

## Composites piézoélectriques et homogénéisation asymptotique – Une approche numérique

MIHAELA RACILA AND LAMINE BOUBAKAR

---

**ABSTRACT.** Le but de cette étude est l'élaboration d'un modèle mathématique pour des composites piézoélectriques qui permette l'étude du comportement mécanique de ces structures fortement hétérogènes en connaissant seulement les propriétés de leurs composants de base (matrice et fibre) et leur configuration architecturale. Sur le plan mathématique, la méthode d'homogénéisation par développements asymptotiques ([18]; [4]) dans un cadre piézoélectrique a été employée et la méthode des éléments finis est mise en place pour résoudre les problèmes cellulaires obtenus par homogénéisation. Ce modèle peut être utilisé pour n'importe quel composite piézoélectrique dont on connaît la géométrie de la cellule de base et les propriétés des composants (fibre, matrice). La modélisation d'un empilement piézoélectrique peut être obtenue comme un cas particulier de ce modèle. D'une manière indirecte pendant l'étape d'homogénéisation on peut obtenir les micro-contraintes pour un chargement donné au niveau macroscopique. Quelques résultats sont présentés en utilisant ce modèle d'une manière spécifique pour l'os cortical humain, qui est déjà connu comme un milieu piézoélectrique naturel.

*2010 Mathematics Subject Classification.* Primary 35B27; Secondary 46N40.

*Key words and phrases.* matériaux composites, modélisation mathématique, homogénéisation, piézoélectricité, éléments finis.

---

### 1. Introduction

Les applications des matériaux piézoélectriques exigent une amélioration de leurs caractéristiques. Cette amélioration peut être obtenue en concevant par exemple des nouveaux types de matériaux piézocomposites qui possèdent des propriétés plus "riches". Les propriétés homogénéisées d'un matériau composite dépendent de la topologie de sa cellule de base et des propriétés de ses constituants. Le comportement mécanique des milieux composites implique essentiellement les méthodes multi-échelle. Il y a eu beaucoup de développements théoriques pour obtenir des évaluations raisonnables sur les comportements mécaniques micro et macroscopiques des milieux composites.

Parmi les développements les plus récents la plus notable est la théorie mathématique de l'homogénéisation qui est utilisée particulièrement pour les composites ayant une microstructure périodique ([5]; [17]). La méthode d'homogénéisation est reconnue comme un outil prometteur pour l'étude des problèmes liés à la mécanique des milieux hétérogènes, elle pouvant être appliquée avec succès aux divers problèmes concernant les composites industriels à l'aide de la méthode des éléments finis.

Les résultats d'homogénéisation dans la théorie mathématique n'imposent aucune limitation sur la microstructure sauf l'acceptation de la périodicité locale du milieu. Néanmoins, la plupart des résultats concernant les applications des composites

---

Received August 27, 2010. Revision received November 25, 2010.  
Projet PN-II-RU-RP-juin 2008.

ont impliqué plusieurs restrictions quant à la morphologie de ces microstructures, en raison du manque d'assez d'informations sur la géométrie de la microstructure ou de l'incapacité de traiter la complexité géométrique dans le modèle numérique. En conséquence, les applications dans les problèmes concernant les milieux composites comportent l'idéalisation de leurs hétérogénéités microstructurales. Par exemple, on assume souvent que la microstructure d'un composite fibreux est formée d'une seule fibre de forme assez régulière entourée de la matrice (qui s'appelle parfois l'élément structural de base) et tout cela arrangé d'une manière périodique. Cependant, dans la réalité, beaucoup de composites ont plus ou moins un aspect aléatoire dans leurs configurations géométriques et même la distribution périodique d'une cellule est rarement observé. Inévitable donc, il peut y avoir des erreurs dans l'évaluation des réponses micromécaniques, et, en conséquence, dans l'estimation de propriétés matérielles homogénéisées.

L'idée principale de la méthode est de trouver un milieu globalement homogène équivalent au composite original, c'est à dire ayant les mêmes propriétés.

Ce papier est organisé comme suit : dans la Section 2, nous présentons la théorie de l'homogénéisation appliquée à la piézoélectricité, suivie dans la Section 3 de l'élaboration théorique et de l'implémentation numérique de la méthode d'homogénéisation au piézoélectriques monocliniques. La Section 4 présente quelques résultats numériques concernant les propriétés mécaniques de l'os cortical humain au niveau macroscopique et dans la Section 5, quelques conclusions sont données.

## 2. Homogénéisation piézoélectrique

Dans cette section, nous présenterons successivement le cadre fonctionnel du problème que l'on étudie, l'homogénéisation par la méthode des développements asymptotiques, les équations homogénéisées, les caractéristiques physiques homogénéisées ainsi que le retour au niveau microscopique.

**2.1. Introduction. La méthode des développements asymptotiques.** La méthode des développements asymptotiques permet dans un premier temps de calculer les propriétés homogénéisées en connaissant les propriétés des composantes de base du matériau composite considéré tout en tenant compte de sa géométrie microscopique, et dans un deuxième temps elle donne accès aux informations locales, au niveau microscopique.

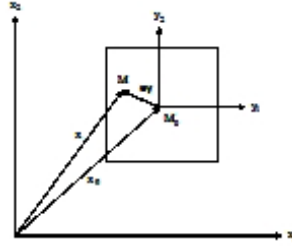
Considérons une structure composite fibreuse et supposons que sa microstructure soit périodique avec une unique période de taille  $\varepsilon$  qui représente la microstructure partout dans le composite. Aussi, on suppose que des conditions aux limites suffisantes existent, pour que le problème soit bien posé.

Un tel problème est coûteux à résoudre car, par exemple, si une méthode de type éléments finis est utilisé, le maillage qu'on devrait construire serait tellement grand que le problème approché ne pourrait pas être résolu, même avec les moyens informatiques actuels. On peut alors considérer deux échelles: celle du domaine ou échelle macroscopique et celle de la fibre ou échelle microscopique. L'objectif est d'établir un lien entre ces deux échelles.

Considérons alors que le matériau composite est rapporté à un système cartésien d'axes  $(Ox_1x_2)$  associé à la variable macroscopique  $x$ . La microstructure du composite est constituée par des cellules unités  $Y$  liées à l'échelle microscopique  $y$ . Chaque période  $Y$  a deux composantes: la fibre et la matrice.

A tout point  $M$  du domaine ayant pour coordonnées dans le repère  $(Ox_1x_2)$  le vecteur  $\mathbf{x}$  on peut associer:

- un point  $M_0$  du domaine qui est le barycentre de la cellule de base contenant ce point  $M$ . Il a pour coordonnées dans le repère  $(Ox_1x_2)$  le vecteur  $\mathbf{x}_0$
- un vecteur  $\mathbf{y}$  de  $Y$  tel que le vecteur  $\varepsilon\mathbf{y}$  représente les coordonnées du point  $M$  dans un repère cartésien issu de  $M_0$  (on pourra considérer le repère  $(M_0y_1y_2)$ )



On voit ainsi comme sont les variables d'espace définies pour les échelles macroscopique et microscopique sont liées. Ce lien est formalisé par la relation:  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \varepsilon\mathbf{y}$ .

Nous précisons, par un changement de notation, que certaines entités physiques dépendent des deux échelles. Par exemple, dans notre cas, au lieu de noter la solution par  $u(x)$  en faisant intervenir la seule échelle macroscopique, on va la noter par  $u^\varepsilon(x, y)$  pour montrer qu'elle dépend des deux échelles, à une taille de période  $\varepsilon$  fixée. On cherche la solution  $u^\varepsilon(x, y)$  sous la forme d'un développement asymptotique:

$$u^\varepsilon(x, y) = u^0(x, y) + \varepsilon u^1(x, y) + \varepsilon^2 u^2(x, y) + O(\varepsilon^3)$$

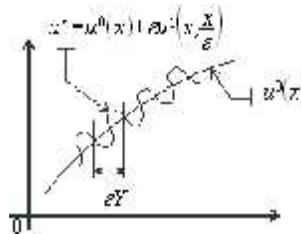
où chaque fonction  $u^i(x, y)$  est périodique en  $y$  et où l'on pose:  $y = \frac{x}{\varepsilon}$

On remplace l'opérateur de dérivation classique qui ne fait apparaître que la seule variable macroscopique par un nouvel opérateur qui tient compte des deux échelles:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(x, y)) = \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right) (f(x, y))$$

En utilisant cet opérateur et le développement asymptotique de la solution, on obtient les problèmes locaux (ou problèmes cellulaires), par identification des termes de même puissance de  $\varepsilon$ .

Le calcul montre que le premier terme du développement asymptotique est toujours indépendant de  $y$ . Le graphe de la solution  $u^\varepsilon$  (en dimension 1) si l'on s'en tient aux deux premiers termes du développement est alors celui de la figure ci-dessous.



Il est composé d'une fonction régulière de  $x$ ,  $u^0(x)$ , plus un terme petit  $\varepsilon u^1(x, y)$  car  $0 < \varepsilon \leq 1$  qui est un terme fortement oscillant, puisque fonction de  $y$ .

Il est facile à voir que le terme oscillant  $u^1(x, y)$  peut être obtenu en fonction du gradient du terme "régulier"  $u^0(x)$ , grâce à la linéarité du second problème local. On introduit alors la notion de "fonctions d'influence" et elles seront solutions de problèmes sur la cellule unité  $Y$ . Ces problèmes étant résolus on trouve  $u^1$ . La condition d'existence et d'unicité de la solution  $u^2$  nous permet de trouver des relations explicites pour les coefficients homogénéisés du problème considéré. Ainsi, en résolvant les problèmes locaux on va trouver la solution de notre problème.

### Schéma de calcul des coefficients homogénéisés

Les méthodes d'homogénéisation ont, en général, des ressemblances au niveau de l'application et de l'implémentation, malgré la diversité qu'elles offrent dans les multiples problèmes et phénomènes qui proviennent de l'industrie. De ce point de vue, on peut mettre en évidence un algorithme qui couvre plusieurs contributions de la théorie de l'homogénéisation:

- 1: Mailler le domaine représenté par la cellule unité
- 2: Introduire le développement asymptotique
- 3: Obtenir une "cascade" de problèmes: en partant de l'équation de l'équilibre, des lois de comportement ou autre, un enchaînement d'étapes amène à trois problèmes hiérarchiques
- 4: Introduire les fonctions d'influence, qui sont obtenues par résolution des problèmes cellulaires en utilisant une méthode de discrétisation (éléments finis par exemple)
- 5: Trouver les coefficients homogénéisés, qui dépendent des solutions des problèmes locaux sur la cellule de base (fonctions d'influence)
- 6: Faire une analyse locale, c'est-à-dire obtenir la réponse au niveau microscopique d'une sollicitation macroscopique; il peut s'agir par exemple des expressions analytiques des microcontraintes ou autre, qui sont obtenues de manière indirecte à l'étape 3

Les deux principaux intérêts des méthodes d'homogénéisation sont:

- d'être un outil de synthèse, puisque ces méthodes conduisent à une description macroscopique de la structure et un outil d'analyse, car, par le biais de la localisation, elles permettent d'accéder au phénomène à l'échelle microscopique ([9])
- de réduire considérablement le coût des calculs numériques, lorsque le calcul exact n'est pas possible (ou est possible mais devient prohibitif à cause de la complexité géométrique du milieu), tout en conservant une excellente précision sur le résultat

**2.2. Cadre fonctionnel. Existence et unicité de la solution.** La méthode des développements asymptotiques assure très bien le passage de la structure fortement hétérogène à la structure homogène équivalente. Pour pouvoir justifier les résultats formels obtenus par la méthode des développements asymptotiques (elle reste tout de même une méthode heuristique), on va appliquer une méthode de type "énergie" pour démontrer la convergence de la suite des solutions  $u^\varepsilon$  vers la solution du problème homogénéisé.

Dans toute la suite de cette section, la géométrie du composite considéré sera supposée périodique. La structure du milieu est donc parfaitement connue dès que l'on connaît la géométrie et le comportement d'une de ses périodes.

On va considérer un milieu piézoélectrique qui occupe le domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , de frontière  $\partial\Omega$  "suffisamment régulière". Notons  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  et  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , respectivement le champ de déplacement élastique et le potentiel électrique.

On utilise les espaces de fonctions  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  à composantes dans  $L^2(\Omega)$ ,  $H^1(\Omega)$ ,  $H_0^1(\Omega)$  qu'on note respectivement:  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ ,  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ ,  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ . Le tenseur de déformations associé au champ de déplacements  $\mathbf{u}$  est donné par

$$e_{khh}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_k} \right)$$

On note par  $\mathbf{X} = (x_{ijkh})$ ,  $\mathbf{Y} = (y_{jkh})$ ,  $\mathbf{Z} = (z_{ij})$  des tenseurs respectivement d'ordre 4, 3 et 2, et par  $\langle F \rangle$  la moyenne sur  $Y$  de la fonction  $F$  c'est-à-dire  $\langle F \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y F dy$  et on introduit les espaces suivants:

$$H_{per}(Y) = \{v \in H^1(Y) \text{ telle que } v \text{ est } Y \text{ périodique}\}$$

et

$$H_{per}(Y, \mathbb{R}^3) = \{\mathbf{v} = (v_i) \text{ telle que } v_i \in H_{per}(Y)\}$$

On rappelle que une fonction est dite  $Y$ -périodique si ses traces sur les faces opposées de  $Y$  sont égales.

Par la suite on utilisera la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés. On considère un problème piezoelectrique sous la forme:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_j} [c_{ijkl} e_{kl}(\mathbf{u}) + g_{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] = b_i \\ \frac{\partial}{\partial x_j} [g_{jkl} e_{kl}(\mathbf{u}) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

avec les notations suivantes:  $\mathbf{u}$  vecteur déplacement;  $b$  densité volumique de forces dans  $\Omega$ ;  $\varphi$  potentiel électrique; les coefficients  $C_{ijkl}$  (élastiques),  $g_{ijk}$  (piézoélectriques) et  $\epsilon_{ij}$  (diélectriques) qui vérifient les hypothèses habituelles: a) *de symétrie*:  $C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} = C_{ijlk}$ ;  $g_{ijk} = g_{ikj}$ ;  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ ; b) *de positivité*:  $\exists \alpha > 0, C_{ijkl} e_{kl} e_{ij} \geq \alpha |e|^2, \forall e \in E_s^3$ ;  $\exists \beta > 0, \epsilon_{ij} a_i a_j \geq \beta |a|^2, \forall a \in \mathbb{R}^3, E_s^3$  étant l'espace des matrices  $3 \times 3$  symétriques; c) *de bornétude*:  $C_{ijkl}, g_{ijk}$  et  $\epsilon_{ij}$  sont dans  $L^\infty(\Omega)$ .

Dans ces équations les inconnues sont  $\mathbf{u}$  et  $\varphi$ . En plus, on considère les **conditions aux limites de Dirichlet** suivantes:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega \\ \varphi = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On introduit les espaces fonctionnels suivants:

$\mathbf{V} = \{\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbf{H}^1(\Omega) ; v_i = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$  et  $\Theta = \{\Psi \in H^1(\Omega) ; \Psi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ . Le produit  $\mathbf{V} \times \Theta$  est un espace de Hilbert. Soient  $(\mathbf{v}, \Psi)$  dans  $\mathbf{V} \times \Theta$  où  $\mathbf{v} = (v_i)$ . En multipliant les équations ci-dessus par  $\mathbf{v}$  et  $\Psi$  et en intégrant sur  $\Omega$  on obtient

$$\begin{cases} \int_{\Omega} -\frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl} e_{kl}(\mathbf{u}) + g_{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] v_i dx = \int_{\Omega} b_i v_i dx \\ \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} [g_{jkl} e_{kl}(\mathbf{u}) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] \Psi dx = 0. \end{cases}$$

En regroupant les deux termes et en appliquant la formule de Green on obtient:

$$\int_{\Omega} [c_{ijkl} e_{kl}(\mathbf{u}) + g_{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] e_{ij}(\mathbf{v}) dx - \int_{\Omega} [g_{jkl} e_{kl}(\mathbf{u}) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} b_i v_i dx$$

En introduisant la forme bilinéaire

$$a((u, \varphi); (v, \Psi)) = \int_{\Omega} [c_{ijkl} e_{kl}(\mathbf{u}) + g_{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] e_{ij}(\mathbf{v}) dx - \int_{\Omega} [g_{jkl} e_{kl}(\mathbf{u}) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} dx$$

et la forme linéaire

$$L(v, \Psi) = \int_{\Omega} b_i v_i dx$$

le problème se formule ainsi.

$$\text{Trouver } (u, \varphi) \in \mathbf{V} \times \Theta \quad \text{tel que } a((u, \varphi); (v, \Psi)) = L(v, \Psi), \quad \forall (v, \Psi) \in \mathbf{V} \times \Theta \quad (1)$$

On peut démontrer facilement que sous les hypothèses a), b) et c) le problème (1) admet une solution unique. En effet, l'existence et l'unicité de la solution du problème (1) découle d'une manière classique de l'application du lemme de Lax-Milgram.

### 2.3. Homogénéisation par la méthode des développements asymptotiques.

L'intérêt consiste à remplacer dans la modélisation notre milieu périodique hétérogène par un milieu équivalent homogène dont on évaluera les caractéristiques physiques. Pour une suite de valeurs réelles de  $\varepsilon$  tendant vers zéro, on peut aussi trouver la limite éventuelle de la solution  $(\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)$  et le cas échéant, le problème vérifié par cette limite.

La technique d'homogénéisation que nous allons développer ici, utilise les idées de la méthode des échelles multiples et les techniques relatives aux équations aux dérivées partielles. L'hypothèse fondamentale, consiste à postuler que la structure du milieu est périodique, la période étant "petite" par rapport aux dimensions du milieu. Autrement dit, les valeurs des coefficients qui caractérisent le milieu, se reproduisent par déplacement périodique de petite échelle  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ .

On suppose donc que la structure du matériau est caractérisée par des coefficients  $C_{ijkl}$ ,  $g_{ijk}$  et  $\epsilon_{ij}$  présentant un caractère périodique en  $x$ . De manière plus précise, soit  $Y = [0, Y_1] \times [0, Y_2] \times [0, Y_3]$  la cellule de base et soient les fonctions  $C_{ijkl}(y)$ ,  $g_{ijk}(y)$  et  $\epsilon_{ij}(y)$  définies sur la période de base  $Y$ . On suppose que ces fonctions satisfont les conditions a), b) et c). Soit un scalaire  $\varepsilon > 0$  destiné à tendre vers 0. Avec le changement de variable  $y = \frac{x}{\varepsilon}$ , ces fonctions deviennent:

$$C_{ijkl}^\varepsilon(x) = C_{ijkl}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right); g_{ijk}^\varepsilon(x) = g_{ijk}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right); \epsilon_{ij}^\varepsilon(x) = \epsilon_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), x \in \Omega.$$

Les fonctions  $C_{ijkl}^\varepsilon$ ,  $g_{ijk}^\varepsilon$ ,  $\epsilon_{ij}^\varepsilon$  sont  $\varepsilon Y$ -périodiques.

Pour  $\varepsilon > 0$  fixé, le problème hétérogène se formule ainsi

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl}^\varepsilon e_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k}] & = b_i \\ \frac{\partial}{\partial x_j} [g_{jkl} e_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k}] & = 0 \\ \mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega \\ \varphi^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

Ce problème admet une solution unique  $\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon$ , conformément au lemme de Lax-Milgram.

Pour déterminer un problème homogène équivalent à (2), on cherchera  $\mathbf{u}^\varepsilon$  et  $\varphi^\varepsilon$  sous la forme de développements asymptotiques:

$$\mathbf{u}^\varepsilon(x) = \mathbf{u}^0(x, y) + \varepsilon \mathbf{u}^1(x, y) + \varepsilon^2 \mathbf{u}^2(x, y) + \dots \quad (3)$$

$$\varphi^\varepsilon(x) = \varphi^0(x, y) + \varepsilon \varphi^1(x, y) + \varepsilon^2 \varphi^2(x, y) + \dots \quad (4)$$

où  $y = \frac{x}{\varepsilon}$  et les fonctions  $\mathbf{u}^i$  et  $\varphi^i$  sont  $Y$ -périodiques par rapport à la variable  $y$ .

On rappelle que la dérivation par rapport à la variable  $x_i$ ,  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ , s'écrit  $\frac{\partial}{\partial x_i} \rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_i}$  et par conséquent  $e_{ij}(u^\varepsilon(x)) = e_{ijx}(u(x, y) + \frac{1}{\varepsilon} e_{ijy}(u(x, y)))$  où  $u^\varepsilon(x) = u(x, \frac{x}{\varepsilon})$ .

En tenant compte de ce qui précède, le système (2) devient

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-2} \left( -\frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl} e_{kly}(\mathbf{u}^\varepsilon) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial y_k}] \right) + \varepsilon^{-1} \left( -\frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl} e_{kly}(\mathbf{u}^\varepsilon) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial y_k}] - \right. \\ & \left. -\frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl} e_{klx}(\mathbf{u}^\varepsilon) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k}] \right) + \varepsilon^0 \left( -\frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl} e_{kly}(\mathbf{u}^\varepsilon) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial y_k}] + \varepsilon(\dots) \right) = b_i \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-2} \left( \frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl} e_{kly}(\mathbf{u}^\varepsilon) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial y_k}] \right) + \varepsilon^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} [g_{jkl} e_{kly}(\mathbf{u}^\varepsilon) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial y_k}] + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl} e_{klx}(\mathbf{u}^\varepsilon) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k}] \right) + \varepsilon^0 \left( \frac{\partial}{\partial x_j} [g_{jkl} e_{kly}(\mathbf{u}^\varepsilon) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial y_k}] + \varepsilon(\dots) \right) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

En remplaçant  $\mathbf{u}^\varepsilon$  et  $\varphi^\varepsilon$  par leurs développements dans (5) et (6) et par identification des puissances de  $\varepsilon$ , on obtient une "cascade" de problèmes:

$$\frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl} e_{kly}(\mathbf{u}^0) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_k}] = 0 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl} e_{kly}(\mathbf{u}^1) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] - \frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl} e_{kly}(\mathbf{u}^0) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_k}] \\ & - \frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl} e_{klx}(\mathbf{u}^0) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k}] = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl} e_{kly}(\mathbf{u}^2) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^2}{\partial y_k}] - \frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl} e_{kly}(\mathbf{u}^1) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] \\ & - \frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl} e_{klx}(\mathbf{u}^1) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_k}] - \frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl} e_{klx}(\mathbf{u}^0) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k}] = b_i \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl} e_{kly}(\mathbf{u}^0) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_k}] = 0 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl} e_{kly}(\mathbf{u}^1) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] + \frac{\partial}{\partial x_j} [g_{jkl} e_{kly}(\mathbf{u}^0) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_k}] \\ & + \frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl} e_{klx}(\mathbf{u}^0) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k}] = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_j} [g_{jkl} e_{kly}(\mathbf{u}^1) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] + \frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl} e_{klx}(\mathbf{u}^1) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_k}] \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} [g_{jkl} e_{klx}(\mathbf{u}^0) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k}] + \frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl} e_{kly}(\mathbf{u}^2) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^2}{\partial y_k}] = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Les problèmes ci-dessus s'énoncent ainsi

**Premier système** : trouver  $\mathbf{u}^0$  et  $\varphi^0$  solutions de

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl}e_{kly}(\mathbf{u}^0) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_k}] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl}e_{kly}(\mathbf{u}^0) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_k}] = 0 \\ \mathbf{u}^0 \text{ et } \varphi^0 \text{ sont } Y - \text{périodiques} \end{cases} \quad (13)$$

**Deuxième système:** trouver  $\mathbf{u}^1$  et  $\varphi^1$  solutions de

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl}e_{kly}(\mathbf{u}^1) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] - \frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl}e_{kly}(\mathbf{u}^0) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_k}] \\ -\frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl}e_{klx}(\mathbf{u}^0) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k}] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl}e_{kly}(\mathbf{u}^1) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] + \frac{\partial}{\partial x_j} [g_{jkl}e_{kly}(\mathbf{u}^0) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_k}] \\ + \frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl}e_{klx}(\mathbf{u}^0) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k}] = 0 \\ \mathbf{u}^1 \text{ et } \varphi^1 \text{ sont } Y - \text{périodiques} \end{cases} \quad (14)$$

**Troisième système:** trouver  $\mathbf{u}^2$  et  $\varphi^2$  solutions de

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl}e_{kly}(\mathbf{u}^2) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^2}{\partial y_k}] - \frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl}e_{kly}(\mathbf{u}^1) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] \\ -\frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl}e_{klx}(\mathbf{u}^1) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_k}] - \frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl}e_{klx}(\mathbf{u}^0) - g_{kij} \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k}] = b_i \\ \frac{\partial}{\partial x_j} [g_{jkl}e_{kly}(\mathbf{u}^1) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] + \frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl}e_{klx}(\mathbf{u}^1) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_k}] \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} [g_{jkl}e_{klx}(\mathbf{u}^0) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k}] + \frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl}e_{kly}(\mathbf{u}^2) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^2}{\partial y_k}] = 0 \\ \mathbf{u}^2 \text{ et } \varphi^2 \text{ sont } Y - \text{périodiques} \end{cases} \quad (15)$$

### Equations homogénéisées. Caractéristiques physiques homogénéisées

Rappelons d'abord le *lemme de Fredholm*: Soit  $F$  une fonction de carré intégrable sur  $Y$ . On considère le problème aux limites:

$$\begin{cases} A\Phi = F \\ \Phi \text{ est } Y - \text{périodique} \end{cases}$$

où  $A$  est un opérateur elliptique. Alors la solution périodique  $\Phi$  existe si et seulement si  $\langle F \rangle = 0$ . De plus si la solution existe, elle est unique à une constante additive près.

Tout d'abord, notons que le premier système nous donne l'indépendance de la solution  $(\mathbf{u}^0, \varphi^0)$  de la variable microscopique  $y$ :  $\mathbf{u}^0(x, y) = \mathbf{u}(x)$  et  $\varphi^0(x, y) = \varphi(x)$ . En effet, d'après l'alternative de Fredholm, la solution de ce système existe à une constante additive près. Si on multiplie la première équation par  $\mathbf{u}^0$  et la deuxième équation par  $\varphi^0$  et on intègre sur  $Y$ , on obtient:

$$\int_Y \left( \frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl}e_{kly}(\mathbf{u}^0) + g_{ijk} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_j}] \cdot \mathbf{u}_i^0 \right) dy - \int_Y \frac{\partial}{\partial y_j} [g_{ijk}e_{kly}(\mathbf{u}^0) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_k}] \cdot \varphi^0 dy = 0$$

En appliquant la formule de Green et en tenant compte de la périodicité des fonctions on obtient



$$\int_Y [C_{ijkl}e_{kly}(\mathbf{u}^0)e_{ijy}(\mathbf{u}^0) + \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_k} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_j}] dy = 0$$

En tenant compte de l'ellipticité b), on a  $0 \geq \alpha \sum_{kl=0}^3 \|e_{kly}(\mathbf{u}^0)\|^2 + \beta \left\| \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_j} \right\|^2$  d'où  $e_{kly}(\mathbf{u}^0) = 0$  et  $\frac{\partial \varphi^0}{\partial y_j} = 0$ . Ainsi  $\mathbf{u}^0(x, y) = \mathbf{u}(\mathbf{x})$  et  $\varphi^0(x, y) = \varphi(x)$

Alors, le deuxième système (14) devient

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl}e_{kly}(\mathbf{u}^1) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] = \frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl}e_{klx}(\mathbf{u}) + g_{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] \\ -\frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl}e_{kly}(\mathbf{u}^1) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] = \frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl}e_{klx}(\mathbf{u}) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] \end{cases} \quad (16)$$

En appliquant l'opérateur  $\langle \cdot \rangle$  (moyenne) aux deux seconds membres et en tenant compte de la périodicité on obtient

$$\int_Y \frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl}e_{klx}(\mathbf{u}) + g_{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] dy = 0$$

et

$$\int_Y \frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl}e_{klx}(\mathbf{u}) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] dy = 0$$

et donc d'après le lemme de Fredholm on a l'existence et l'unicité de la solution à une constante additive près. Grâce à la linéarité du problème (16) on peut chercher  $\mathbf{u}^1$  et  $\varphi^1$  sous la forme

$$\mathbf{u}_k^1(x, y) = \chi_k^{mn}(y)e_{mnx}(\mathbf{u}) + \Phi_k^m(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \quad (17)$$

$$\varphi^1(x, y) = \Psi^{mn}(y)e_{mnx}(\mathbf{u}) + R^m(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \quad (18)$$

où  $\chi^{mn}$ ,  $\Phi^m$ ,  $\Psi^{mn}$  et  $R^m$  sont des fonctions périodiques solutions de

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl}(y)(e_{kly}(\chi^{mn}(y))e_{mnx}(\mathbf{u}) + e_{kly}(\Phi^m(y)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}) + \\ \quad + g_{kij}(y)(\frac{\partial \Psi^{mn}(y)}{\partial y_k} e_{mnx}(\mathbf{u}) + \frac{\partial R^m(y)}{\partial y_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_m})] = \\ \quad = \frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijmn}(y)e_{mnx}(\mathbf{u}) + g_{mij}(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}] \\ -\frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl}(y)(e_{kly}(\chi^{mn}(y))e_{mnx}(\mathbf{u}) + e_{kly}(\Phi^m(y)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}) - \\ \quad - \epsilon_{jk}(y)(\frac{\partial \Psi^{mn}(y)}{\partial y_k} e_{mnx}(\mathbf{u}) + \frac{\partial R^m(y)}{\partial y_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_m})] = \\ \quad = \frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jmn}(y)e_{mnx}(\mathbf{u}) - \epsilon_{jm}(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}] \end{cases} \quad (19)$$

En multipliant les deux équations ci-dessus par la fonction test  $\mathbf{v} = (v_i) \in H_{per}(Y, \mathbb{R}^3)$ , en intégrant sur  $Y$ , en appliquant la formule de Green et en tenant compte de la condition de périodicité on obtient les problèmes cellulaires suivants:

$$\left\{ \int_Y (C_{ijkl}(y)e_{kly}(\chi^{mn}(y) + C_{ijmn}(y) + g_{kij}(y) \frac{\partial \Psi^{mn}(y)}{\partial y_k}) e_{ij}(v) dy = 0 \right. \quad (20)$$

$$\left. \forall \mathbf{v} \in H_{per}(Y, \mathbb{R}^3) \right.$$

$$\left\{ \int_Y (g_{jkl}(y)e_{kly}(\chi^{mn}) - \epsilon_{jk}(y) \frac{\partial \Psi^{mn}(y)}{\partial y_k} + g_{jmn}(y) \frac{\partial w}{\partial y_j}) dy = 0 \right. \quad (21)$$

$$\left. \forall w \in H_{per}(Y) \right.$$

$$\left\{ \int_Y (g_{mij}(y) + C_{ijkl}(y)e_{kly}(\Phi^m(y)) + g_{kij}(y) \frac{\partial R^m(y)}{\partial y_k}) e_{ij}(\mathbf{v}) dy = 0 \right. \quad (22)$$

$$\left. \forall \mathbf{v} \in H_{per}(Y, \mathbb{R}^3) \right.$$

$$\left\{ \int_Y (\epsilon_{jm}(y) + \epsilon_{jk}(y) \frac{\partial R^m(y)}{\partial y_k} - g_{jkl}(y)e_{kly}(\Phi^m(y)) \frac{\partial w}{\partial y_j}) dy = 0 \right. \quad (23)$$

$$\left. \forall w \in H_{per}(Y) \right.$$

Le troisième système s'écrit sous la forme:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl}(y)e_{kly}(\mathbf{u}^2) + g_{kij}(y) \frac{\partial \varphi^2}{\partial y_k}] = \frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl}(y)e_{kly}(\mathbf{u}^1) + g_{kij}(y) \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] \\ + \frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl}(y)e_{klx}(\mathbf{u}^1) + g_{kij}(y) \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_k}] + \frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl}(y)e_{klx}(\mathbf{u}) - g_{kij}(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] + b_i \\ -\frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl}(y)e_{kly}(\mathbf{u}^2) - \epsilon_{jk}(y) \frac{\partial \varphi^2}{\partial y_k}] = \frac{\partial}{\partial x_j} [g_{jkl}(y)e_{kly}(\mathbf{u}^1) - \epsilon_{jk}(y) \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] \\ + \frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl}(y)e_{klx}(\mathbf{u}^1) - \epsilon_{jk}(y) \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_k}] + \frac{\partial}{\partial x_j} [g_{jkl}(y)e_{klx}(\mathbf{u}) - \epsilon_{jk}(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] \end{array} \right. \quad (24)$$

D'après le lemme de Fredholm ce système admet une solution périodique si les deux seconds membres ont des moyennes nulles. Ainsi la moyenne de la première équation donne

$$\int_Y (\frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl}(y)e_{kly}(\mathbf{u}^1) + g_{kij}(y) \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] + \frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl}(y)e_{klx}(\mathbf{u}) + g_{kij}(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] + b_i) dy = 0$$

d'où, en remplaçant  $\mathbf{u}^1$  et  $\varphi^1$  par leurs expressions on a:

$$\int_Y [(C_{ijmn}(y)e_{mny}(\chi^{kl}(y) + g_{mij}(y) \frac{\partial \Psi^{kl}(y)}{\partial y_m} + C_{ijkl}(y) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l}) + (g_{kij}(y) + C_{ijmn}(y) \frac{\partial \Phi_m^k(y)}{\partial y_n} + g_{mij}(y) \frac{\partial R^k(y)}{\partial y_m}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} + b_i] dy = 0$$

soit

$$C_{ijkl}^h(y) \partial^2 u_k \partial x_j \partial x_l + g_{kij}^h(y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} + b_i = 0 \quad (25)$$

où

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^h &= \langle C_{ijmn}(y)e_{mny}(\chi^{kl}(y)) + g_{mij}(y) \frac{\partial \Psi^{kl}(y)}{\partial y_m} + C_{ijkl}(y) \rangle \\ g_{kij}^h &= \langle g_{kij}(y) + g_{mij}(y) \frac{\partial R^k(y)}{\partial y_m} + C_{ijmn}(y) \frac{\partial \Phi_m^k(y)}{\partial y_n} \rangle \end{aligned} \quad (26)$$

Ceci constituent les coefficients homogénéisés de la structure piézo-électrique ( $(C_{ijkl}^h)$ ): tenseur élastique homogénéisé; ( $g_{kij}^h$ ): tenseur piézoélectrique homogénéisé). La moyenne de la deuxième équation de (24) donne

$$\int_Y \left( \frac{\partial}{\partial x_j} [g_{jkl}(y)e_{kly}(\mathbf{u}^1) - \epsilon_{jk}(y) \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] + \frac{\partial}{\partial x_j} [g_{jkl}(y)e_{klx}(\mathbf{u}) - \epsilon_{jk}(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] \right) dy = 0$$

et en remplaçant  $\mathbf{u}^1$  et  $\varphi^1$  par leurs expressions on obtient:

$$\begin{aligned} \int_Y & \left[ (g_{jkl}(y)e_{kly}(\chi^{mn}(y)) - \epsilon_{jk}(y) \frac{\partial \Psi^{mn}(y)}{\partial y_k} + g_{jmn}(y)) \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_j \partial x_n} \right. \\ & \left. + (g_{jkl}(y)e_{kly}(\Phi^m(y)) - \epsilon_{jk}(y) \frac{\partial R^m(y)}{\partial y_k} - \epsilon_{jm}(y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_m}) \right] dy = 0 \end{aligned}$$

soit

$$g_{jmn}^h \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_j \partial x_n} - \epsilon_{jm}^h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_m} = 0 \quad (27)$$

où

$$\begin{aligned} \epsilon_{jm}^h &= \langle \epsilon_{jm}(y) + \epsilon_{jk}(y) \frac{\partial R^m(y)}{\partial y_k} - g_{jkl}(y)e_{kly}(\Phi^m(y)) \rangle \\ g_{jmn}^h &= \langle g_{jmn}(y) + g_{jkl}(y)e_{kly}(\chi^{mn}(y)) - \epsilon_{jk}(y) \frac{\partial \Psi^{mn}(y)}{\partial y_k} \rangle \end{aligned} \quad (28)$$

( $\epsilon_{jm}^h$ ) est le tenseur diélectrique homogénéisé. Les équations piézoélectriques homogénéisées s'écrivent donc

$$\begin{cases} C_{ijkl}^h \partial^2(u_k) \partial x_j \partial x_l + g_{kij}^h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} + b_i = 0 \\ g_{jmn}^h \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_j \partial x_n} - \epsilon_{jm}^h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_m} = 0 \end{cases} \quad (29)$$

Les conditions aux limites du problème homogénéisé se déduisent facilement des conditions aux limites du problème hétérogène et sont donc telles que:  $\mathbf{u} = 0$  sur  $\partial\Omega$  et  $\varphi = 0$  sur  $\partial\Omega$

**Remark 2.1.** a) Les coefficients  $g_{kij}^h$  donnés par (26-2) et (28-2) sont identiques; b) Les caractéristiques homogénéisées gardent les propriétés de symétrie; c) On peut démontrer que sous les hypothèses de symétrie, de positivité et de bornétude, si les coefficients sont  $Y$ -périodiques et si  $b \in L^2(\Omega)$  alors la solution du problème hétérogène converge faiblement vers la solution du problème homogénéisé ([12]); aussi, on peut trouver d'une manière indirecte à l'étape d'homogénéisation les champs de contraintes à l'échelle microscopique dans la situation où la structure composite est soumise à un chargement donné. On donne ci-après les relations correspondantes ([14]):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^0(x, y) &= e_{mnx}(\mathbf{u}^0) \cdot \left[ C_{ijmn}^\varepsilon(y) + C_{ijkl}^\varepsilon(y) \cdot e_{kly}(\chi^{mn}(y)) + g_{kij}^\varepsilon(y) \cdot \frac{\partial \Psi^{mn}(y)}{\partial y_k} \right] \\ &+ \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_m}(x) \cdot \left[ C_{ijkl}^\varepsilon(y) \cdot e_{kly}(\Phi^m(y)) + g_{mij}^\varepsilon(y) + g_{kij}^\varepsilon(y) \cdot \frac{\partial R^m(y)}{\partial y_k} \right], \quad i, j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

ce qui représente les relations analytiques des microcontraintes pour un chargement macroscopique donné ( $\mathbf{u}^0, \varphi^0$ ).

Si on note par

$$K_{ijmn} = C_{ijmn}^\varepsilon(y) + C_{ijkl}^\varepsilon(y) \cdot e_{kly}(\chi^{mn}(y)) + g_{kij}^\varepsilon(y) \cdot \frac{\partial \Psi^{mn}(y)}{\partial y_k}$$

et

$$G_{mij} = g_{mij}^\varepsilon(y) + C_{ijkl}^\varepsilon(y) \cdot e_{kly}(\Phi^m(y)) + g_{kij}^\varepsilon(y) \cdot \frac{\partial R^m(y)}{\partial y_k}$$

alors les relations précédentes peuvent s'écrire

$$\sigma_{ij}^0(x, y) = K_{ijmn} \cdot e_{mnx}(\mathbf{u}^0) + G_{mij} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_m}(x), i, j = 1, 2, 3 \quad (30)$$

La connaissance donc de la microcontrainte  $\sigma_{ij}^0(x, y)$  pour un point fixé  $x$  de la section de la période de base nécessite l'évaluation des coefficients  $K_{ijmn}(y_1, y_2)$  en ce point là. Les  $K_{ijmn}(y_1, y_2)$  s'appellent **les microcontraintes élémentaires**. Après la résolution des problèmes cellulaires, ces quantités sont calculées une fois pour tout, pour une configuration donnée du composite. Le champ de microcontraintes correspondant à un champ de déformations macroscopiques (ou bien de contraintes macroscopiques) s'obtient comme combinaison linéaire de ces dernières et des microcontraintes élémentaires. On peut tester ainsi l'effet des divers chargements macroscopiques.

### 3. Application à une structure piézoélectrique monoclinique

On va considerer dans cette section le cas particulier des composites à composants monocliniques. Nous consacrons donc ce paragraphe à ce développement : construction des problèmes cellulaires, définition des seconds membres et enfin expressions des caractéristiques homogénéisées.

On va appliquer donc les résultats de la section 2 à une structure composite fibreuse unidirectionnelle dont les constituants sont *monocliniques*. On montre que l'exploitation de certaines hypothèses vérifiées par la cellule de base et ses constituants, permet de ramener la résolution de ces problèmes cellulaires au cas bidimensionnel, ce qui réduit considérablement le coût de calcul et qui permet l'introduction de certains paramètres architecturaux qui pourrait être intéressants sur le plan mécanique. Nous abordons la mise en forme des nouveaux problèmes permettant l'utilisation de la technique des éléments finis pour leur résolution. On donne une formulation permettant la mise en oeuvre numérique des coefficients homogénéisés.

On considère un composite constitué de fibres distribuées de manière périodique dans une matrice. On suppose que ce composite vérifie les hypothèses suivantes : H1) La cellule de base est définie par  $Y = H \times [0, y_3]$  où  $H$  est la section transversale de  $Y$  incluse dans le plan  $Oy_1y_2$  et  $y_3$  est un réel quelconque; H2) Les coefficients  $C_{ijkl}$ ,  $g_{kij}$  et  $\epsilon_{jk}$  caractérisant les constituants de la cellule de base  $Y$  sont indépendants de la variable  $y_3$  i.e.  $C_{ijkl}(y) = C_{ijkl}(y_1, y_2)$ ;  $g_{kij}(y) = g_{kij}(y_1, y_2)$ ;  $\epsilon_{jk}(y) = \epsilon_{jk}(y_1, y_2)$ ; H3) Le tenseur d'élasticité est de la forme

$$\begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & C_{1211} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & C_{1222} \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & C_{1233} \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} & C_{2313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2313} & C_{1313} & 0 \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & 0 & 0 & C_{1212} \end{pmatrix}$$

le tenseur de piézoélectricité est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{123} & g_{113} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{223} & g_{213} & 0 \\ g_{311} & g_{322} & g_{333} & 0 & 0 & g_{312} \end{pmatrix}$$

et le tenseur de diélectricité est de la forme

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

**Remark 3.1.** Une analyse des hypothèses ci-dessus conduit à plusieurs conclusions préliminaires: 1) De l'hypothèse  $H_2$  on déduit que  $\frac{\partial C_{ijkl}(y)}{\partial y_3} = 0$ ,  $\frac{\partial g_{kij}(y)}{\partial y_3} = 0$ ,  $\frac{\partial R^m(y)}{\partial y_3} = 0$ ; 2) Les fonctions  $\chi^{mn}$ ,  $\Psi^{mn}$ ,  $R^m$  et  $\Phi^m$  sont  $Y$ -périodiques de période  $Y_3$  en  $y_3$  ( $Y_3$  étant quelconque dans  $\mathbb{R}$ ) donc ces fonctions sont indépendantes de  $y_3$ . D'où

$$\frac{\partial \chi_l^{mn}(y)}{\partial y_3} = 0, \quad \frac{\partial \Psi^{mn}(y)}{\partial y_3} = 0, \quad \frac{\partial R^m(y)}{\partial y_3} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi_l^m(y)}{\partial y_3} = 0$$

3) Grâce à la symétrie des tenseurs on a  $\chi^{mn} = \chi^{nm}$  et  $\Psi^{mn} = \Psi^{nm}$  et par conséquent il y aura 18 fonctions à déterminer:

$$\chi^{11}, \chi^{12}, \chi^{13}, \chi^{22}, \chi^{23}, \chi^{33}; \Psi^{11}, \Psi^{12}, \Psi^{13}, \Psi^{22}, \Psi^{23}, \Psi^{33}; \Phi^1, \Phi^2, \Phi^3; R^1, R^2, R^3$$

Par la suite, les fonctions ne dépendent que des variables  $y_1$  et  $y_2$ . En tenant compte des remarques précédentes, les équations vérifiées par  $\chi^{mn}$ ,  $\Psi^{mn}$ ,  $R^m$  et  $\Phi^m$  au sens des distributions prennent les formes suivantes

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl} \frac{\partial \chi_l^{mn}}{\partial y_k} + g_{kij} \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial y_k}] = \frac{\partial}{\partial y_j} C_{ijmn} \\ -\frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl} \frac{\partial \chi_l^{mn}}{\partial y_k} - \epsilon_{jk} \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial y_k}] = \frac{\partial}{\partial y_j} g_{jmn} \\ \chi^{mn} \text{ et } \Psi^{mn} \text{ sont } H\text{-périodiques } (1 \leq j, k \leq 2 \text{ et } 1 \leq m, n, l \leq 3) \end{cases} \quad (31)$$

et

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_j} [g_{kij} \frac{\partial R^m}{\partial y_k} + C_{ijkl} \frac{\partial \Phi_l^m}{\partial y_k}] = \frac{\partial}{\partial y_j} g_{mij} \\ -\frac{\partial}{\partial y_j} [\epsilon_{jk} \frac{\partial R^m}{\partial y_k} - g_{jkl} \frac{\partial \Phi_l^m}{\partial y_k}] = \frac{\partial}{\partial y_j} \epsilon_{jm} \\ R^m \text{ et } \Phi^m \text{ sont } H\text{-périodiques } (1 \leq j, k \leq 2 \text{ et } 1 \leq m, n, l \leq 3) \end{cases}$$

En tenant compte de l'hypothèse  $H_3$  on constate que  $g_{jmn} = 0$  pour  $(m, n) = (1, 1); (2, 2); (3, 3); (1, 2)$  et pour  $j = 1, 2$ . Ainsi  $\frac{\partial}{\partial y_j} (g_{mij}) = 0$ . Ceci nous conduit à grouper les équations précédentes en deux sous-ensembles: 1) l'ensemble des équations régissant les  $\chi^{mn}$  et  $\Psi^{mn}$  pour  $(m, n) = (1, 1); (2, 2); (3, 3); (1, 2)$ ; 2) l'ensemble des équations régissant les  $\chi^{mn}$  et  $\Psi^{mn}$  pour  $(m, n) = (1, 3); (2, 3)$ .

La démarche est similaire à celle du cas élastique ([6]).

On considère d'abord le cas  $(m, n) = (1, 1); (2, 2); (3, 3); (1, 2)$ . On a le résultat suivant:

**Proposition 3.1.** *Sous les hypothèses  $H_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) et en tenant compte des remarques précédentes, les fonctions  $\chi^{mn}$  et  $\Psi^{mn}$  sont telles que  $\chi^{mn} = (\chi_1^{mn}, \chi_2^{mn}, 0)$  et  $\Psi^{mn} = 0$ ; en plus  $(\chi_1^{mn}, \chi_2^{mn})$  sont solutions des problèmes:*

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl} \frac{\partial \chi_l^{mn}}{\partial y_k}] = \frac{\partial}{\partial y_j} C_{ijmn} \\ \chi_l^{mn} H - \text{périodique} \end{cases} \quad (32)$$

Le problème ci-dessus est un problème de type élastique bidimensionnel  
Pareillement, pour  $(m, n) = (1, 3); (2, 3)$  on a:

**Proposition 3.2.** *Sous les hypothèses  $H_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) et en tenant compte des remarques précédentes les fonctions  $\chi^{m3}$  et  $\Psi^{m3}$  sont telles que  $\chi^{m3}(y_1, y_2) = (0, 0, \chi_3^{m3}(y_1, y_2))$ ; en plus  $\chi_3^{m3}$  et  $\Psi^{m3}$  sont solutions des problèmes:*

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_j} [C_{3jk3} \frac{\partial \chi_3^{m3}}{\partial y_k} + g_{k3j} \frac{\partial \Psi^{m3}}{\partial y_k}] = \frac{\partial}{\partial y_j} C_{3jm3} \\ -\frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jk3} \frac{\partial \chi_3^{m3}}{\partial y_k} - \epsilon_{jk} \frac{\partial \Psi^{m3}}{\partial y_k}] = \frac{\partial}{\partial y_j} g_{jm3} \\ \chi_3^{m3} \text{ et } \Psi^{m3} \text{ sont } H\text{-périodiques} \end{cases} \quad (33)$$

Le problème ci-dessus est un problème de type piézoélectrique.

**Détermination des fonctions  $R^m$  et  $\Phi^m$**

Ces fonctions sont solutions du système :

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_j} [g_{kij} \frac{\partial R^m}{\partial y_k} + C_{ijkl} \frac{\partial \Phi_l^m}{\partial y_k}] = \frac{\partial}{\partial y_j} g_{mij} \\ -\frac{\partial}{\partial y_j} [\epsilon_{jk} \frac{\partial R^m}{\partial y_k} - g_{jkl} \frac{\partial \Phi_l^m}{\partial y_k}] = \frac{\partial}{\partial y_j} \epsilon_{jm} \\ R^m \text{ et } \Phi^m \text{ sont } H\text{-périodiques } (1 \leq j, l, k \leq 2) \end{cases} \quad (34)$$

En tenant compte de l'hypothèse  $H_3$ , on constate que  $g_{mij} = 0$  pour  $m = 1, 2$  et pour  $i = 1, 2$ . On a deux cas:

**Cas où  $m = 1, 2$**

**Proposition 3.3.** *Sous les hypothèses  $H_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) et en tenant compte des remarques précédentes les fonctions  $\Phi^m$  et  $R^m$  sont telles que  $\Phi^m(y_1, y_2) = (0, 0, \Phi_3^m(y_1, y_2))$  et les fonctions  $\Phi_3^m$  et  $R^m$  sont solutions des problèmes:*

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_j} [C_{3jk3} \frac{\partial \Phi_3^m}{\partial y_k} + g_{k3j} \frac{\partial R^m}{\partial y_k}] = \frac{\partial}{\partial y_j} g_{m3j} \\ -\frac{\partial}{\partial y_j} [-g_{jk3} \frac{\partial \Phi_3^m}{\partial y_k} + \epsilon_{kj} \frac{\partial R^m}{\partial y_k}] = \frac{\partial}{\partial y_j} \epsilon_{jm} \\ R^m \text{ et } \Phi_3^m \text{ sont } H\text{-périodiques} \end{cases} \quad (35)$$

Les problèmes ci-dessus sont des problèmes de type piézoélectrique.

**Cas où  $m = 3$**

**Proposition 3.4.** *Sous les hypothèses  $H_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) et en tenant compte des remarques précédentes les fonctions  $R^3$  et  $\Phi^3$  sont telles que  $\Phi^3(y_1, y_2) = (\Phi_1^3(y_1, y_2), \Phi_2^3(y_1, y_2), 0)$  et  $R^3 = 0$ ; la fonction  $(\Phi_1^3, \Phi_2^3)$  est solution du problème:*

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_j} (C_{ijkl} \frac{\partial \Phi_l^3}{\partial y_k}) = \frac{\partial}{\partial y_j} g_{3ij} \\ \Phi_l^3 H - \text{périodique. } (1 \leq i, j, l, k, \leq 2) \end{cases} \quad (36)$$

On doit résoudre donc deux types de problèmes bidimensionnels définis sur la période de base  $H$ . Tout d'abord on introduit les espaces fonctionnels suivants:  
 $W_1(H) = \{v, v \in H^1(H), v \text{ } H\text{-périodique}\}$  et  
 $W_2(H) = \{\mathbf{v}, \mathbf{v} \in [H^1(H)]^2, \mathbf{v}H\text{-périodique}\}.$

Puisqu'on ne peut pas donner les solutions analytiques des problèmes cellulaires ci-dessus on va utiliser la méthode des éléments finis pour déterminer une approximation de leurs solutions. Afin de préparer ces problèmes à la mise en oeuvre numérique, on donne ci-dessous leurs formulations variationnelles.

**3.1. Formulation variationnelle des problèmes cellulaires.** Le système (32) est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\chi_1^{mn}, \chi_2^{mn}) \in W_2(H) \text{ telle que} \\ \int_H C_{ijkl} \frac{\partial \chi_1^{mn}}{\partial y_k} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy = - \int_H C_{ijmn} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy \end{array} \right. \quad \forall \mathbf{v} \in W_2(H) \quad (37)$$

Le système (33) est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\chi_3^{m3}, \Psi^{m3}) \in W_2(H) \text{ telle que} \\ \int_H [(C_{3jk3} \frac{\partial \chi_3^{m3}}{\partial y_k} + g_{k3j} \frac{\partial \Psi^{m3}}{\partial y_k}) \frac{\partial w}{\partial y_j} \\ + (g_{jk3} \frac{\partial \chi_3^{m3}}{\partial y_k} - \epsilon_{jk} \frac{\partial \Psi^{m3}}{\partial y_k}) \frac{\partial z}{\partial y_j}] dy = - \int_H (C_{3jm3} \cdot \frac{\partial w}{\partial y_j} + g_{jm3} \cdot \frac{\partial z}{\partial y_j}) dy \\ \forall (w, z) \in W_2(H) \end{array} \right. \quad (38)$$

Le système (35) est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\Phi_3^m, R^m) \in W_2(H) \text{ telle que} \\ \int_H [(C_{3jk3} \frac{\partial \Phi_3^m}{\partial y_k} + g_{k3j} \frac{\partial R^m}{\partial y_k}) \frac{\partial w}{\partial y_j} \\ + (-g_{jk3} \frac{\partial \Phi_3^m}{\partial y_k} + \epsilon_{jk} \frac{\partial R^m}{\partial y_k}) \frac{\partial z}{\partial y_j}] dy = - \int_H (g_{m3j} \cdot \frac{\partial w}{\partial y_j} + \epsilon_{jm} \cdot \frac{\partial z}{\partial y_j}) dy \\ \forall (w, z) \in W_2(H) \end{array} \right. \quad (39)$$

L'équation (36) est équivalente à

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\Phi_1^3, \Phi_2^3) \in W_2(H) \text{ telle que} \\ \int_H C_{ijkl} e_{kl}(\Phi^3) e_{ij}(\mathbf{v}) dy = - \int_H g_{3ij} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy \end{array} \right. \quad \forall \mathbf{v} \in W_2(H) \quad (40)$$

**3.2. Seconds membres des problèmes cellulaires.** On suppose que la cellule de base est constituée de deux matériaux de nature différente et vérifiant les hypothèses précédentes. La section  $H$  peut se décomposer alors sous la forme  $H = H_1 \cup H_2$ . Soit  $\Gamma$  l'interface entre les deux matériaux. i.e  $\Gamma = H_1 \cap H_2$ .

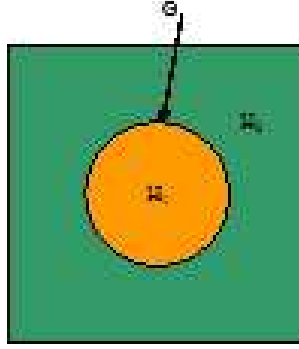
Notons que  $\partial H_1 = \Gamma$  et  $\partial H_2 = \Gamma \cup \partial H$

**Seconds membres des problèmes (37) (cas  $(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = (\mathbf{1}, \mathbf{1}); (\mathbf{2}, \mathbf{2}); (\mathbf{3}, \mathbf{3}); (\mathbf{1}, \mathbf{2})$ )**

Notons  $L^{mn}(\mathbf{v})$  le second membre du problème (37)

$$L^{mn}(\mathbf{v}) = - \int_H C_{ijmn} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy = - \int_{H_1} C_{ijmn} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy - \int_{H_2} C_{ijmn} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy$$

En utilisant la formule de Green, on obtient



$$L^{mn}(\mathbf{v}) = \int_{H_1} \frac{\partial C_{ijmn}}{\partial y_j} v_i dy - \int_{\partial H_1} C_{ijmn} v_i \eta_j^1 ds + \int_{H_2} \frac{\partial C_{ijmn}}{\partial y_j} v_i dy - \int_{\partial H_2} C_{ijmn} v_i \eta_j^2 ds$$

et on a

$$L^{mn}(\mathbf{v}) = - \int_{\Gamma} C_{ijmn} v_i \eta_j^1 ds - \int_{\Gamma \cup \partial H} C_{ijmn} v_i \eta_j^2 ds + \int_H \frac{\partial C_{ijmn}}{\partial y_j} v_i dy$$

Sachant que (grâce à la périodicité)  $\int_{\partial H} C_{ijmn} v_i \eta_j^2 ds = 0$  et que  $n_j^1 = -n_j^2$  sur  $\Gamma$ , on en déduit

$$L^{mn}(v) = \int_{\Gamma} [[C_{ijmn}]] v_i \eta_j^1 ds + \int_H \frac{\partial C_{ijmn}}{\partial y_j} v_i dy$$

où  $\eta^1 = (\eta_1^1, \eta_2^1)$  est la normale extérieure à  $\Gamma$  et  $[[[ \cdot ]]]$  est le saut de la fonction à l'interface  $\Gamma$ , c'est-à-dire:  $[[C_{ijmn}]] = C_{ijmn}|_{H_2} - C_{ijmn}|_{H_1}$ .

Posons:  $f_i^{mn} = \frac{\partial C_{ijmn}}{\partial y_j}$  et  $F_i^{mn} = [[C_{ijmn}]] \cdot \eta_j^1$  pour  $i = 1, 2$  et  $(m, n) = (1, 1); (2, 2); (3, 3); (1, 2)$ . Ces quantités peuvent être identifiées respectivement à des forces surfaciques et linéiques. L'expression du second membre de (37) prend alors la forme suivante:

$$L^{mn}(v) = \int_{\Gamma} F_i^{mn} \cdot v_i ds + \int_H f_i^{mn} \cdot v_i dy$$

**Seconds membres des problèmes (38) ((m, n) = (1, 3); (2, 3))**

Notons  $L^{m3}$  le second membre du problème (38)

$$\begin{aligned} L^{m3}(w, z) &= - \int_H (C_{3jm3} \frac{\partial w}{\partial y_j} + g_{jm3} \frac{\partial z}{\partial y_j}) dy \\ &= - \int_{H_1} (C_{3jm3} \frac{\partial w}{\partial y_j} + g_{jm3} \frac{\partial z}{\partial y_j}) dy - \int_{H_2} (C_{3jm3} \frac{\partial w}{\partial y_j} + g_{jm3} \frac{\partial z}{\partial y_j}) dy \end{aligned} \quad (41)$$

or

$$\begin{aligned} - \int_{H_1} (C_{3jm3} \frac{\partial w}{\partial y_j} + g_{jm3} \frac{\partial z}{\partial y_j}) dy &= \int_{H_1} (\frac{\partial}{\partial y_j} C_{3jm3}) w dy - \int_{\partial H_1} C_{3jm3} w \eta_j^1 ds \\ &\quad + \int_{H_1} (\frac{\partial}{\partial y_j} g_{jm3}) z dy - \int_{\partial H_1} g_{jm3} \eta_j^1 z ds \end{aligned}$$

d'où



$$\begin{aligned}
-\int_{H_1} (C_{3jm3} \frac{\partial w}{\partial y_j} + g_{jm3}) \frac{\partial z}{\partial y_j} dy &= -\int_{\Gamma} C_{3jm3} w \eta_j^1 ds - \int_{\Gamma} g_{jm3} \eta_j^1 z ds \\
&+ \int_{H_1} (\frac{\partial}{\partial y_j} C_{3jm3}) w dy + \int_{H_1} (\frac{\partial}{\partial y_j} g_{jm3}) z dy
\end{aligned} \quad (42)$$

de même on a

$$\begin{aligned}
-\int_{H_2} (C_{3jm3} \frac{\partial w}{\partial y_j} + g_{jm3}) \frac{\partial z}{\partial y_j} dy &= \int_{H_2} (\frac{\partial}{\partial y_j} C_{3jm3}) w dy - \int_{\partial H_2} C_{3jm3} w \eta_j^2 ds \\
+ \int_{H_2} (\frac{\partial}{\partial y_j} g_{jm3}) z dy - \int_{\partial H_2} g_{jm3} \eta_j^2 z ds &= -\int_{\Gamma} C_{3jm3} w \eta_j^2 ds - \int_{\Gamma} g_{jm3} \eta_j^2 z ds
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
-\int_{H_2} (C_{3jm3} \frac{\partial w}{\partial y_j} + g_{jm3}) \frac{\partial z}{\partial y_j} dy &= -\int_{\Gamma} C_{3jm3} w \eta_j^2 ds - \int_{\Gamma} g_{jm3} \eta_j^2 z ds \\
&+ \int_{H_2} (\frac{\partial}{\partial y_j} C_{3jm3}) w dy + \int_{H_2} (\frac{\partial}{\partial y_j} g_{jm3}) z dy
\end{aligned} \quad (43)$$

en utilisant (42), (43) et (41), on obtient

$$\begin{aligned}
L^{m3}(w, z) &= \int_{\Gamma} [[C_{3jm3}]] w \eta_j^1 ds + \int_{\Gamma} [[g_{jm3}]] \eta_j^1 z ds + \int_H (\frac{\partial}{\partial y_j} C_{3jm3}) w dy \\
&+ \int_H (\frac{\partial}{\partial y_j} g_{jm3}) z dy
\end{aligned} \quad (44)$$

où  $\eta^1 = (\eta_1^1, \eta_2^1)$  est la normale extérieure à  $\Gamma$  et  $[[\circ]]$  est le saut de la fonction à l'interface  $\Gamma$ , c'est-à-dire:  $[[\circ]] = \circ|_{H_2} - \circ|_{H_1}$ .

Comme pour le second membre du problème (37), on peut identifier ci-dessus les forces surfaciques et linéiques par les expressions suivantes:  $f^{m3} = \frac{\partial C_{3jm3}}{\partial y_j}$ ;  $h^{m3} = \frac{\partial g_{jm3}}{\partial y_j}$ ;  $F^{m3} = [[C_{3jm3}]] \cdot \eta_j^1$ ;  $H^{m3} = [[g_{jm3}]] \cdot \eta_j^1$ , pour  $m = 1, 2$ . Le second membre devient alors:

$$L^{m3}(w, z) = \int_{\Gamma} F^{m3} \cdot w ds + \int_{\Gamma} H^{m3} \cdot z ds + \int_H f^{m3} \cdot w dy + \int_H h^{m3} \cdot z dy$$

### Seconds membres des problèmes (39) ( $m = 1, 2$ )

On note par  $L^m(w, z)$  le second membre du (39)

$$\begin{aligned}
L^m(w, z) &= -\int_H (g_{m3j} \frac{\partial w}{\partial y_j} + \epsilon_{jm} \frac{\partial z}{\partial y_j}) dy \\
&= -\int_{H_1} (g_{m3j} \frac{\partial w}{\partial y_j} + \epsilon_{jm} \frac{\partial z}{\partial y_j}) dy - \int_{H_2} (g_{m3j} \frac{\partial w}{\partial y_j} + \epsilon_{jm} \frac{\partial z}{\partial y_j}) dy
\end{aligned} \quad (45)$$

En utilisant les memes outils qu'avant on obtient pour  $m = 1, 2$  l'expression du second membre en fonction des forces surfaciques et linéiques

$$L^m(w, z) = \int_{\Gamma} F^m \cdot w ds + \int_{\Gamma} H^m \cdot z ds + \int_H f^m \cdot w dy + \int_H h^m \cdot z dy$$

avec  $f^m = \frac{\partial g_{m3j}}{\partial y_j}$ ;  $h^m = \frac{\partial \epsilon_{jm}}{\partial y_j}$ ;  $F^m = [[g_{m3j}]] \cdot \eta_j^1$ ;  $H^m = [[\epsilon_{jm}]] \cdot \eta_j^1$

**Secondes membres des problèmes (40) ( $m = 3$ )**

Notons  $L^3$  le second membre du problème (40)

$$L^3(v) = - \int_H g_{3ij} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy = - \int_{H_1} g_{3ij} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy - \int_{H_2} g_{3ij} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy$$

pour  $i = 1, 2$  et  $m = 3$ , on a l'expression du second membre sous la forme

$$L^3(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma} F_i^3 \cdot v_i ds + \int_H f_i^3 \cdot v_i dy$$

en tenant compte des forces surfaciques et lineiques:  $f_i^3 = \frac{\partial g_{3ij}}{\partial y_j}$  et  $F_i^3 = [[g_{3ij}]] \cdot \eta_j^1$

**Résumé**

On résume ci-dessous le calcul des fonctions d'influence pour un composite monoclinique, ce qui permet ensuite le calcul des coefficients homogénéisés de la structure.

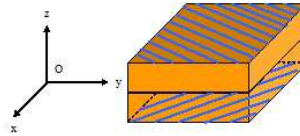
Cas	Pb. à résoudre	Comp. nulles	Comp. à déterminer
$(m, n) = (1, 1); (2, 2); (3, 3); (1, 2)$	(32)	$\chi_3^{mn}, \psi^{mn}$	$\chi_1^{mn}, \chi_2^{mn}$
$(m, n) = (1, 3); (2, 3)$	(33)	$\chi_1^{mn}, \chi_2^{mn}$	$\chi_3^{mn}, \psi^{mn}$
$m = 1, 2$	(35)	$\phi_1^m, \phi_2^m$	$\phi_3^m, R^m$
$m = 3$	(36)	$\phi_3^m, R^m$	$\phi_1^m, \phi_2^m$

(46)

**Caractéristiques homogénéisées**

Ayant résolu les problèmes cellulaires, les coefficients homogénéisés sont donnés par les expressions (26) et (28). En tenant compte des hypothèses  $H_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) et de la forme des fonctions d'influence, on vérifie facilement que les caractéristiques du problème homogénéisé ont des profils particuliers, à savoir les memes formes monocliniques que les tenseurs de départ; ils peuvent être donnés par des relations explicites ([14]).

**3.3. Application à une structure empilée piézoélectrique.** On peut appliquer les calculs développés dans le paragraphe antérieur pour un empilement piézoélectrique des couches homogènes. La cellule de base étant la plus petite partie de la structure permettant de recouvrir le domaine tout entier, on choisit la cellule représentée sur la figure ci-dessous:



$$Y = [0, Y_1] \times [0, Y_2] \times [0, Y_3]$$

On suppose que les différentes couches de l'empilement sont homogènes. Dans la cellule de base  $Y$  les composantes du tenseur d'élasticité (piézoélastique et diélectrique) ne dépendent donc que de la variable  $y_3$ , c'est-à-dire:

$$C_{ijkl}(y) = C_{ijkl}(y_3); g_{ijk}(y) = g_{ijk}(y_3); \epsilon_{ij}(y) = \epsilon_{ij}(y_3)$$

On suppose que chaque couche est homogène et que les tenseurs respectifs sont monocliniques.

En tenant compte des hypothèses ci-dessus, les fonctions  $\chi^{ij}$ ,  $\Psi^{ij}$ ,  $\Phi^i$  et  $R^i$  sont  $Y_1$ -périodiques et  $Y_2$ -périodiques par rapport aux variables  $y_1$  et  $y_2$  où  $Y_1$  et  $Y_2$  sont quelconques, par conséquent ces fonctions sont indépendantes de  $y_1$  et  $y_2$  i.e  $\chi^{ij}(y) = \chi^{ij}(y_3)$ ,  $\Psi^{ij}(y) = \Psi^{ij}(y_3)$ ,  $\Phi^i(y) = \Phi^i(y_3)$  et  $R^i(y) = R^i(y_3)$ . Ces fonctions sont solutions de problèmes cellulaires (20)-(23) qui prennent les formes suivantes

$$\begin{cases} \frac{d}{dy_3} [C_{i3k3} \frac{d\chi_k^{mn}}{dy_3} + g_{3i3} \frac{d\Psi^{mn}}{dy_3}] = -\frac{d}{dy_3} C_{i3mn} \\ \frac{d}{dy_3} [g_{3k3} \frac{d\chi_k^{mn}}{dy_3} - \epsilon_{33} \frac{d\Psi^{mn}}{dy_3}] = -\frac{d}{dy_3} g_{3mn} \end{cases} \quad (47)$$

et

$$\begin{cases} \frac{d}{dy_3} [g_{3i3} \frac{dR^m}{dy_3} + C_{i3k3} \frac{d\Phi_k^m}{dy_3}] = -\frac{d}{dy_3} g_{mi3} \\ \frac{d}{dy_3} [\epsilon_{33} \frac{dR^m}{dy_3} - g_{3k3} \frac{d\Phi_k^m}{dy_3}] = -\frac{d}{dy_3} \epsilon_{3m} \end{cases} \quad (48)$$

Alors, pour la détermination des fonctions  $\chi^{mn}$  et  $\Psi^{mn}$  on va distinguer plusieurs cas:

1) Le cas où  $(m, n) = (1, 3), (2, 3)$  et on peut démontrer facilement que les fonctions  $\chi_3^{\alpha 3}$  et  $\Psi^{\alpha 3}$  sont des constantes que l'on peut choisir nulles :  $\chi_3^{\alpha 3} = 0$  et  $\Psi^{\alpha 3} = 0$ ,  $\alpha = 1, 2$  et donc formes des fonctions  $\chi^{\alpha 3}$  et  $\Psi^{\alpha 3}$  sont telles que  $\chi^{\alpha 3}(y_3) = (\chi_1^{\alpha 3}(y_3), \chi_2^{\alpha 3}(y_3), 0)$  et  $\Psi^{\alpha 3}(y_3) = 0$ . Les composantes  $\chi_1^{\alpha 3}(y_3)$  et  $\chi_2^{\alpha 3}(y_3)$  seront solutions des problèmes

$$\begin{cases} \frac{d}{dy_3} [C_{i3k3} \frac{d\chi_k^{\alpha 3}}{dy_3}] = -\frac{d}{dy_3} C_{i3\alpha 3} \\ \chi_k^{\alpha 3} \text{ } Y_3\text{-périodique} \end{cases} \quad i, k, \alpha = 1, 2$$

qui revient à résoudre dans le cas général le système suivant

$$\begin{cases} \frac{d}{dy_3} [C_{1313} \frac{d\chi_1^{\alpha 3}}{dy_3} + C_{1323} \frac{d\chi_2^{\alpha 3}}{dy_3}] = -\frac{d}{dy_3} C_{13\alpha 3} \\ \frac{d}{dy_3} [C_{2313} \frac{d\chi_1^{\alpha 3}}{dy_3} + C_{2323} \frac{d\chi_2^{\alpha 3}}{dy_3}] = -\frac{d}{dy_3} C_{23\alpha 3} \end{cases}, \quad \alpha = 1, 2$$

obtenant après intégration

$$\begin{cases} C_{1313} \frac{d\chi_1^{\alpha 3}}{dy_3} + C_{1323} \frac{d\chi_2^{\alpha 3}}{dy_3} = -C_{13\alpha 3} + C_1^{te} \\ C_{2313} \frac{d\chi_1^{\alpha 3}}{dy_3} + C_{2323} \frac{d\chi_2^{\alpha 3}}{dy_3} = -C_{23\alpha 3} + C_2^{te} \end{cases}$$

d'où

$$\frac{d\chi_1^{\alpha 3}}{dy_3} = \frac{C_{1323} \cdot C_{23\alpha 3} - C_{2323} \cdot C_{13\alpha 3} + C_1^{te} \cdot C_{2323} - C_2^{te} \cdot C_{1323}}{C_{1313} \cdot C_{2323} - C_{1323}^2} \quad (49)$$

et

$$\frac{d\chi_2^{\alpha 3}}{dy_3} = \frac{-C_{1313} \cdot C_{23\alpha 3} + C_{2313} \cdot C_{13\alpha 3} - C_1^{te} \cdot C_{2313} + C_2^{te} \cdot C_{1313}}{C_{1313} \cdot C_{2323} - C_{1323}^2} \quad (50)$$

les constantes  $C_1^{te}$  et  $C_2^{te}$  étant déterminées par la condition de périodicité des fonctions  $\chi_1^{\alpha 3}$  et  $\chi_2^{\alpha 3}$ :  $\left\langle \frac{d\chi_1^{\alpha 3}}{dy_3} \right\rangle = \left\langle \frac{d\chi_2^{\alpha 3}}{dy_3} \right\rangle = 0$

2) Le cas où  $(m, n) = (1, 1); (2, 2); (3, 3); (1, 2)$  : dans ce cas on démontre que les composants  $\chi_1^{mn} = 0$  et  $\chi_2^{mn} = 0$  et les  $\chi_3^{mn}$  et  $\Psi^{mn}$  vérifient

$$\begin{cases} \frac{d}{dy_3} [C_{3333} \frac{d\chi_3^{mn}}{dy_3} + g_{333} \frac{d\Psi^{mn}}{dy_3}] = -\frac{d}{dy_3} C_{33mn} \\ \frac{d}{dy_3} [g_{333} \frac{d\chi_3^{mn}}{dy_3} - \epsilon_{33} \frac{d\Psi^{mn}}{dy_3}] = -\frac{d}{dy_3} g_{3mn} \end{cases}$$

Après intégration, le système devient

$$\begin{cases} C_{3333} \frac{d\chi_3^{mn}}{dy_3} + g_{333} \frac{d\Psi^{mn}}{dy_3} = -C_{33mn} + C_1^{te} \\ g_{333} \frac{d\chi_3^{mn}}{dy_3} - \epsilon_{33} \frac{d\Psi^{mn}}{dy_3} = -g_{3mn} + C_2^{te} \end{cases}$$

et il admet la solution suivante

$$\begin{aligned} \frac{d\chi_3^{mn}}{dy_3} &= \frac{(-C_{33mn} + C_1) \epsilon_{33} + g_{333}(-g_{3mn} + C_2^{te})}{C_{3333}\epsilon_{33} + g_{333}^2} \\ \frac{d\Psi^{mn}}{dy_3} &= -\frac{C_{3333}(g_{3mn} + C_2) - g_{333}(C_{33mn} + C_1^{te})}{C_{3333}\epsilon_{33} + g_{333}^2} \end{aligned} \quad (51)$$

avec  $C_1^{te}$  et  $C_2^{te}$  vérifiant

$$\begin{cases} C_1^{te} < \epsilon_{33} > + C_2^{te} < g_{333} > = < C_{33mn}\epsilon_{33} + g_{333}g_{3mn} > \\ C_1^{te} < g_{333} > - C_2^{te} < C_{3333} > = < -C_{3333}g_{3mn} + g_{333}C_{33mn} > \end{cases}$$

ce qui représente la condition de périodicité des fonctions  $\chi_3^{mn}$  et  $\Psi^{mn}$  :

$$\left\langle \frac{d\chi_3^{mn}}{dy_3} \right\rangle = \left\langle \frac{d\Psi^{mn}}{dy_3} \right\rangle = 0$$

En ce qui concerne la détermination des fonctions  $\Phi^m$  et  $R^m$ , on aura deux cas aussi:

1) Cas où  $m = 1, 2$  et on peut démontrer que les fonctions  $\Phi_3^m$  et  $R^m$  sont constantes et donc on peut les choisir nulles.

Les fonctions  $\Phi_1^m$  et  $\Phi_2^m$  seront solutions du système:

$$\begin{cases} C_{1313} \frac{d\Phi_1^m}{dy_3} + C_{1323} \frac{d\Phi_2^m}{dy_3} = -g_{m13} + C_1^{te} \\ C_{2313} \frac{d\Phi_1^m}{dy_3} + C_{2323} \frac{d\Phi_2^m}{dy_3} = -g_{m23} + C_2^{te} \end{cases}$$

Après un calcul analytique on obtiendra:

$$\frac{d\Phi_1^m}{dy_3} = \frac{C_{1323} \cdot g_{m23} - C_{2323} \cdot g_{m13} + C_1^{te} \cdot C_{2323} - C_2^{te} \cdot C_{1323}}{C_{1313} \cdot C_{2323} - C_{1323}^2} \quad (52)$$

et

$$\frac{d\Phi_2^m}{dy_3} = \frac{C_{2313} \cdot g_{m13} - C_{1313} \cdot g_{m23} - C_1^{te} \cdot C_{2313} + C_2^{te} \cdot C_{1313}}{C_{1313} \cdot C_{2323} - C_{1323}^2} \quad (53)$$

avec  $C_1^{te}$  et  $C_2^{te}$  vérifiant  $\left\langle \frac{d\Phi_1^m}{dy_3} \right\rangle = \left\langle \frac{d\Phi_2^m}{dy_3} \right\rangle = 0$  (condition de périodicité)

2) Cas où  $m = 3$  : la positivité de la matrice d'élasticité entraînera que  $\Phi_1^3 = 0$  et  $\Phi_2^3 = 0$  et les  $\Phi_3^3$  et  $R^3$  vérifient

$$\begin{cases} \frac{d}{dy_3} [g_{333} \frac{dR^3}{dy_3} + C_{3333} \frac{d\Phi_3^3}{dy_3}] = -\frac{d}{dy_3} g_{333} \\ \frac{d}{dy_3} [\epsilon_{33} \frac{dR^3}{dy_3} - g_{333} \frac{d\Phi_3^3}{dy_3}] = -\frac{d}{dy_3} \epsilon_{33} \end{cases}$$

Après avoir intégré on obtient

$$\begin{cases} g_{333} \frac{dR^3}{dy_3} + C_{3333} \frac{d\Phi_3^3}{dy_3} = -g_{333} + C_1 \\ \epsilon_{33} \frac{dR^3}{dy_3} - g_{333} \frac{d\Phi_3^3}{dy_3} = -\epsilon_{33} + C_2 \end{cases}$$

la solution du système ci-dessus étant donnée par

$$\begin{aligned} \frac{dR^3}{dy_3} &= \frac{(-g_{333} + C_1)g_{333} + C_{3333}(-\epsilon_{33} + C_2)}{g_{333}^2 + C_{3333}\epsilon_{33}} \\ \frac{d\Phi_3^3}{dy_3} &= \frac{g_{333}(-\epsilon_{33} + C_2) - \epsilon_{33}(-g_{333} + C_1)}{g_{333}^2 + C_{3333}\epsilon_{33}} \end{aligned} \quad (54)$$

avec  $C_1$  et  $C_2$  solutions de

$$\begin{cases} C_1 < g_{333} > + C_2 < C_{3333} > = < g_{333}^2 + C_{3333}\epsilon_{33} > \\ C_1 < \epsilon_{33} > = C_2 < g_{333} > \end{cases}$$

### Calcul des coefficients homogénéisés de la structure empilée

Les coefficients homogénéisés de la structure empilée s'obtiennent en particulier les formules du cas général (26) et (28):

$$C_{ijkl}^h = \frac{1}{Y_3} \int_0^{Y_3} [C_{ijkl} + C_{ijm3} \frac{d\chi_m^{kl}}{dy_3} + g_{3ij} \frac{d\Psi^{kl}}{dy_3}] dy_3 \quad (55)$$

$$g_{kij}^h = \frac{1}{Y_3} \int_0^{Y_3} [g_{kij} + C_{ijm3} \frac{d\Phi_m^k}{dy_3} + g_{3ij} \frac{dR^k}{dy_3}] dy_3 \quad (56)$$

$$\epsilon_{jm}^h = \frac{1}{Y_3} \int_0^{Y_3} [-g_{j3l} \frac{d\Phi_l^m}{dy_3} + \epsilon_{j3} \frac{dR^m}{dy_3} + \epsilon_{jm}] dy_3 \quad (57)$$

### Résumé

On résume ci-dessous le calcul des fonctions d'influence pour une structure empilée, qui permet ensuite le calcul des coefficients homogénéisés de la structure:

Cas	Pb. à résoudre	Comp. à déterminer	Comp. nulles
$(m, n) = (1, 1); (2, 2); (3, 3); (1, 2)$	(51)	$\chi_3^{mn}, \psi^{mn}$	$\chi_1^{mn}, \chi_2^{mn}$
$(m, n) = (1, 3); (2, 3)$	(49) et (50)	$\chi_1^{mn}, \chi_2^{mn}$	$\chi_3^{mn}, \psi^{mn}$
$m = 1, 2$	(52) et (53)	$\phi_1^m, \phi_2^m$	$\phi_3^m, R^m$
$m = 3$	(54)	$\phi_3^m, R^m$	$\phi_1^m, \phi_2^m$

(58)

#### 4. Application à l'os cortical humain; résultats numériques

Afin d'illustrer l'approche multi-échelle discutée dans ce papier, nous présentons quelques résultats numériques sur la structure corticale humaine, qui est déjà connue comme un composite piézoélectrique naturel. Pour réduire la complexité du calcul, comme dans le cas des problèmes 3D une performance informatique élevée est nécessaire, dans les exemples numériques donnés ci-dessous nous considérons simplement des problèmes 2D couplés avec un empilement dans la direction de l'axe Oz, ce qui, cependant, fournissent une démonstration suffisante de ce modèle.

Si la piézoélectricité dans le cortical a été prévue depuis les années 1991 by ([19]), elle n'avait jamais été vraiment exploitée auparavant. On présente ici très brièvement quelques résultats obtenus pour les propriétés macroscopiques du cortical en appliquant le modèle piézo décrit dans les paragraphes antérieurs. On se contente de présenter que les valeurs numériques au niveau macroscopique et seulement pour les propriétés élastiques car il y a très peu (voire pas du tout) d'information dans la littérature expérimentale concernant les propriétés du cortical aux niveaux micro et nanoscopique; aussi, les valeurs trouvées expérimentalement ne donnent aucune information sur l'architecture de l'échantillon testé. Tous les résultats numériques ont été obtenus en utilisant un logiciel créé en Matlab ([15]) et qui pourrait servir aussi à déterminer les propriétés piézo(élastiques) pour des autres composites à composantes piézo(élastiques).

L'aspect multi-échelle du cortical a été modélisé par 18 paramètres structuraux dans le cadre d'une application spécifique de la théorie mathématique de l'homogénéisation et 10 autres paramètres physiques sont nécessaires pour l'aspect multi-physique de ce milieu. Le formalisme mathématique est basé sur la théorie mathématique de l'homogénéisation telle que l'on a vu dans les sections antérieures, et sur la méthode des éléments finis pour la résolution des problèmes cellulaires.

Les données utilisées par le modèle créé déterminent, dans un premier temps, la composition architecturale à chaque niveau et dans un deuxième temps, la méthode d'homogénéisation est appliquée plusieurs fois afin de déterminer les propriétés physiques à chaque niveau architectural de l'os cortical. Les entrées seront seulement les propriétés mécaniques des composants de base (dans le cas du cortical collagène et cristaux d'Hap) et une architecture. Les sorties seront les propriétés physiques à chaque niveau de l'architecture.

En accord avec la description architecturale du cortical, cinq niveaux ont été considérés, à savoir les EVMC (Elementary Volume of Mineral Content - nanoscopique) ([7]), fibre de collagène, lamelle, ostéon et système haversien (niveau macroscopique). Toutes les périodes 3D étant régulières dans une direction, on utilise des périodes 2-D (figure ci-dessous) dans la direction transversale couplées avec un empilement dans la direction longitudinale: ceci nous permet de tenir compte de divers aspects architecturaux comme par exemple l'épaisseur de la ligne cimentante.

Beaucoup de résultats peuvent être obtenus avec un tel modèle mais il est assez difficile de les comparer aux mesures expérimentales que l'on trouve dans la littérature. C'est pour cela que les résultats présentés dans cette section ne concernent que les propriétés élastiques d'un volume élémentaire d'os cortical à l'échelle macroscopique. Par ailleurs, on suppose que toutes les fibres de collagène d'un volume élémentaire ont toujours la même orientation dans la lamelle courante et dans le système interstitiel (formé des anciens ostéons ou ostéons surminéralisés).

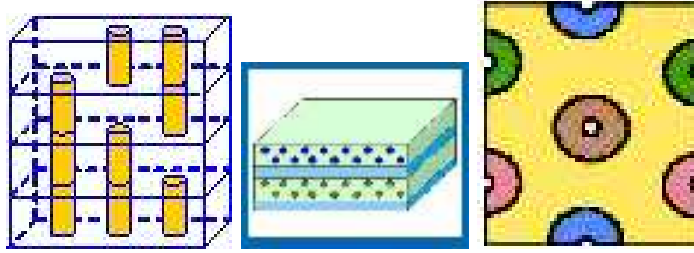


FIGURE 1. Niveau lamellaire/ niveau ostéonal niveau macroscopique/ Diverses cellules de base

On considère une "configuration de référence" (CR) auxquels paramètres architecturaux sont donnés dans ([13]) et on étudie les propriétés élastiques du cortical dans le cas de trois orientations des fibres de collagène qui sont successivement  $(45^\circ/-45^\circ)$ ,  $(0^\circ/0^\circ)$  et  $(0^\circ/90^\circ)$  selon Ascenzi ([1], [2], [3]). Dans la première configuration  $(45^\circ/-45^\circ)$ , il y a une alternance de l'orientation des fibres entre deux lamelles consécutives : dans la première lamelle, les fibres sont enroulées hélicoidalement d'une manière parallèle avec un angle entre la tangente des fibres et la direction longitudinale (axe Oz) de  $45^\circ$ ; dans la seconde lamelle, les fibres sont enroulées hélicoidalement, toujours d'une manière parallèle, mais avec un angle entre la tangente des fibres et la direction longitudinale (axe Oz) de  $-45^\circ$ . Dans la deuxième configuration  $(0^\circ/0^\circ)$ , toutes les fibres sont rectilignes et orientées longitudinalement (selon l'axe Oz). Dans la dernière configuration  $(0^\circ/90^\circ)$ , il y a, encore, une alternance d'orientation entre deux lamelles consécutives: dans la première lamelle, les fibres sont rectilignes et orientées longitudinalement et dans la seconde les fibres sont enroulés d'une manière circulaire. Il est nécessaire d'ajouter à ces valeurs, les valeurs des propriétés physiques. Elles sont données dans le tableau ci-dessous:

Propriétés physiques des composantes	Valeur	Unités	Référence
Module d'Young de l'Hap	117	GPa	[8]
Coefficient de Poisson de l'Hap	0.27		[11]
Module d'Young du collagène	1.2	GPa	[16]
Coefficient de Poisson du collagène	0.35		[16]
Densité de l'Hap	3153	$g/cm^3$	[16]
Densité du collagène	1200	$g/cm^3$	[16]

Propriétés physiques des composantes

Pour la "configuration de référence" les propriétés élastiques obtenues sont présentées dans le Tableau 4.1: le Tableau 4.1.1 concerne une architecture où les fibres de collagène ont une orientation alternative de  $45^\circ$  et  $-45^\circ$  dans deux lamelles consécutives, le Tableau 4.1.2 concerne une architecture où toutes les fibres de collagène sont orientées verticalement tandis que le Tableau 4.1.3 concerne une architecture où les fibres de collagène ont une orientation alternative de  $0^\circ$  et  $90^\circ$  dans deux lamelles consécutives.

15.87	5.18	7.58	0	0	0
5.18	15.87	7.58	0	0	0
7.58	7.58	23.75	0	0	0
0	0	0	7.31	0	0
0	0	0	0	7.31	0
0	0	0	0	0	5.55

Tenseur élastique (GPa) – CR  
architecture 45°/-45°Tableau 4.1.1. Propriétés élastiques (GPa) pour la CR:  
orientation des fibres de collagène 45°/-45°

12.88	0.21	0.36
0.21	12.88	0.36
0.36	0.36	18.29

Tenseur de Compliance

13.56	2.66	8.08	0	0	0
2.66	13.56	8.08	0	0	0
8.08	8.08	30.18	0	0	0
0	0	0	6.09	0	0
0	0	0	0	6.09	0
0	0	0	0	0	5.41

Tenseur élastique (GPa) – CR  
architecture 0°/0°Tableau 4.1.2. Propriétés élastiques (GPa) pour la CR:  
fibres de collagène orientées verticalement

11.38	0.04	0.5
0.04	11.38	0.5
0.5	0.5	22.13

Tenseur de Compliance

16.52	5.43	6.59	0	0	0
5.43	16.52	6.59	0	0	0
6.59	6.59	26.17	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Tenseur élastique (GPa) – CR  
architecture 0°/90°Tableau 4.1.3. Propriétés élastiques (GPa) pour la CR:  
orientation des fibres de collagène 0°/90°

13.91	0.25	0.30
0.25	13.91	0.30
0.30	0.30	22.22

Tenseur de Compliance

Tableau 4.1. Propriétés élastiques(GPa) pour la Configuration de Référence

Le premier résultat à noter est l'influence importante de l'orientation des fibres de collagène sur les propriétés élastiques de l'os cortical au niveau macroscopique. Ce point est facilement explicable par le fait que l'apposition des cristaux d'Hap se fait en priorité autour des fibres de collagène ([10]). Cet arrangement de l'espace induit ainsi une direction privilégiée pour la rigidité du milieu dans une direction ou dans l'autre et ainsi différents résultats peuvent être obtenus.

Le rapport entre les composants longitudinal et transverse est souvent considéré comme une caractéristique importante et, avec les valeurs précédentes, nous obtenons les deux rapports suivants:

-  $C_{33}/C_{11}$  est le rapport entre la composante élastique longitudinale ( $C_{33} = C_{zz}$ ) et la composante élastique transverse ( $C_{11} = C_{xx}$ )

-  $E_3/E_1$  est le rapport entre le module d'Young longitudinal ( $E_3 = E_z$ ) et le module d'Young transverse ( $E_1 = E_x$ )



Orientation des fibres de collagène - CR	$C_{33} / C_{11}$	$E_3 / E_1$
Orientation des fibres de collagène 45°/-45°	1.50	1.42
Toutes les fibres sont orientées verticalement	2.22	1.94
Orientation des fibres de collagène 0°/90°	1.58	1.60

Tableau 4.2. Rapport des propriétés longitudinales et transverses pour la Configuration de Référence

## 5. Conclusions

Une méthode numérique d'homogénéisation pour prévoir les propriétés homogénéisées des composites piézoélectriques a été présentée. Des hypothèses faites sur la cellule de base ramènent cette opération à un problème bidimensionnel. Le développement des calculs repose sur la méthode des éléments finis. Celle-ci permet d'obtenir les fonctions d'influence qui sont à la base des relations déterminant les caractéristiques homogénéisées. Ce modèle pouvant être appliqué à n'importe quel composite, nous avons utilisé ces développements à chacun des niveaux de l'architecture du cortical pour illustrer quelques résultats numériques.

Le modèle que l'on a développé tient compte de la structure architecturale du composite et la simulation numérique est basée sur une technique d'homogénéisation (par développements asymptotiques) reposant sur des résultats mathématiques. L'utilisation de ce modèle permet, d'une part, l'étude des variations des propriétés homogénéisées du matériau composite en fonction de différents paramètres mécaniques et géométriques des constituants, et d'autre part (d'une manière "indirecte" dans le cadre de l'homogénéisation), l'étude du champ de contraintes au niveau des hétérogénéités ce qui pourrait être utile pour la compréhension du comportement mécanique à l'intérieur du composite (endommagement, déplacements, ..).

Le code de calcul a été réalisé en Matlab et les maillages utilisés pour les cellules de base ont été élaborés en utilisant les maillages du code Modulef ([6]). Il s'avère être un outil d'investigation assez performant. Les simulations faites dans certaines configurations de l'os cortical sont tout à fait cohérentes et correspondent aux données qui existent dans la littérature ([16]).

## References

- [1] A. Ascenzi et E. Bonucci, The compressive properties of single osteons, *Anatomical Record* **161** (1968), 377–391.
- [2] A. Ascenzi et A. Benvenuti, The shearing properties of single osteons, *Anat. Rec.* **172** (1971), 499–510.
- [3] A. Ascenzi et A. Benvenuti, Orientation of collagen fibers at the boundary between two successive osteonic lamellae and its mechanical interpretation, *Journal of Biomechanics* **19** (1986), 349–361.
- [4] N.S. Bakhvalov, *Averaged characteristics of bodies with periodic structure*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 218, English translation in Soviet Physics Dokl. **19** (1974), 1046–1048.
- [5] A. Bensoussan, J.L. Lions et G.C. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, North Holland, Amsterdam, 1978.
- [6] M. Bernadou et al., *MODULEF: Une bibliothèque modulaire d'éléments finis*, INRIA, 1988.
- [7] J.M. Crolet, M. Racila, R. Mahraoui et A. Meunier, New numerical concept for hydroxyapatite in human cortical bone, *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, Taylor & Francis Group **8** (2005), no. 2, 139–143.
- [8] J.D. Currey, The relationship between the stiffness and the mineral content of the bone, *J. Biomechanics* **2** (1969), 477–480.

- [9] G. Duvaut, *Analyse fonctionnelle et mécanique des milieux continus Application à l'étude des matériaux composites élastiques à structure périodique-homogénéisation*, Theoretical and Applied Mechanics, W.T.Koiter, ed.Noerth-Holland Publishing Company, 1976.
- [10] C. Hellmich et F.J. Ulm, Hydroxyapatite is uniformly concentrated in the extracollagenous ultrastructure of mineralised tissues, *Proceedings of the fourth Symposium on Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, J. Middleton, N.G. Shrive, M.L. Jones Eds., 2002.
- [11] J.L. Katz, *Composite material models for cortical bone*, ASME, AMD **45**, 1981.
- [12] M. Racila et al., Composites piézoélectriques et homogénéisation asymptotique - un résultat de convergence, soumis.
- [13] M. Racila et J.M. Crolet, Human cortical bone: the SINUPROS model. Part I - Description and macroscopic results, *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering* **11** (2008), no. 2, 169–187.
- [14] M. Racila, Elaboration d'une modélisation mathématique du transfert multi échelle des signaux mécaniques dans l'os cortical humain. Aspects théoriques et simulations numériques", thèse d'Université de Franche-Comté (2005).
- [15] M. Racila et J.M. Crolet, [http://cis01.central.ucv.ro/site/simulari\\\_rp7.htm](http://cis01.central.ucv.ro/site/simulari\_rp7.htm)
- [16] J.Y. Rho et al., Mechanical properties and the hierarchical structure of bone, *Medical Engineering & Physics*, **20** (1998), 92–102.
- [17] E. Sanchez-Palencia, Non homogeneous media and vibration theory, *Notes in Physics*, Springer Verlag **127** (1980), Berlin.
- [18] E. Sanchez-Palencia et J. Sanchez-Hubert, *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation*, Masson 1992.
- [19] J.J. Telega, Piezoelectricity and homogenization. Application to biomechanics, *Continuum Models and Discrete Systems* **2** (1991), Longman, Harlow, Essex, 220–229.

(Mihaela Racila) UNIVERSITÉ DE CRAIOVA, ROUMANIE  
E-mail address: [mracila@yahoo.com](mailto:mracila@yahoo.com)

(Lamine Boubakar) DÉPARTEMENT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE, FEMTO-ST, BESANÇON, FRANCE  
E-mail address: [lamine.boubakar@univ-fcomte.fr](mailto:lamine.boubakar@univ-fcomte.fr)