait l'objet de la section suivante.

4. Un résultat d'existence, d'unicité et de convergence

Dans cette section, nous donnons notre principal résultat portant sur l'existence et l'unicité des solutions faibles des problèmes $\mathcal{P}_V$ et $\mathcal{P}_{reg}$ et sur la convergence de la solution u_ρ du $\mathcal{P}_{reg}$, vers la solution u du $\mathcal{P}_V$, ainsi que quelques éléments de démonstration de ce résultat.

Théorème 4.1. *Sous les hypothèses* (14)–(18) *et* (22)*,*

(1) *il existe une unique solution u du problème $\mathcal{P}_V$ avec la régularité*
$$u \in W^{1,2}(0,T;V);$$
(2) *il existe une unique solution u_ρ du problème $\mathcal{P}_{reg}$ avec la régularité*
$$u_\rho \in W^{1,2}(0,T;V);$$
(3) *la solution u_ρ converge vers u au sens ci-après :*
$$u_\rho \to u \text{ dans } C([0,T];V) \text{ lorsque } \rho \to 0.$$

Démonstration. (1) On applique un résultat de Brézis (voir [2]) suivi d'une méthode de point fixe. Donnons quelques étapes de cette démonstration.

Dans un premier temps, nous introduisons l'ensemble
$$\mathcal{W} = \{\ \eta \in W^{1,2}(0,T;V) \mid \eta(0) = 0_V\ \}, \tag{28}$$
et prouvons le résultat d'existence et d'unicité suivant : *pour tout $\eta \in \mathcal{W}$, il existe un unique élément $u_\eta \in W^{1,2}(0,T;V)$ tel que*
$$\begin{aligned}\mu\,(u_\eta(t), v - \dot u_\eta(t))_V + (\eta(t), v - \dot u_\eta(t))_V + j(v) - j(\dot u_\eta(t))&\\ \geq (f(t), v - \dot u_\eta(t))_V \qquad \forall v \in V,\ \text{ p.p. } t \in (0,T),&\end{aligned} \tag{29}$$
$$u_\eta(0) = u_0. \tag{30}$$
Dans un deuxième temps, nous considérons l'opérateur $\Lambda : \mathcal{W} \to \mathcal{W}$ défini par
$$\Lambda\eta(t) = \int_0^t b(t-s) u_\eta(s)\,ds \qquad \forall \eta \in \mathcal{W},\ t \in [0,T]. \tag{31}$$
Nous avons le résultat suivant : *cet opérateur Λ possède un unique point fixe $\eta^* \in \mathcal{W}$.*

Dans un troisième temps, nous notons $\eta^* \in \mathcal{W}$ l'unique point fixe de l'opérateur Λ. Puisque $\Lambda\eta^* = \eta^*$, il s'en suit que u_{η^*} est une solution du problème $\mathcal{P}_V$, de régularité $u_{\eta^*} \in W^{1,2}(0,T;V)$. L'unicité n'est que la conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ. Pour plus des détails, le lecteur pourra se raporter par exemple à [8].

(2) Puisque $j_\rho(v) \geq j(v) \quad \forall v \in V$, on voit que l'inégalité (22) reste valable si on remplace la fonctionnelle j par la fonctionnelle j_ρ; il suffit donc d'appliquer les mêmes arguments que ceux utilisés au point précédent.

(3) La démonstration ici repose sur des estimations à priori et sur une inégalité de type Gronwall. Nous donnons ci-après les grandes lignes de ces quelques estimations. Il résulte des relations (23) et (25) que
$$\begin{aligned}&\mu(u(t) - u_\rho(t), \dot u_\rho(t) - (\dot u)(t))_V\\ &\leq \Big(\int_0^t b(t-s)(u(s) - u_\rho(s))\,ds, \dot u_\rho(t) - \dot u(t)\Big)_V\\ &+ j(\dot u_\rho(t)) - j(\dot u(t)) + j_\rho(\dot u(t)) - j_\rho(\dot u_\rho(t)).\end{aligned}$$

Or, nous avons

$$\begin{aligned}
&\Big(\int_0^t b(t-s)(u(s)-u_\rho(s))\,ds, \dot u_\rho(t)-\dot u(t)\Big)_V\\
&= \frac{d}{dt}\Big(\int_0^t b(t-s)(u(s)-u_\rho(s))\,ds,\, u_\rho(t)-u(t)\Big)_V\\
&-\Big(b(0)\,(u(t)-u_\rho(t)) + \int_0^t \dot b(t-s)(u(s)-u_\rho(s))\,ds,\, u_\rho(t)-u(t)\Big)_V.
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
j_\rho(v)-j(v) &= \int_{\Gamma_3} g\,\sqrt{v^2+\rho^2}\,da - \int_{\Gamma_3} g\,|v|\,da\\
&\le \int_{\Gamma_3} |g|\big|\sqrt{v^2+\rho^2}-|v|\big|\,da \le \|g\|_{L^1(\Gamma_3)}\,\rho.
\end{aligned}$$

Ainsi nous pouvons déduire que

$$\begin{aligned}
\frac{\mu\,k^2-\|b\|_{C^1(0,T)}}{2\,k^2}\,\|u(t)-u_\rho(t)\|_V^2 &\le 2\,\|g\|_{L^1(\Gamma_3)}\,T\,\rho\\
&+ M\int_0^t \|u_\rho(s)-u(s)\|_V^2\,ds,
\end{aligned}$$

où $k>0$ est une constante arbitraire et $M=\dfrac{\|b\|_{C^1(0,T)}(3+T^2+k^2\,T)}{2}$. Nous fixons maintenant la constante k telle que

$$k>\sqrt{\frac{\|b\|_{C^1(0,T)}}{\mu}}.$$

Il ne reste plus qu'appliquer une inégalité de type Gronwall pour obtenir

$$\|u_\rho(t)-u(t)\|_V^2 \le C\,\rho,$$

ce qui achève cette démonstration. □

Des résultats similaires de convergence ont été obtenus :
- pour le cas élastique (*i.e.* $(b=0)$) voir [3].
- pour le cas viscoélastique avec memoire courte, voir [4].

Références

[1] F. Andreu, J. M. Mazón and M. Sofonea, Entropy Solutions in the Study of Antiplane Shear Deformations for Elastic Solids, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* (M^3AS) **10** (2000), 96–126.

[2] H. Brézis, Problèmes unilatéraux, *J. Math. Pures et Appl.* **51** (1972), 1–168.

[3] M. Delost, *Analyse théorique et numérique pour des problèmes quasistatiques régularisés de contact avec frottement*, thèse, Université de Nice, Sophia-Antipolis, 2004.

[4] T.-V. Hoarau-Mantel and A. Matei, *Analysis of a viscoelastic antiplane contact problem with slip dependent friction*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., **12** (2002), 101-108.

[5] C. O. Horgan, Anti-plane shear deformation in linear and nonlinear solid mechanics, *SIAM Rev.* **37** (1995), 53–81.

[6] C. O. Horgan and K. L. Miller, Anti-plane shear deformation for homogeneous and inhomogeneous anisotropic linearly elastic solids, *J. of Appl. Me.* **61** (1994), 23–29.

[7] A. Matei, V. V. Motreanu and M. Sofonea, A Quasistatic Antiplane Contact Problem With Slip Dependent Friction, *Advances in Nonlinear Variational Inequalities* **4** (2001), 1–21.

[8] M. Sofonea, C. Niculescu and A. Matei, *An antiplane contact problem for viscoelastic materials with long-term memory*, to appear in *Math. Ineq. and Appl.*.

(Andaluzia Matei) Department of Mathematics, University of Craiova,
Al.I. Cuza Street, No. 13, Craiova RO-200585, Romania, Tel. & Fax: 40-251412673
E-mail address: andaluziamatei2000@yahoo.com

(T.-V. Hoarau-Mantel) Universidade de Santiago de Compostela, Departamento de Matemática Aplicada, 15782 Santiago de Compostela, España, Tel. 00-34-981-563100 Ext:13188 & Fax: 00-34-981-597054
E-mail address: hoarau@usc.es