C. R. Acad. Sci. Paris, t. 324, Série I, p. 169-172, 1997
Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Problèmes elliptiques avec non-linéarité discontinue et second membre L^1

Marian BOCEA et Vicenţiu RĂDULESCU

Faculté des Mathématiques,
Université de Craiova, 1100 Craiova, Roumanie.

Résumé. On définit la notion de solution (très) faible pour une classe de problèmes semi-linéaires avec une non-linéarité discontinue et second membre dans L^1. On montre l'existence d'une telle solution par une technique d'approximation avec des fonctions L^2.

Elliptic problems with discontinuous nonlinearity and L^1 data

Abstract. *We define the notion of (very) weak solution for a class of semilinear elliptic problems with discontinuous nonlinearity and L^1 data. We prove the existence of such a solution by an approximation technique with L^2 datas.*

Cette Note est une continuation de [7] pour une certaine classe de problèmes semi-linéaires, étudiée dans le cas variationnel dans [1]-[3].

On considère le problème

$$(1)\qquad \begin{cases} -\Delta u - f(u) = p, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbf{R}^N$ et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ satisfait les conditions suivantes :

(2) il existe un ensemble $A \subset \mathbf{R}$ avec aucun point fini d'accumulation et tel que f soit continue sur $\mathbf{R}\backslash A$;

(3) il existe $m > 0$ tel que l'application $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(t) = mt + f(t)$ soit croissante.

On déduit de ces conditions que A est fini ou dénombrable et, de plus, que $f(a-) \leq f(a) \leq f(a+)$, pour tout $a \in A$. Il résulte aussi de (3) qu'il existe C_1, $C_2 \in \mathbf{R}$ tels que, pour chaque $t \in \mathbf{R}$,

$$(4)\qquad |f(t)| \leq C_1|t| + C_2.$$

Note présentée par Jacques-Louis Lions.

Pour simplifier les notations on suppose (comme il est déjà fait dans [1], [3]) que A se réduit à un seul point : $A = \{a\}$. Soit $T_a = [f(a-), f(a+)]$. Il résulte de (2) et (3) que l'application

$$g(t) = \begin{cases} a, & \text{si } \ t - ma \in T_a \\ s, & \text{avec } h(s) = t, \text{ si } t - ma \notin T_a \end{cases}$$

est continue. Soit $G(t) = \int_0^t g(s)ds$. On désigne par $K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ l'opérateur autoadjoint défini par $v = K\xi \Leftrightarrow -\Delta v + mv = \xi$, $v \in H_0^1(\Omega)$. L'effet régularisant du principe variationnel de dualité de Clarke (*voir* [5]) permet de démontrer (*voir* [1], th. 1) que « l'énergie » $J(u) = \int_\Omega \left\{ G(u) - \frac{1}{2} uKu - uKp \right\} dx$, $u \in L^2(\Omega)$, est de classe C^1 et, si u est un point critique de J, alors $v = K(u + p) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ est solution du problème (1). Illustrons maintenant cela avec quelques classes de non-linéarités qui assurent l'existence d'au moins un point critique de J, pour tout $p \in L^2(\Omega)$:

(i) $|f(t)| \leq C_1|t| + C_2$, avec $0 < C_1 < \lambda_1$ (*voir* [1], exemple 5);

(ii) $f(t) = \lambda_1 t + b(t)$, avec $b_\pm = \lim_{t\to\pm\infty} b(t) \in \mathbf{R}$ et $b_- \int_\Omega \varphi_1 < -(p, \varphi_1)_{L^2} < b_+ \int_\Omega \varphi_1$, où $\varphi_1 > 0$ est une fonction propre de $(-\Delta)$ dans $H_0^1(\Omega)$, associée à la première valeur propre λ_1 (*voir* [1], exemple 6);

(iii) $f(t) = \lambda_1 t + b(t)$, avec $b_+ = b_- = (p, \varphi_1)_{L^2} = 0$ (*voir* [3], th. 2.6 et th. 2.7).

Nous nous proposons d'étudier dans cette Note le cas où $p \in L^1(\Omega)$. À cause des discontinuités de f, la notion de solution (très) faible (*voir* [6], ch. IA,5) devient dans cette situation inopérante. Donc, il est naturel de tenir compte des *sauts* de la non-linéarité dans ses points de discontinuité : soit $\sigma_a^+ = f(a+) - f(a)$ et $\sigma_a^- = f(a) - f(a-)$.

DÉFINITION 1. – Soit $p \in L^1(\Omega)$. La fonction v est une solution du problème (1) si

$$\begin{cases} v \in \displaystyle\bigcap_{1\leq p<\frac{N}{N-1}} W_0^{1,p}(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla\varphi dx - \int_\Omega f(v)\varphi dx - \int_\Omega p\varphi dx \\ \quad \in \left[\sigma_a^+ \displaystyle\int_{\Omega_a^-} \varphi dx - \sigma_a^- \int_{\Omega_a^+} \varphi dx,\ \sigma_a^+ \int_{\Omega_a^+} \varphi dx - \sigma_a^- \int_{\Omega_a^-} \varphi dx\right] \\ \text{pour chaque } \varphi \in C^2(\bar{\Omega}), \text{ avec } \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5}$$

On a utilisé ci-dessus les notations

$$\Omega_a^+ = \{x \in \Omega : v(x) = a,\ \varphi(x) > 0\} \qquad \text{et} \qquad \Omega_a^- = \{x \in \Omega\,;\ v(x) = a,\ \varphi(x) < 0\}.$$

Nous remarquons que si f est continue, alors l'intervalle qui apparaît dans (5) se réduit à 0; on retrouve donc dans ce cas la notion classique de solution très faible.

Notre but est d'utiliser quelques idées de [7] pour montrer l'existence d'une solution du problème (1). En fait, l'aspect non linéaire de cette équation intervient essentiellement dans la démonstration de la deuxième condition de (5).

Soit (p_n) une suite de $L^2(\Omega)$ telle que $p_n \to p$ strictement dans $L^1(\Omega)$. Soit $v_n = K(u_n + p_n)$, où u_n est un point critique de la fonctionnelle $J_n(u) = \int_\Omega \left\{G(u) - \frac{1}{2} uKu - uKp_n\right\} dx$. On sait déjà (*voir* [1], th. 1) que v_n est solution du problème (1), pour p remplacé par p_n.

THÉORÈME 1. – *Sous les hypothèses* (2) *et* (3), *la suite* (v_n) *converge dans chaque espace* $W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \frac{N}{N-1}$, *vers une solution du problème* (1).

Démonstration. – On montre, comme dans le cas linéaire (*voir* la démonstration du théorème 1 de [7]), que la suite (v_n) est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, pour chaque $1 \leq p < \frac{N}{N-1}$. Donc, il existe $v \in \bigcap_{1 \leq p < \frac{N}{N-1}} W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que

$$v_n \to v \quad \text{p.p. et fortement dans } L^1(\Omega). \tag{6}$$

En appliquant le théorème IV.9 de [4], on trouve $\eta \in L^1(\Omega)$ tel que, à une suite extraite près,

$$|v_n(x)| \leq \eta(x) \quad \text{p.p. sur } \Omega. \tag{7}$$

Il résulte de (2) et (6) que $f(v_n(x)) \to f(v(x))$ p.p. sur $\Omega \backslash [v = a]$, et, par (4) et (7), $|f(v_n(x))| \leq C_1\eta(x) + C_2 \in L^1(\Omega)$ p.p. sur Ω. Donc, on peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour la suite $\Theta_n = f(v_n) \cdot \mathbf{1}_{\Omega \backslash [v=a]} \in L^1(\Omega)$. Il en résulte que $f(v_n) \to f(v)$ fortement dans $L^1(\Omega \backslash [v = a])$. Par conséquent, pour chaque $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ avec $\varphi = 0$ sur $\partial\Omega$,

$$\int_{\Omega \backslash [v=a]} f(v_n)\varphi dx \to \int_{\Omega \backslash [v=a]} f(v)\varphi dx. \tag{8}$$

Soient $y_n(x) = a + |v_n(x) - a|$ et $z_n(x) = a - |v_n(x) - a|$. Il résulte de (3) que

$$\begin{aligned} f(z_n(x)) + m(a - v_n(x)) - m|v_n(x) - a| &\leq f(v_n(x)) \\ &\leq f(y_n(x)) + m(a - v_n(x)) + m|v_n(x) - a|. \end{aligned} \tag{9}$$

Par multiplication avec φ (fixé) dans (9) et intégration sur Ω_a^+, resp. Ω_a^-, on trouve

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_a^+} f(z_n)\varphi dx + m\int_{\Omega_a^+} (a - v_n)\varphi dx - m\int_{\Omega_a^+} |v_n - a|\varphi dx \\ &\leq \int_{\Omega_a^+} f(v_n)\varphi dx \leq \int_{\Omega_a^+} f(y_n)\varphi dx + m\int_{\Omega_a^+} (a - v_n)\varphi dx + m\int_{\Omega_a^+} |v_n - a|\varphi dx \end{aligned} \tag{10}$$

et

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_a^-} f(y_n)\varphi dx + m\int_{\Omega_a^-} (a - v_n)\varphi dx + m\int_{\Omega_a^-} |v_n - a|\varphi dx \\ &\leq \int_{\Omega_a^-} f(v_n)\varphi dx \leq \int_{\Omega_a^-} f(z_n)\varphi dx + m\int_{\Omega_a^-} (a - v_n)\varphi dx - m\int_{\Omega_a^-} |v_n - a|\varphi dx. \end{aligned} \tag{11}$$

On a aussi, presque partout sur $[v = a]$, $f(z_n(x))\varphi(x) \to f(a-)\varphi(x)$, quand $n \to \infty$ et $|f(z_n(x))\varphi(x)| \leq (C_1|z_n(x)| + C_2)|\varphi(x)| \leq (2|a|C_1 + C_2 + C_1^{\eta}(x))|\varphi(x)| \in L^1(\Omega)$. Donc, on peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour les suites $f(z_n) \cdot\varphi \cdot \mathbf{1}_{\Omega_a^+}$ et $f(z_n) \cdot \varphi \cdot \mathbf{1}_{\Omega_a^-}$. Il en résulte que

$$\int_{\Omega_a^+} f(z_n)\varphi dx \to f(a-)\int_{\Omega_a^+} \varphi dx, \qquad \text{si} \quad n \to \infty \tag{12}$$

et

$$\int_{\Omega_a^-} f(z_n)\varphi dx \to f(a-)\int_{\Omega_a^-} \varphi dx, \qquad \text{si} \quad n \to \infty. \tag{13}$$

Avec le même argument,

$$\int_{\Omega_a^+} f(y_n)\varphi dx \to f(a+)\int_{\Omega_a^+} \varphi dx, \qquad \text{si} \quad n \to \infty \tag{14}$$

et

$$\int_{\Omega_a^-} f(y_n)\varphi dx \to f(a+)\int_{\Omega_a^-} \varphi dx, \qquad \text{si} \quad n \to \infty. \tag{15}$$

Par l'addition des relations (10), (11), par passage à la limite et en utilisant les convergences (12)-(15), on obtient

$$
\tag{16} f(a-)\int_{\Omega_a^+}\varphi dx + f(a+)\int_{\Omega_a^-}\varphi dx \le \limsup_{n\to\infty}\int_{[v=a]} f(v_n)\varphi dx \\ \le f(a+)\int_{\Omega_a^+}\varphi dx + f(a-)\int_{\Omega_a^-}\varphi dx.
$$

D'un autre côté, par multiplication avec φ dans (1) et par intégration,

$$
\int_\Omega \nabla v_n\cdot\nabla\varphi dx - \int_{\Omega\setminus[v=a]} f(v_n)\varphi dx - \int_\Omega p_n\varphi dx = \int_{[v=a]} f(v_n)\varphi dx,
$$

ce qui implique, par passage à la limite et par (8) que,

$$
\tag{17} \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla\varphi dx - \int_\Omega f(v)\varphi dx - \int_\Omega p\varphi dx \\ = -\int_{[v=a]} f(v_n)\varphi dx + \limsup_{n\to\infty}\int_{[v=a]} f(v_n)\varphi dx.
$$

Par (16) et (17) on conclut facilement que v vérifie la deuxième relation de la définition 1, ce qui achève notre démonstration.

Note remise le 1er octobre 1996, acceptée le 7 octobre 1996.

Références bibliographiques

[1] **Ambrosetti A. et Badiale M., 1989.** The Dual Variational Principle and Elliptic Problems with Discontinuous Nonlinearities, *J. Math. Anal. Appl.*, 140, p. 363-373.

[2] **Ambrosetti A. et Turner R. E. L., 1988.** Some Discontinuous Variational Problems, *Differential Integral Equations*, 1, p. 341-349.

[3] **Arcoya D. et Cañada A., 1990.** The Dual Variational Principle and Discontinuous Elliptic Problems with Strong Resonancce at Infinity, *Nonlinear Anal.*, TMA, 15, p. 1145-1154.

[4] **Brezis H., 1987.** *Analyse Fonctionnelle*, Masson, Paris.

[5] **Clarke F. H., 1981.** Periodic Solutions of Hamiltonian Inclusions, *J. Differential Equations*, 40, p. 1-6.

[6] **Dautray R. et Lions J.-L., 1988.** *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques*, 4, Masson, Paris.

[7] **Rădulescu V., 1996.** Sur l'équation multigroupe stationnaire de la diffusion des neutrons, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 323, série I, p. 765-768.