Ecuaţii cu derivate parţiale

Vicenţiu D. Rădulescu

Departmentul de Matematică, Universitatea din Craiova, 200585 Craiova, Romania

E-mail: radulescu@inf.ucv.ro   http://inf.ucv.ro/~radulescu

Contents

Chapter 1

Introducere

Studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale îşi are originea în secolul al XVIII-lea şi a fost inspirat de modele concrete din mecanică (elasticitate, câmp gravitaţional). Ulterior acest studiu a fost impulsionat de probleme de teoria difuziei, electrostatică, electricitate sau magnetism. Prima ecuaţie cu derivată parţială studiată a fost ecuaţia coardei vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$

unde $u = u(x,t)$ reprezintă elongaţia în punctul x şi la momentul t, iar constanta pozitivă a semnifică raportul dintre presiunea constantă exercitată asupra coardei şi densitatea ei.

Toate problemele studiate în perioada de debut a ecuaţiilor cu derivate parţiale au fost liniare. Ulterior, probleme din geometria diferenţială au dat naştere la ecuaţii cu derivate parţiale neliniare precum ecuaţia Monge-Ampère sau ecuaţia suprafeţei minimale. Studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale a fost impulsionat şi de teoria clasică a calculului variaţional, bazată pe principiul lui Euler-Lagrange, cât şi de teoria Hamilton-Jacobi.

Presupunem cunoscute în lucrare unele noţiuni fundamentale cu privire la principalii operatori diferenţiali, a căror definiţie o reamintim cu această ocazie:

(i) Operatorul **gradient** ∇ asociază unui câmp scalar $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 un câmp vectorial care se defineşte în coordonate carteziene prin

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) .$$

Câmpul vectorial ∇u este orientat în fiecare punct în direcţia celei mai mari creşteri a lui u. Dacă $\vec{A} = -\nabla u$, atunci u se numeşte **potenţialul** lui $\vec{A}$. Legătura dintre cele două noţiuni rezidă în faptul că gradientul este perpendicular pe suprafeţele având acelaşi potenţial.

(ii) **Divergenţa** $\operatorname{div} \vec{v}$ a unui câmp vectorial $\vec{v} = (v_1, \cdots, v_N) : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ este un câmp scalar definit prin

$$\operatorname{div} \vec{v} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} .$$

Pe parcursul acestei lucrări vom face apel în repetate rânduri la mai multe rezultate clasice de analiză matematică, pe care le reamintim, fără demonstraţie, în cele ce urmează:

Teorema Gauss-Green. *Fie Ω o mulţime deschisă şi mărginită din $\mathbb{R}^N$ şi $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Atunci*

$$\int_{\Omega} u_{x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u \nu^i d\sigma \qquad i = 1, \cdots, N.$$

Formula de integrare prin părţi. *Fie Ω o mulţime deschisă şi mărginită din $\mathbb{R}^N$. Dacă $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$, atunci*

$$\int_{\Omega} u_{x_i} v dx = \int_{\partial\Omega} u v \nu^i d\sigma - \int_{\Omega} u v_{x_i} dx \qquad i = 1, \cdots, N.$$

Teorema lui Gauss-Ostrogradski (teorema divergenţei). *Fie Ω o mulţime deschisă şi mărginită din $\mathbb{R}^N$. Considerăm un câmp vectorial $\vec{f} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ astfel încât $\vec{f} \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$. Atunci*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{f} dx = \int_{\partial\Omega} \vec{f} \cdot \nu d\sigma .$$

Această teoremă are o consecinţă remarcabilă, care se deduce considerând două funcţii suficient de netede $u, v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ şi aplicând teorema divergenţei câmpului vectorial $\vec{f} = \mathrm{div}\,(v\nabla u)$ împreună cu formula elementară

$$\mathrm{div}\,(v\nabla u) = v\Delta u + \nabla u \cdot \nabla v\,. \tag{1.1}$$

Obţinem astfel

Prima formulă a lui Green. *Fie $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ astfel încât $\Delta u \in C(\overline{\Omega})$. Atunci*

$$\int_\Omega v\,\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, v d\sigma - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx\,.$$

Inversând rolurile funcţiilor u şi v şi scăzând apoi relaţiile obţinute, deducem

A doua formulă lui Green. *Fie $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ astfel încât Δu, $\Delta v \in C(\overline{\Omega})$. Atunci*

$$\int_\Omega (u\,\Delta v - v\,\Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u\,\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\,\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma\,.$$

Vom aplica de mai multe ori pe parcursul lucrării

Formula coariei. *Fie $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Atunci*

(i) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B_r(x_0)} f d\sigma \right) dr$, *pentru orice* $x_0 \in \mathbb{R}^N$.

(ii) $\displaystyle\frac{d}{dr} \left(\int_{B_r(x_0)} f dx \right) = \int_{\partial B_r(x_0)} f d\sigma$, *pentru orice* $r > 0$.

Lucrarea se adresează în primul rând studenţilor anului III din secţiile de Matematică şi Matematică-Informatică şi îşi propune să prezinte principiile de bază ale teoriei liniare a ecuaţiilor cu derivate parţiale, fiind avute în vedere cele trei tipuri de probleme la limită: eliptic, parabolic şi hiperbolic. Rezultatele teoretice sunt ilustrate de numeroase exerciţii, cele mai dificile fiind prezentate cu indicaţii sau soluţii complete. Alături de rezultatele cele mai importante legate de soluţiile clasice pentru principalele tipuri de probleme la limită sunt definite şi studiate soluţiile slabe. In acest sens preluăm câteva rezultate din cursurile de analiză funcţională şi teoria spaţiilor Sobolev. Ne referim în primul rând la lema lui Lax-Milgram, teorema lui Stampacchia, precum şi la proprietăţile elementare ale spaţiilor Sobolev. Pentru o prezentare în detaliu a acestor rezultate şi pentru alte completări utile recomandăm cu căldură monografia Brezis [10].

Lucrarea presupune cunoştinţe legate de rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale de ordinul întâi şi al doilea cu coeficienţi constanţi. Ne referim în acest sens la metoda separării variabilelor a lui Fourier de găsire a soluţiei explicite pentru cele trei tipuri de probleme la limită.

Noiembrie 2004

Chapter 2

Generalităţi

2.1 Tipuri de ecuaţii cu derivate parţiale

Fie Ω un deschis arbitrar din $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. O ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul $k \geq 1$ este o expresie de tipul

$$F(D^k u(x), D^{k-1}u(x), \cdots, Du(x), u(x), x) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{2.1}$$

unde $F : \mathbb{R}^{\mathbb{N}^k} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$, iar $u : \Omega \to \mathbb{R}$ este necunoscuta. In mod generic am notat mai sus prin $D^j u(x)$ o derivată parţială de ordinul $j \geq 1$, respectiv

$$D^j u(x) = \frac{\partial^{j_1} u}{\partial x_1^{j_1}} \frac{\partial^{j_2} u}{\partial x_2^{j_2}} \cdots \frac{\partial^{j_N} u}{\partial x_N^{j_N}},$$

unde $j_1, j_2, \cdots, j_N$ sunt numere naturale astfel încât $j_1 + j_2 + \cdots + j_N = j$.

Pe tot parcursul acestei lucrări facem convenţia să notăm în două moduri derivata parţială a unei funcţii. De pildă, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ şi u_{xy} au aceeaşi semnificaţie.

In cazul ecuaţiilor diferenţiale ordinare este posibil ca în unele situaţii să se poată inversa rolul variabilei dependente cu cea independentă. Aşa stau lucrurile, de pildă, la ecuaţiile cu variabile separabile. Pentru ecuaţiile cu derivate parţiale distincţia dintre variabile dependente şi independente se păstrează întotdeauna. Acest lucru se poate argumenta euristic şi prin faptul că o funcţie de mai multe variabile conţine mult mai multă informaţie decât o funcţie de o singură variabilă.

O ecuaţie cu derivate parţiale de tipul $Lu = 0$ se numeşte **ecuaţie liniară omogenă** dacă L este un operator liniar, adică

$$L(u+v) = Lu + Lv \qquad L(\alpha u) = \alpha Lu,$$

pentru orice u, v şi pentru orice scalar α. O ecuaţie de tipul $Lu = f$, unde L este un operator liniar iar $f \not\equiv 0$ este o funcţie dată, care depinde doar de variabilele independente $x_1, \cdots, x_N$, se numeşte **ecuaţie liniară neomogenă**. Forma generală a ecuaţiei liniare neomogene de ordinul k este

$$\sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x), \qquad x \in \Omega\,,\ \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N),$$

unde $|\alpha|$ reprezintă lungimea multi-indicelui α, adică $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$.

In cazul ecuaţiilor liniare omogene este valabil **principiul superpoziţiei**: dacă u şi v sunt soluţii, atunci $u + v$ şi αu sunt, de asemenea, soluţii ale aceleiaşi ecuaţii. Un alt principiu simplu, moştenit de la ecuaţiile diferenţiale ordinare, este că soluţia generală a unei ecuaţii liniare neomogene se obţine făcând suma dintre o soluţie particulară a acestei probleme şi soluţia generală a ecuaţiei liniare omogene asociate.

Exemple de ecuaţii cu derivate parţiale liniare:

1) Ecuaţia lui Laplace: $\Delta u = 0$, unde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2}$ este operatorul lui Laplace. Această ecuaţie a fost studiată pentru prima dată de către Laplace în cercetările sale cu privire la câmpul potenţial gravitaţional în jurul anului 1780.

2) Ecuaţia lui Poisson: $\Delta u = f(x)$. Această ecuaţie a apărut pentru prima dată în 1813, cu ocazia studierii de către Poisson a unor probleme de electricitate şi magnetism. Cercetările au fost reluate în cartea lui Green din 1828 şi în lucrările lui Gauss din 1839.

3) Ecuaţia lui Helmholtz (problema de valori proprii): $-\Delta u = \lambda u$. Această ecuaţie a fost dedusă în 1860 şi a apărut ca urmare a studiului unor probleme de acustică.

4) Ecuaţia biarmonică: $\Delta^2 u = 0$, unde $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \sum_{i,j} u_{x_i x_i x_j x_j}$ reprezintă operatorul biarmonic.

5) Ecuaţia căldurii: $u_t - \Delta u = 0$. Această ecuaţie a fost introdusă de către Fourier în celebrul să memoriu "Théorie analytique de la chaleur" (1810-1822).

6) Ecuaţia undelor: $u_{tt} - \Delta u = 0$. Ecuaţia a fost introdusă şi analizată de către d'Alembert în 1752 ca un model ce descrie mişcarea coardei vibrante. Studiul a fost dezvoltat de către Euler (1759, în dimensiune 2) şi D. Bernoulli (1762, în dimensiune 3).

7) Ecuaţia lui Schrödinger:

$$-ihu_t = \frac{h^2}{2m}\,\Delta u + \frac{e^2}{r}\,u\,.$$

Această ecuaţie a fost dedusă la începutul secolului XX ca urmare a studierii mişcării electronului în jurul protonului. Cantităţile care apar mai sus au următoarea semnificaţie: m este masa electronului, e este sarcina sa, iar h reprezintă raportul dintre constanta lui Planck $\hbar$ şi 2π. Funcţia coeficient e^2/r se numeşte potenţial. Dacă atomul conţine un singur electron (precum ionul de heliu), cantitatea e^2 este înlocuită de Ze^2, unde Z este numărul atomic.

8) Ecuaţia liniară de transport: $u_t + \sum_{i=1}^{N} a_i u_{x_i} = 0$.

9) Ecuaţia lui Liouville: $u_t - \sum_{i=1}^{N} (a_i u)_{x_i} = 0$.

10) Ecuaţia telegrafistului: $u_{tt} + au_t - u_{xx} = 0$.

Ecuaţia cu derivate parţiale (2.1) se numeşte **semiliniară** de ordinul k dacă se poate scrie sub forma

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \cdots, Du, u, x) = 0.$$

Exemple de ecuaţii semiliniare:

1) Ecuaţia lui Poisson: $-\Delta u = f(u)$.

2) Ecuaţia de reacţie-difuzie: $u_t - \Delta u = f(u)$.

3) Ecuaţia undelor: $u_{tt} - \Delta u = f(u)$.

4) Ecuaţia Korteweg - de Vries: $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$. Această ecuaţie descrie undele care apar în canale cu adâncime mică şi a fost dedusă în 1896. Un fenomen deosebit care se produce aici este apariţia undelor solitare (solitoni), a căror existenţă a fost prezisă de către J.S. Russell încă din 1834. Solitonii

sunt soluţii care îşi păstrează forma şi chiar interacţionează cu alte soluţii de acelaşi tip, fără aşi pierde individualitatea.

Ecuaţia cu derivate parţiale (2.1) se numeşte **cvasiliniară** de ordinul k dacă este forma

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u, \cdots, Du, u, x)D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \cdots, Du, u, x) = 0.$$

Exemple de ecuaţii cvasiliniare:

1) Ecuaţia p-Laplacian ($1 < p < \infty$): $\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) = 0$.

2) Ecuaţia suprafeţei minimale: $\operatorname{div}\left(\frac{Du}{(1+|Du|^2)^{1/2}}\right) = 0$. Această ecuaţie este legată de celebra **problemă a lui Plateau**, care constă în găsirea unei suprafeţe de arie minimă care înconjoară un contur dat din $\mathbb{R}^3$. Deşi această ecuaţie este cvasiliniară, un rezultat central din teoria suprafeţelor minimale arată că o soluţie **întreagă** (adică definită pe întregul spaţiu $\mathbb{R}^N$) a ecuaţiei suprafeţei minimale este **liniară** dacă $N \leq 7$. Acest rezultat a fost stabilit pentru prima dată de către Bernstein în 1916 pentru cazul $N = 2$ iar un contraexemplu celebru al lui Bombieri, DeGiorgi şi Giusti [9] arată că rezultatul este fals dacă $N = 8$.

Ecuaţia cu derivate parţiale (2.1) se numeşte **total neliniară** dacă depinde în mod neliniar de derivatele de ordin cel mai înalt.

Exemplu de ecuaţie total neliniară:

1) Ecuaţia lui Monge - Ampère: $\det(D^2u) = f$. A apărut pentru prima dată în lucrările lui Monge din 1775.

Se numeşte **sistem de ecuaţii cu derivate parţiale** de ordinul k o expresie de forma

$$F(D^k u(x), D^{k-1}u(x), \cdots, Du(x), u(x), x) = 0, \qquad x \in \Omega,$$

unde unde $F : \mathbb{R}^{m\mathbb{N}^k} \times \mathbb{R}^{m\mathbb{N}^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^m \times \Omega \to \mathbb{R}^m$, iar $u = (u_1, \cdots, u_m) : \Omega \to \mathbb{R}^m$ este necunoscuta.

Exemple de sisteme liniare:

1) Ecuaţiile lui Maxwell:

$$\begin{cases} \vec{E}_t = \operatorname{rot} \vec{B} \\ \vec{B}_t = -\operatorname{rot} \vec{E} \\ \operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} \vec{E} = 0. \end{cases}$$

Aceste ecuaţii sunt fundamentale în teoria electromagnetismului şi au fost deduse în 1864.

2) Ecuaţiile de echilibru ale elasticităţii liniare:

$$\mu\Delta u + (\lambda + \nu)\, D(\operatorname{div} u) = 0.$$

Exemple de sisteme neliniare:

1) Ecuaţiile lui Ginzburg-Landau:

$$-\Delta u = u(1 - |u|^2) \qquad u = (u_1, u_2) \qquad \text{în } \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

Aceste ecuaţii au fost introduse în 1950 de către V. Ginzburg şi L. Landau cu ocazia studiului unor fenomene de tranziţie de fază care apar în teoria superconductivităţii. Pentru un studiu matematic sistematic al acestor ecuaţii recomandăm monografia Bethuel-Brezis-Hélein [7].

2) Ecuaţiile lui Euler pentru fluide necompresibile, introduse în 1755:

$$\begin{cases} u_t + u \cdot Du = -Dp \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases}$$

3) Sistemul lui Navier-Stokes:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + u \cdot Du_i - \Delta u_i = f_i + \dfrac{\partial p}{\partial x_i} \qquad \text{în } \Omega \times (0,T),\ 1 \le i \le N \\ \operatorname{div} u = 0 \qquad \text{în } \Omega \times (0,T) \\ u = 0 \qquad \text{pe } \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) \qquad \text{pentru orice } x \in \Omega\,. \end{cases}$$

Aceste ecuaţii joacă un rol fundamental în mecanica fluidelor şi au fost studiate de către Navier (1822-1827), Poisson (1831) şi Stokes (1845).

Multe dintre aceste ecuaţii sau sisteme au fost generalizate în contextul geometriei diferenţiale. De pildă, Yamabe a demonstrat în 1960 că pentru orice varietate Riemanniană compactă (M, g) de dimensiune $N \geq 3$ există o metrică g', conformă cu metrica iniţială g, pentru care curbura scalară este constantă. Din punct de vedere al teoriei ecuaţiilor cu derivate parţiale acest lucru revine la găsirea unei funcţii u care satisface **ecuaţia lui Yamabe**

$$-\frac{4(N-1)}{N-2}\,\Delta_g u + Ru = K\, u^{(N+2)/(N-2)}\,,$$

unde R este curbura scalarăa metricii g iar K este o constantă. Simbolul Δ_g reprezintă operatorul lui Laplace asociat metricii g. Mai precis, în coordonate locale, acesta este definit prin

$$\Delta_g u = -\sum_{i,j=1}^{N}\left(u_{x_i x_j} - \sum_{k=1}^{N}\Gamma_{ij}^{k} u_{x_k}\right) =$$
$$-\sum_{i,j=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{\det\left(g_{ij}\right)}}\sum_{m=1}^{N}\left(\sqrt{\det\left(g_{ij}\right)}\sum_{k=1}^{N} g^{mk} u_{x_k}\right)_{x_m}$$

unde Γ_{ij}^{k} reprezintă simbolul lui Christoffel al conexiunii Levi-Civita iar prin $\det\left(g_{ij}\right)$ am notat determinantul matricei (g_{ij}).

2.2 Ecuaţii liniare cu derivate parţiale de ordinul întâi. Metode de rezolvare

Vom face în continuare o scurtă trecere în revistă a principalelor metode de rezolvare a ecuaţiilor liniare de ordinul întâi.

2.2.1 Ecuaţii cu coeficienţi constanţi

Pentru a uşura expunerea vom presupune că ne situăm in $\mathbb{R}^2$. Fie ecuaţia

$$a u_x + b u_y = 0 \qquad a, b \in \mathbb{R}\,,\ a^2 + b^2 \neq 0. \tag{2.2}$$

1) Metoda coordonatelor. Facem schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = bx - ay. \end{cases} \tag{2.3}$$

Obţinem

$$u_x = au_{x'} + bu_{y'} \qquad u_y = bu_{x'} - au_{y'}.$$

Prin urmare,

$$au_x + bu_y = (a^2 + b^2)u_{x'}.$$

Problema (2.2) devine astfel

$$u_{x'} = 0,$$

care implică

$$u(x, y) = f(bx - ay),$$

unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este funcţie de o **singură** variabilă.

2) Metoda geometrică. Fie $\vec{v} = (a, b)$. Avem

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{v}} := \nabla u \cdot \vec{v} = (u_x, u_y) \cdot (a, b) = au_x + bu_y.$$

Prin urmare, dacă u este soluţie a problemei (2.2), rezultă că

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{v}} = 0,$$

adică u este constantă pe **fiecare** dreaptă ce are direcţia $\vec{v}$. Aceste drepte se numesc **curbe caracteristice** pentru ecuaţia (2.2). Deducem de aici aceeaşi concluzie ca în cazul metodei coordonatelor, respectiv $u(x, y) = f(bx - ay)$.

2.2.2 Ecuaţii cu coeficienţi variabili

Exemplul 1. **Ecuaţii liniare şi omogene**:

Fie problema

$$u_x + yu_y = 0. \tag{2.4}$$

Căutăm mai întâi ecuaţiile curbelor caracteristice, care sunt date de problema

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1}.$$

Obţinem $y = Ce^x$, deci curbele având proprietatea că $(1, y)$ este vector tangent. Justificăm în cele ce urmează că $u(x, y) =$Const. de-a lungul fiecărei curbe caracteristice. Intr-adevăr,

$$\frac{d}{dx}\, u(x, Ce^x) = \frac{\partial u}{\partial x} + Ce^x \frac{\partial u}{\partial y} = u_x + yu_y = 0.$$

Aşadar,

$$u(x, Ce^x) = u(0, C) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Prin urmare,

$$u(x, y) = u(0, e^{-x}y) = f(e^{-x}y).$$

Raţionamentul de mai sus poate fi aplicat dacă problema (2.4) se înlocuieşte cu ecuaţia generală

$$f(x, y)u_x + g(x, y)u_y = 0,$$

cu condiţia ca ecuaţia

$$\frac{dx}{f(x, y)} = \frac{dy}{g(x, y)}$$

să fie integrabilă.

Exemplul 2. **Ecuaţii liniare neomogene**:

Fie problema cu valori iniţiale:

$$\begin{cases} u_x + u_y = 1 \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases} \tag{2.5}$$

Curba iniţială poate fi reprezentată parametric prin

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x_0(s) = s \\ y_0(s) = 0 \\ u_0(s) = f(s), \end{cases} \tag{2.6}$$

iar curbele caracteristice sunt date de sistemul

$$\frac{dx}{dt} = 1\,, \qquad \frac{dy}{dt} = 1\,, \qquad \frac{du}{dt} = 1\,.$$

Ţinând cont de curba iniţială (2.6), soluţia acestui sistem este

$$x = t + s \qquad y = t\,, \qquad u = t + f(s)\,.$$

De aici rezultă că unica soluţie a problemei (2.5) este

$$u(x, y) = y + f(x - y)\,.$$

Exerciţii.

1. Stabiliţi care din următoarele ecuaţii sunt liniare şi care sunt neliniare:

(i) $u_x + yu_y = 0$.

(ii) $u_x + uu_y = 0$.

(iii) $u_{tt} - u_{xx} + u^3 = 0$.

(iv) $u_{tt} + u_{xxxx} = 0$.

(v) $\sqrt{1+x^2}\,(\cos y)\,u_x + u_{yxy} - [\arctan(x/y)]\,u = 0$.

(vi) $u_t - \Delta(u^\gamma) = 0$.

(vii) $u_t - \sum_{i,j=1}^N (a_{ij}u)_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^N (b_i u)_{x_i} = 0$.

2. Arătaţi că

(i) $\operatorname{div}(u\,\vec{v}) = u\operatorname{div}\vec{v} + \nabla u\cdot\vec{v}$;

(ii) $\operatorname{div}(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{v}\cdot\operatorname{rot}\vec{u} - \vec{u}\cdot\operatorname{rot}\vec{v}$;

(iii) $\operatorname{rot}(\nabla u) = \vec{0}$;

(iv) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{v} = 0$.

3. Verificaţi că $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$ şi $\Delta(uv) = u\,\Delta v + v\,\Delta u + 2\,\nabla u\cdot\nabla v$.

4. Arătaţi că $\operatorname{div}(u\nabla v) = u\Delta v + \nabla u\cdot\nabla v$.

5. Fie $f = u + iv$ o funcţie olomorfă.

(i) Pornind de la ecuaţiile Cauchy-Riemann verificate de u şi v, arătaţi că $f_x + if_y = 0$.

(ii) Dacă $z = x + iy$ şi $\overline{z} = x - iy$, arătaţi că $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$. Demonstraţi că, în general, o condiţie necesară şi suficientă ca $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ este $f_x + if_y = 0$.

(iii) Arătaţi că $\Delta = 4\,\frac{\partial^2}{\partial z\partial \overline{z}}$.

6. Găsiţi soluţia generală a ecuaţiilor următoare:

(i) $u_{xx} = 0$.

(ii) $u_{xy} = 0$.

(iii) $u_{xx} + u = 0$.

7. Verificaţi prin calcul direct că funcţia $u_n(x,y) = \sin nx \sinh ny$ $(n \geq 1)$ este o soluţie a ecuaţiei $\Delta u = 0$ în $\mathbb{R}^2$.

8. Rezolvaţi ecuaţia $2u_x - u_{xy} = 0$.

9. Găsiţi soluţia problemei

$$\begin{cases} \sqrt{1-x^2}\, u_x + u_y = 0 \\ u(0,y) = 0. \end{cases}$$

10. Găsiţi soluţia generală a problemei $au_x + bu_y + cu = 0$.

11. (i) Rezolvaţi problema

$$\begin{cases} yu_x + xu_y = 0 \\ u(x,0) = e^{-x^2}. \end{cases}$$

(ii) In care regiune a planului soluţia este unic determinată?

12. Utilizaţi metoda coordonatelor pentru a găsi soluţia generală a ecuaţiei

$$2u_x + u_y - (x-2y)u = -2x^2 + 3xy + 2y^2.$$

13. Rezolvaţi problema cu valori iniţiale

$$xu_x + yu_y = u + 1\,, \qquad u(x, x^2) = x^2\,.$$

R. $u(x,y) = y + \frac{x^2}{y} - 1$.

14. Găsiţi soluţiile problemelor

(i) $xu_y - yu_x = 0$, cu condiţia iniţială $u(x,0) = f(x)$.

(ii) $u_x + u_y = u^2$, cu condiţia iniţială $u(x,0) = f(x)$.

R. (i) $u(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2})\, e^{\arctan y/x}$.

(ii) $u(x,y) = \frac{f(x-y)}{1-yf(x-y)}$.

15. Demonstraţi că unica soluţie a problemei $xu_x + yu_y + u = 0$ care este de clasă C^1 în pătratul $|x| \le a$, $|y| \le a$ este $u \equiv 0$.

Ind. Arătaţi că $\max u \le 0$ şi $\min u \ge 0$.

16. Demonstraţi teorema lui Picone: fie u o soluţie de clasă C^1 a ecuaţiei $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + u = 0$ în bila unitate închisă B din plan. Dacă $a(x,y)x + b(x,y)y > 0$ pe frontiera lui B, arătaţi că u este identic nulă.

17. Arătaţi că există funcţii u, $a \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ astfel încât

$$au_x + u_y = 0 \qquad \text{şi} \qquad \operatorname{supp} u = \{(x,y)\,;\ y \ge 0\} \supset \operatorname{supp} a\,.$$

18. Arătaţi că noile coordonate definite prin relaţia (2.3) sunt ortogonale.

19. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi a, b două numere reale astfel încât $a^2 + b^2 \neq 0$.

(i) Rezolvaţi ecuaţia $au_x + bu_y = f(x, y)$.

(ii) Scrieţi soluţia sub forma

$$u(x, y) = (a^2 + b^2)^{-1/2} \int_L f \, d\sigma + g(bx - ay),$$

unde g este o funcţie arbitrară de o variabilă, iar L este porţiunea din curba caracteristică cuprinsă între axa ordonatelor şi punctul (x, y).

Chapter 3

Probleme la limită de tip eliptic

Newton's fundamental discovery, the one which he considered necessary to keep secret and published only in the form of an anagram[1], consists of the following: *Data aequatione quotcunque fluentes quantitae involvente fluxiones invenire et vice versa.* In contemporary mathematical language this means: "It is useful to solve differential equations".

V. Arnold (1983), [4], p. iii

3.1 Clasificarea problemelor eliptice cu valori pe frontieră

Fie Ω un deschis arbitrar din $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ şi a_{ij}, b_i, $c \in C(\overline{\Omega})$, pentru $1 \leq i, j \leq N$.

Definiţia 1. *Operatorul liniar $L : C^2(\Omega) \to C(\Omega)$ definit prin*

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) u_{x_i} + c(x) u$$

se numeşte eliptic dacă $a_{ij} = a_{ji}$, $c \leq 0$ şi există $\alpha > 0$ astfel încât

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \|\xi\|^2 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \ \forall x \in \overline{\Omega}.$$

[1] Mai precis, Newton a comunicat descoperirea sa lui Leibniz în următoarea formă:

6a cc d ae 13e ff 7i 3l 9n 4o 4q rr 4s 9t 12v x.

Se poate spune că descifrarea acestei anagrame necesită mai multă ingeniozitate decât să rezolvi ecuaţii diferenţiale.

Cel mai des întâlnit operator eliptic este operatorul lui Laplace $\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$. Observăm că în acest caz, $a_{ij} = \delta_{ij}$, $b_i = c = 0$, pentru orice i şi j.

Definiţia 2. *Fie $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi L un operator eliptic. Se numeşte soluţie (clasică) a problemei*

$$Lu(x) = f(x) \qquad x \in \Omega \tag{3.1}$$

o funcţie $u \in C^2(\Omega)$ care verifică (3.1) pentru orice $x \in \Omega$.

Vom distinge în cele ce vor urma trei tipuri de probleme eliptice:

Problema Dirichlet. Fie L un operator eliptic, iar $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ şi $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ două funcţii continue. Problema Dirichlet asociată lui L, f şi g presupune găsirea unei funcţii $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ astfel încât

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x) & \text{pentru } x \in \Omega \\ u(x) = g(x) & \text{dacă } x \in \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Problema Neumann. Fie L un operator eliptic, iar $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ şi $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ două funcţii continue. Problema Neumann asociată lui L, f şi g presupune găsirea unei funcţii $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ astfel încât

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x) & \text{pentru } x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) = g(x) & \text{dacă } x \in \partial\Omega\,, \end{cases}$$

unde ν semnifică versorul normalei **exterioare** în punctul $x \in \partial\Omega$.

Problema mixtă (Robin). Fie L un operator eliptic, $\alpha, \beta \in C(\partial\Omega)$ ($\alpha^2 + \beta^2 > 0$ şi $\alpha\beta \geq 0$), iar $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ şi $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ două funcţii continue. Problema Robin asociată lui L, f şi g presupune găsirea unei funcţii $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ astfel încât

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x) & \text{pentru } x \in \Omega \\ \alpha(x)u(x) + \beta(x)\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) = g(x) & \text{dacă } x \in \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{3.2}$$

Observăm că problema cu condiţii de tip Robin este mai generală decât problemele Dirichlet sau Neumann, în sensul că pentru $\alpha \equiv 0$, $\beta \equiv 1$ în (3.2) se obţine problema Neumann, în timp ce $\beta \equiv 0$, $\alpha \equiv 1$ conduce la problema Dirichlet.

3.2 Soluţia fundamentală a ecuaţiei lui Laplace

Fie Ω un deschis arbitrar din $\mathbb{R}^N$. Ne vom concentra atenţia în cele ce urmează asupra ecuaţiei lui Laplace

$$\Delta u = 0 \qquad \text{în } \Omega. \tag{3.3}$$

O soluţie a acestei ecuaţii se numeşte **funcţie armonică**. Asemenea funcţii apar într-o mare varietate de probleme practice. Să presupunem, de pildă, că funcţia u reprezintă densitatea unei anumite cantităţi (de exemplu, concentraţia chimică a unei substanţe) în poziţia de echilibru. Prin urmare

$$\int_{\partial\omega} \vec{F} \cdot \nu \, d\sigma = 0 \qquad \forall \omega \subset\subset \Omega\,.$$

Conform formulei Gauss-Ostrogradski rezultă

$$\int_{\omega} \operatorname{div} \vec{F} = 0 \qquad \forall \omega \subset\subset \Omega\,.$$

Cum ω este arbitrar, de aici rezultă că

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0 \qquad \text{în } \Omega\,. \tag{3.4}$$

Conform legilor fizicii, fluxul $\vec{F}$ este proporţional cu gradientul, adică

$$\vec{F} = -C\,\nabla u \qquad C > 0\,. \tag{3.5}$$

Din (3.4) şi (3.5) rezultă $\operatorname{div}(\nabla u) = 0$, adică $\Delta u = 0$ în Ω.

Dacă u reprezintă temperatura unui corp se obţine astfel legea lui Fourier de difuzie a căldurii. Dacă u semnifică potenţialul chimic, obţinem legea lui Fick de difuzie, iar dacă u este potenţialul electrostatic, calculul de mai sus conduce la legea lui Ohm.

Vom găsi în continuare o anumită soluţie a ecuaţiei lui Laplace (3.3) pentru $\Omega = \mathbb{R}^N$. Mai precis, vom căuta soluţia în clasa funcţiilor cu simetrie radială, adică

$$u(x) = v(r) \qquad r = |x| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}, \tag{3.6}$$

unde $v : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Din (3.6) rezultă

$$u_{x_i} = v'(r)\,\frac{x_i}{r}\,,$$

ceea ce implică

$$u_{x_i x_i} = \frac{x_i^2}{r^2}\,v''(r) + \frac{1}{r}\,v'(r) - \frac{x_i^2}{r^3}\,v'(r) \qquad \forall 1 \le i \le N.$$

Deci

$$\Delta u(x) = v''(r) + \frac{N-1}{r}\,v'(r)\,.$$

Aşadar rezolvarea ecuaţiei (3.3) se reduce în acest caz la găsirea soluţiei generale a problemei

$$v''(r) + \frac{N-1}{r}\,v'(r) = 0 \qquad r > 0\,.$$

Cu substituţia $v' = z$ obţinem

$$z' = \frac{1-N}{r}\,z \qquad r > 0\,.$$

Deci

$$z(r) = \frac{C}{r^{N-1}} \qquad r > 0,$$

ceea ce conduce la

$$v(r) = \begin{cases} C_1 \ln r + C_2, & \forall r > 0 \text{ (dacă } N = 2) \\ \dfrac{C_1}{r^{N-2}} + C_2, & \forall r > 0 \text{ (dacă } N \ge 3). \end{cases}$$

Definiţia 3. *Se numeşte soluţie fundamentală a ecuaţiei lui Laplace funcţia*

$$E(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\,\ln|x|\,, & x \ne 0 \ (\textit{dacă } N = 2) \\ \dfrac{1}{(2-N)\omega_N}\,\dfrac{1}{|x|^{N-2}}\,, & x \ne 0 \ (\textit{dacă } N \ge 3). \end{cases}$$

In definiţia de mai sus, ω_N semnifică aria sferei unitate din $\mathbb{R}^N$, care se calculează după formula

$$\omega_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)},$$

unde Γ este funcţia "Gamma" a lui Euler, definită prin

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty t^{r-1}\, e^{-t}\, dt\,, \qquad \forall r > 0\,.$$

Observăm că soluţia fundamentală a ecuaţiei lui Laplace este definită în întregul spaţiu cu excepţia unui singur punct, care reprezintă o "singularitate" pentru această funcţie.

Din definiţia soluţiei fundamentale obţinem cu un calcul elementar următoarele estimări

$$|DE(x)| \leq \frac{C}{|x|^{N-1}}\,, \qquad \forall x \neq 0$$

şi

$$|D^2E(x)| \leq \frac{C}{|x|^N}\,, \qquad \forall x \neq 0\,,$$

unde C este o constantă care depinde doar de N. In plus, prin construcţie, funcţia E este armonică în $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Mai general, aplicaţia

$$x \longmapsto E(x-y)$$

este armonică în $\mathbb{R}^N \setminus \{y\}$, unde $y \in \mathbb{R}^N$ este un element fixat în mod arbitrar. Datorită acestui lucru am fi tentaţi să afirmăm că

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Delta_x E(x-y) f(y)\, dy = 0\,,$$

unde $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ este o funcţie netedă arbitrară (am notat prin Δ_x "laplacianul" în raport cu variabila x). Acest lucru nu este adevărat, fie doar şi din simplul motiv că aplicaţia $y \longmapsto D^2E(x-y)$ nu este integrabilă. Cu toate acestea are loc următorul rezultat

Teorema 1. *Fie* $f \in C^2_c(\mathbb{R}^N)$ *şi* $u(x) := \int_{\mathbb{R}^N} E(x-y) f(y)\, dy$, $x \in \mathbb{R}^N$. *Atunci*

(i) u *este o funcţie de clasă* C^2.

(ii) $\Delta u = f$ *în* $\mathbb{R}^N$.

Demonstraţie. (i) Cu schimbarea de variabilă $y \longrightarrow x - z$ obţinem, folosind definiţia lui u,

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} E(z) f(x-z)\, dz\,.$$

Aşadar

$$\frac{u(x+te_i) - u(x)}{t} = \int_{\mathbb{R}^N} E(z)\, \frac{f(x+te_i-z) - f(x-z)}{t}\, dz. \tag{3.7}$$

Intrucât f este o funcţie netedă cu suportul compact, rezultă că

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+te_i-z) - f(x-z)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-z) \qquad \text{uniform pentru } z \in \mathbb{R}^N. \tag{3.8}$$

Din (3.7) şi (3.8) rezultă că operatorii “lim” şi $\int$ comută, deci

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} E(z)\, \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-z)\, dz.$$

Cu aceleaşi argumente deducem că

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} E(z)\, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x-z)\, dz, \tag{3.9}$$

pentru orice $1 \leq i, j \leq N$. Pentru a conclude că u este o funcţie de clasă C^2 este acum suficient să utilizăm expresiile de mai sus ale derivatelor parţiale împreună cu ipoteza $f \in C^2_c(\mathbb{R}^N)$.

(ii) In calculul pe care îl vom face în continuare căutăm să evităm singularitatea soluţiei fundamentale în origine. Fixăm $\varepsilon > 0$ şi $x \in \mathbb{R}^N$. Folosind (3.9) avem

$$\Delta u(x) = \int_{B(0,\varepsilon)} E(z) \Delta_x f(x-z)\, dz + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,\varepsilon)} E(z) \Delta_x f(x-z)\, dz := A_\varepsilon + B_\varepsilon\,. \tag{3.10}$$

Pe de o parte,

$$|A_\varepsilon| \leq \|D^2 f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{B(0,\varepsilon)} |E(z)|\, dz \leq \begin{cases} C\,\varepsilon^2\, |\ln \varepsilon|, & \text{dacă } N = 2 \\ C\,\varepsilon^2, & \text{dacă } N \geq 3\,. \end{cases}$$

In particular

$$\lim_{\varepsilon \to 0} A_\varepsilon = 0\,. \tag{3.11}$$

Pe de altă parte, conform primei formule a lui Green,

$$\begin{aligned}B_\varepsilon = & \int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,\varepsilon)} E(z)\Delta_x f(x-z)\,dz = \\ & \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial f}{\partial \nu}\,(x-z)E(z)\,d\sigma(z) - \int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,\varepsilon)} \nabla E(z)\cdot\nabla_x f(x-z)\,dz := C_\varepsilon + D_\varepsilon\,.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Avem

$$|C_\varepsilon| \le \|Df\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |E(z)|d\sigma(z) \le \begin{cases} C\,\varepsilon\,|\ln\varepsilon|, & \text{dacă } N=2 \\ C\,\varepsilon, & \text{dacă } N\ge 3\,. \end{cases}$$

Aşadar, în ambele cazuri,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} C_\varepsilon = 0\,. \tag{3.13}$$

Aplicând din nou prima formulă a lui Green,

$$\begin{aligned}D_\varepsilon = & -\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial E}{\partial \nu}(z)\,f(x-z)\,d\sigma(z) + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,\varepsilon)} \Delta E(z) f(x-z)\,dz = \\ & -\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial E}{\partial \nu}(z)\,f(x-z)\,d\sigma(z)\,,\end{aligned} \tag{3.14}$$

căci E este armonică în $\mathbb{R}^N\setminus B(0,\varepsilon)$. Dar

$$\nu(z) = -\frac{z}{|z|} = -\frac{z}{\varepsilon} \qquad \forall z\in\partial B(0,\varepsilon)$$

şi

$$\nabla E(z) = \frac{1}{\omega_N}\,\frac{z}{|z|^N} \qquad \forall z\ne 0\,.$$

Deci

$$\frac{\partial E}{\partial \nu}\,(z) := \nabla E(z)\cdot\nu(z) = -\frac{1}{\omega_N}\,\frac{1}{\varepsilon^{N-1}} \qquad \forall z\in\partial B(0,\varepsilon)\,. \tag{3.15}$$

Din (3.14) şi (3.15) rezultă

$$D_\varepsilon = \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-z)\,d\sigma(z) = ⨏_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-z)\,d\sigma(z)\,.$$

De aici rezultă că

$$\lim_{\varepsilon\to 0} D_\varepsilon = f(x)\,. \tag{3.16}$$

Din (3.10), (3.11), (3.12), (3.13) şi (3.16) obţinem

$$\Delta u(x) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N .$$

$\square$

Exerciţii.

1. **Deducerea valorii lui** ω_N.

(i) Scriind eventual integrala de volum în funcţie de integrala de suprafaţă, arătaţi că volumul bilei de rază r din $\mathbb{R}^N$ este $v_N(r) = \frac{\omega_N r^N}{N}$.

(ii) Arătaţi că $v_{N+1}(1) = 2\int_0^1 v_N(\sqrt{1-x^2})dx$.

(iii) Folosind (i) şi (ii) deduceţi că

$$v_{N+1}(1) = \frac{2\omega_N}{N} \int_0^{\pi/2} \cos^{N+1}\theta d\theta$$

şi

$$\omega_{N+1} = 2\omega_N \frac{N+1}{N} \int_0^{\pi/2} \cos^{N+1}\theta d\theta$$

.

(iv) Arătaţi că

$$\omega_{N+1} = \frac{N-2}{N-1} \frac{\omega_N \omega_{N-1}}{\omega_{N-2}}, \qquad \forall N \geq 3.$$

(v) Deduceţi că $\omega_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}$.

2. Găsiţi toate soluţiile cu simetrie sferică ale ecuaţiei biarmonice $\Delta^2 u = 0$.

R. $u(r) = \begin{cases} C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r & \text{dacă } N = 2 \\ C_1 + C_2 r^2 + C_3 r^{2-N} + C_4 r^{4-N} & \text{dacă } N \geq 3 \text{ şi } N \neq 4 \\ C_1 + C_2 r^2 + C_3 r^{-2} + C_4 \ln r & \text{dacă } N = 4 \end{cases}$

3. Găsiţi toate soluţiile cu simetrie sferică ale ecuaţiei $-\Delta u = \lambda u$, $\lambda > 0$.

R. $u(r) = \frac{C_1 \cos\sqrt{\lambda} r + C_2 \sin\sqrt{\lambda} r}{r}$.

4. Arătaţi că dacă $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ este o funcţie armonică în Ω atunci $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = 0$.

5. Arătaţi că soluţia fundamentală a ecuaţiei lui Laplace are următoarele proprietăţi: $E \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$, iar E, $E_{x_i} \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^N)$, pentru orice $i = 1, \cdots, N$.

6. **Operatorul lui Laplace în coordonate sferice**.

Reamintim că în $\mathbb{R}^3$ legătura dintre coordonatele carteziene şi cele sferice este dată de $x = r\,\sin\theta\,\cos\varphi$, $y = r\,\sin\theta\,\sin\varphi$, $z = r\,\cos\theta$. Arătaţi că expresia operatorului lui Laplace în coordonate sferice este dată de

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}\,u_r + \frac{1}{r^2}\left(u_{\theta\theta} + (\cot\theta)\,u_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\,u_{\varphi\varphi}\right). \tag{3.17}$$

7. Folosind formula (3.17) arătaţi că soluţia independentă de φ a problemei

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{în } B(0,1) \subset \mathbb{R}^3 \\ u(1,\theta) = f(\theta) \end{cases}$$

este dată de formula

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos\theta)\,,$$

unde $a_n = \dfrac{2n+1}{2}\displaystyle\int_0^\pi f(\theta)P_n(\cos\theta)\,\sin\theta\,d\theta$, iar $P_n(t)$, $t \in [-1,1]$ sunt polinoamele lui Lagrange, respectiv soluţiile ecuaţiei

$$(1-t^2)\,\frac{d^2\Phi}{dt^2} - 2t\,\frac{d\Phi}{dt} + n(n+1)\,\Phi = 0 \qquad -1 \le t \le 1\,.$$

8. **Operatorul lui Laplace în coordonate cilindrice**.

Considerăm în $\mathbb{R}^3$ coordonatele cilindrice (r,θ,z) introduse prin $x = r\,\cos\theta$, $y = r\,\sin\theta$, $z = z$. Arătaţi că expresia operatorului lui Laplace în coordonate cilindrice este dată de

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}\,u_r + \frac{1}{r^2}\,u_{\theta\theta} + u_{zz}\,.$$

9. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domeniu cu frontiera netedă şi $u \in C^2(\overline{\Omega})$ astfel încât $u = 0$ pe $\partial\Omega$. Demonstraţi următoarea inegalitate de interpolare:

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \le \varepsilon \int_\Omega (\Delta u)^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon}\int_\Omega u^2 dx,$$

pentru orice $\varepsilon > 0$.

10. Fie a un număr real şi $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o funcţie definită astfel: $u(x) = |x|^{-1} \sin a|x|$ dacă $x \neq 0$ şi $u(0) = a$. Arătaţi că u este de clasă C^2 pe $\mathbb{R}^3$ şi $-\Delta u = a^2 u$.

11. Fie $\Delta u = f$ în $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Arătaţi că transformarea Kelvin pentru u, definită prin $v(x) = |x|^{2-N} u(x/|x|^2)$, pentru $x/|x|^2 \in \Omega$, satisface relaţia

$$\Delta v(x) = |x|^{-N-2} f\left(\frac{x}{|x|^2}\right).$$

12. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă şi conexă, iar u o funcţie armonică în Ω. Fie a, b şi c numere pozitive astfel încât $a \leq b \leq c$ şi $b^2 = ac$. Dacă $B_c(x_0) \subset\subset \Omega$, arătaţi că

$$\int_{|\tau|=1} u(x_0 + a\tau) u(x_0 + c\tau) d\tau = \int_{|\tau|=1} u^2(x_0 + b\tau) d\tau.$$

Deduceţi că dacă o funcţie armonică este constantă într-o vecinătate a lui x_0 atunci u este constantă în Ω.

Sol. Fără restrânge generalitatea, putem presupune $x_0 = 0$. Fixăm $b > 0$ şi considerăm aplicaţia

$$f(a) = \int_{|\tau|=1} u(a\tau) u\left(\frac{b^2}{a}\tau\right) d\tau, \qquad a \in (0, b].$$

E suficient să arătăm că f este constantă. Avem

$$\begin{aligned} f'(a) = & \int_{|\tau|=1} u\left(\frac{b^2}{a}\tau\right) \nabla u(a\tau) \cdot \tau d\tau - \frac{b^2}{a^2} \int_{|\tau|=1} u(a\tau) \nabla u\left(\frac{b^2}{a}\tau\right) \cdot \tau d\tau = \\ & \frac{1}{a^{N-1}} \int_{\partial B_a} u\left(\frac{b^2}{a^2}y\right) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) d\sigma(y) - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{a^{N-1}} \int_{\partial B_a} u(y) \frac{\partial u}{\partial \nu}\left(\frac{b^2}{a^2}y\right) d\sigma(y) = \\ & \frac{1}{a^{N-1}} \int_{\partial B_a} \left[u\left(\frac{b^2}{a^2}y\right) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial u}{\partial \nu}\left(\frac{b^2}{a^2}y\right)\right] d\sigma(y). \end{aligned}$$

Fie $v(y) = u\left(\frac{b^2}{a^2}y\right)$. Atunci

$$\begin{aligned} f'(a) = & \frac{1}{a^{N-1}} \left[\int_{\partial B_a} v(y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) d\sigma(y) - \int_{\partial B_a} u(y) \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) d\sigma(y)\right] = \\ & \frac{1}{a^{N-1}} \left[\int_{B_a} (v(y)\Delta u(y) - u(y)\Delta v(y))\, dy\right] = \\ & \frac{1}{a^{N-1}} \int_{B_a} \left[u\left(\frac{b^2}{a^2}y\right) \Delta u(y) - \frac{b^2}{a^2} u(y) \Delta u\left(\frac{b^2}{a^2}y\right)\right] dy = 0. \end{aligned}$$

3.3 Teorema de medie pentru funcţii armonice. Principiul slab de maxim

Funcţiile armonice au proprietatea remarcabilă că valoarea lor într-un punct arbitrar depinde de valorile luate pe orice bilă (sau sferă) cu centrul în punctul respectiv. Mai precis, o funcţie este armonică dacă şi numai dacă valoarea sa într-un punct arbitrar este media valorilor luate pe orice bilă (sau sferă) centrată în acel punct. Vom demonstra în acest sens

Teorema 2. (Formula de medie pentru funcţii armonice). *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă arbitrară.*

(i) Dacă $u \in C^2(\Omega)$ o funcţie armonică, atunci

$$u(x) = \oint_{\partial B(x,r)} u(y)\, d\sigma(y) = \oint_{B(x,r)} u(z)\, dz\,,$$

pentru orice $x \in \Omega$ şi orice $r > 0$ astfel încât $\overline{B}(x,r) \subset \Omega$.

(ii) Dacă funcţia $u \in C^2(\Omega)$ are proprietatea că

$$u(x) = \oint_{\partial B(x,r)} u(y)\, d\sigma(y)\,, \qquad \forall x \in \Omega\,,\ \forall B(x,r) \subset\subset \Omega\,,$$

atunci u este o funcţie armonică.

Demonstraţie. (i) Fie

$$\varphi(r) := \oint_{\partial B(x,r)} u(y)\, d\sigma(y)\,.$$

Printr-o schimbare de variabilă observăm că

$$\varphi(r) = \oint_{\partial B(0,1)} u(x+rz)\, d\sigma(z)\,.$$

Deci

$$\varphi'(r) = \oint_{\partial B(0,1)} \nabla u(x+rz)\cdot z\, d\sigma(z) = \oint_{\partial B(x,r)} \nabla u(y)\cdot \frac{y-x}{r}\, d\sigma(y) = \oint_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma(y)\,.$$

Aplicând formula Gauss-Ostrogradski obţinem

$$\varphi'(r) = \frac{r}{N} \oint_{B(x,r)} \Delta u(y)\, dy = 0\,,$$

căci u este o funcţie armonică. Rezultă că φ este constantă, ceea ce implică

$$\oint_{\partial B(x,r)} u\,d\sigma = \lim_{s\to 0}\oint_{\partial B(x,s)} u\,d\sigma = u(x)\,.$$

Pentru a justifica a doua egalitate din (i) e suficient să observăm că

$$\int_{B(x,r)} u(z)\,dz = \int_0^r \left(\int_{\partial B(x,s)} u\,d\sigma\right) ds = u(x)\int_0^r \omega_N s^{N-1}\,ds = \frac{\omega_N r^N}{N}\,u(x)\,.$$

(ii) Presupunem prin absurd că u nu este o funcţie armonică. Prin urmare, există $x\in\Omega$ şi $r>0$ astfel încât $\overline{B}(x,r)\subset\Omega$ şi $\Delta u\neq 0$ în $B(x,r)$. Fără a micşora generalitatea, putem presupune că $\Delta u>0$ în $B(x,r)$. Cu aceleaşi notaţii ca în (i), avem

$$0=\varphi'(r)=\frac{r}{N}\oint_{B(x,r)}\Delta u(z)\,dz>0\,,$$

ceea ce constituie o contradicţie. Cu aceasta, demonstraţia este încheiată. $\square$

Cu ajutorul formulei de medie putem deduce cu uşurinţă următorul rezultat (deosebit de util într-o diversitate de situaţii) care afirmă în esenţă că valorile extreme ale unei funcţii armonice sunt atinse pe frontieră.

Teorema 3. (Principiul slab de maxim pentru funcţii armonice). *Fie $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă şi mărginită şi fie $u\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ o funcţie armonică. Atunci*

(i) $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$ *şi* $\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u\,.$

(ii) Dacă, în plus, Ω este o mulţime conexă şi există $x_0\in\Omega$ astfel încât $u(x_0)=\max_{\overline{\Omega}} u$ (sau $u(x_0)=\min_{\overline{\Omega}} u$), atunci u este o funcţie constantă în Ω.

Demonstraţie. Observăm cu uşurinţă că este suficient să demonstrăm afirmaţia (ii). Concluzia de la (i) rezultă apoi aplicând (ii) pe fiecare componentă conexă a lui Ω.

Ideea demonstraţiei este de a arăta că mulţimea

$$A:=\{x\in\Omega\,;\ u(x)=\max_{\overline{\Omega}} u\}$$

este simultan închisă şi deschisă în Ω, ceea ce implică $A = \Omega$ (adică u este constantă) sau $A = \emptyset$. Din ipoteză, $x_0 \in A$, deci A este nevidă. Evident, din continuitatea lui u, mulţimea A este închisă în Ω. Rămâne să arătăm că A este deschisă. Fie $x_0 \in \Omega$ astfel încât $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u := M$. Fixăm $r > 0$ astfel încât $r < \text{dist}\,(x_0, \partial\Omega)$. Aplicând principiul de maxim funcţiei armonice u avem

$$M = u(x_0) = \fint_{B(x_0,r)} u(y)\,dy \leq M\,,$$

deoarece $u \leq M$ în $B(x_0, r)$. De aici rezultă că, în mod necesar, $u \equiv M$ în $B(x_0, r)$, ceea ce atrage, în particular, că A este deschisă. Cu aceasta demonstraţia este încheiată. $\square$

Exerciţii.

1. Arătaţi că problema Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{pentru } x \in \Omega \\ u(x) = g(x) & \text{dacă } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

are cel mult o soluţie clasică.

2. Explicaţi următorul "paradox": funcţia $u(x,y) = (x^2+y^2-2x)/(x^2+y^2)$ satisface

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dacă } x^2+y^2-2x < 0 \\ u = 0 & \text{dacă } x^2+y^2-2x = 0\,. \end{cases}$$

Inseamnă acest lucru că problema Dirichlet pe cerc cu condiţie Dirichlet nulă pe frontieră admite o soluţie diferită de soluţia banală?

3. (i) Demonstraţi că oricare două soluţii clasice ale problemei Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{pentru } x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) = g(x) & \text{dacă } x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.18}$$

diferă printr-o constantă.

(ii) Arătaţi că o condiţie necesară ca problema (3.18) să admită soluţie este ca $\int_\Omega f\,dx = -\int_{\partial\Omega} g\,d\sigma(x)$.

4. Discutaţi unicitatea soluţiei pentru problema Robin

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{pentru } x \in \Omega \\ \alpha\, u(x) + \beta \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) = g(x) & \text{dacă } x \in \partial\Omega\ , \end{cases}$$

unde α şi β sunt numere reale astfel încât $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ şi $\alpha\beta \geq 0$.

5. Arătaţi că problema

$$\begin{cases} \Delta u = 1 & \text{în } \Omega := (-1,1) \times (-1,1) \\ u(-1,y) = u(1,y) = 0 & y \in (-1,1) \\ u_x(x,1) + u_y(x,1) = 0 & x \in (-1,1) \\ u_x(x,-1) - u_y(x,-1) = 0 & x \in (-1,1) \end{cases}$$

are cel mult o soluţie.

Sol. Fie u_1 şi u_2 două soluţii şi $u = u_1 - u_2$. Este suficient să demonstrăm că $u = 0$ unde u verifică

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{în } (-1,1) \times (-1,1) \\ u(-1,y) = u(1,y) = 0 & y \in (-1,1) \\ u_x(x,1) + u_y(x,1) = 0 & x \in (-1,1) \\ u_x(x,-1) - u_y(x,-1) = 0 & x \in (-1,1)\,. \end{cases}$$

Inmulţind cu u în $\Delta u = 0$ şi integrând prin părţi obţinem $\displaystyle\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \nu} = \int_\Omega |\nabla u|^2$. De aici rezultă că este suficient să demonstrăm că $\nabla u = 0$ în Ω, căci aceasta atrage $u =$Const. în Ω, adică $u = 0$, folosind ipoteza $u(-1,y) = u(1,y) = 0$, în $(-1,1)$. Folosind condiţiile la limită avem

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \nu} = \quad & \int_{-1}^{1} u \frac{\partial u}{\partial x}(x,-1)\, dx - \int_{-1}^{1} u \frac{\partial u}{\partial x}(x,1)\, dx = \\ & \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, x}\,(u^2)(x,-1)\, dx - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, x}\,(u^2)(x,1)\, dx = \\ & \big(u^2(1,-1) - u^2(-1,-1) - u^2(1,1) + u^2(-1,1)\big) = 0. \end{aligned}$$

6. Fie $u = u(r,\varphi)$ o funcţie armonică în bila $B(0,2) \subset \mathbb{R}^2$ astfel încât $u(2,\varphi) = 2\cos 2\varphi + 1$. Calculaţi $\sup_{B(0,2)} u$ şi $u(0)$.

7. Fie $N \geq 3$. Modificaţi demonstraţia teoremei de medie pentru funcţii armonice pentru a arăta că

$$u(0) = \fint_{\partial B(0,R)} g\, d\sigma + \frac{1}{(N-2)\omega_N} \int_{B(0,R)} \left(\frac{1}{|x|^{N-2}} - \frac{1}{R^{N-2}} \right) f\, dx\,,$$

unde u este soluţia problemei

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{în } B(0,R) \\ u = g & \text{pe } \partial B(0,R)\,. \end{cases}$$

Formulaţi şi demonstraţi un rezultat similar dacă $N = 2$.

8. Fie $u_n \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ un şir de funcţii armonice. Arătaţi că dacă u_n converge uniform pe $\partial\Omega$ atunci u_n este uniform convergent pe $\overline{\Omega}$.

9. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă, mărginită şi conexă şi $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă care este de clasă C^2 pe Ω. Presupunem că u se anulează în orice punct de pe frontiera lui Ω şi există $x_0 \in \Omega$ astfel încât $u(x_0) = 0$. Arătaţi că există $x_1 \in \Omega$ cu proprietatea că $\Delta u(x_1) = 0$.

Sol. Dacă $u \equiv 0$ în Ω, afirmaţia este evidentă. Presupunem $u \not\equiv 0$ în Ω. Atunci există x_m, $x_M \in \Omega$, $x_m \neq x_M$ astfel încât $u(x_m) = \min_{\overline{\Omega}} u \leq 0$ şi $u(x_M) = \max_{\overline{\Omega}} u \geq 0$. In plus, $\Delta u(x_m) \geq 0$ şi $\Delta u(x_M) \leq 0$. Funcţia $v = \Delta u$ este continuă pe mulţimea conexă Ω şi $v(x_M) \leq 0$, $v(x_m) \geq 0$. Deci există $x_1 \in \Omega$ astfel încât $v(x_1) = 0$.

10. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă şi mărginită, $a_i : \Omega \to (0, \infty)$ funcţii continue $(i = 1, \cdots, N)$ şi $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă care este de clasă C^2 pe Ω. Considerăm operatorul diferenţial $P(x,D) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} a_i(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Dacă funcţia u verifică ecuaţia $P(x,D)u = 0$ în Ω, arătaţi că $\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u$ şi $\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u$.

11. Fie Ω un domeniu mărginit în $\mathbb{R}^N$ şi $\Omega_1 = \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$. Considerăm o funcţie u armonică în Ω_1 astfel încât $u \in C(\overline{\Omega_1})$ şi $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$. Arătaţi că

$$|u(x)| \leq \max_{y \in \partial\Omega} |u(y)| \qquad \forall x \in \overline{\Omega_1}\,.$$

In particular, dacă $u = 0$ pe $\partial\Omega$ şi $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$, atunci $u \equiv 0$ în $\overline{\Omega_1}$.

12. Fie $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x^2 + 4y^2 < 1\}$. Arătaţi că problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 + x^2 & \text{în } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega \end{cases}$$

are o soluţie unică $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ şi, în plus, $0 < u(x, y) < \frac{1}{4}$ pentru orice $(x, y) \in \Omega$.

13. Fie problema lui Poisson

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{în } \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases}$$

Arătaţi că $0 \le u \le 1/8$ în $[0, 1] \times [0, 1]$.

Mai general, arătaţi că dacă $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ este soluţie a problemei

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{în } \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases}$$

atunci

$$||u||_\infty \le \frac{1}{8}\,||f||_\infty,$$

unde $||u||_\infty := \sup_{(x,y)\in\overline{\Omega}} |u(x, y)|$.

14. Fie problema lui Poisson

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{în } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases}$$

unde $\Omega \subset \{(x, y);\ x^2 + y^2 < R^2\}$.

(i) Arătaţi că dacă $f \equiv 1$ atunci

$$0 \le u(x, y) \le \frac{R^2}{4} \qquad \forall (x, y) \in \overline{\Omega}.$$

(**Ind.** Comparaţi u cu funcţia $v(x, y) = \frac{1}{4}(R^2 - x^2 - y^2)$.)

(ii) In cazul general, demonstraţi că

$$||u||_\infty \le \frac{R^2}{4}\,||f||_\infty.$$

3.4 Teorema Green-Riemann

Rezultatul următor oferă o formulă de reprezentare pentru o funcţie **arbitrară** definită pe Ω. Cu ajutorul său vom deduce formula de medie pentru funcţii armonice, precum şi o proprietate deosebit de interesantă a soluţiei fundamentale E a ecuaţiei lui Laplace, care pune în evidenţă natura singularităţii acestei funcţii.

Teorema 4. (teorema Green-Riemann). *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă, mărginită şi fie $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ astfel încât $\Delta u \in C(\overline{\Omega})$. Atunci*

$$\begin{aligned} u(x) = \quad & \int_\Omega \Delta u(y) E(x-y)\,dy - \int_{\partial\Omega} E(x-y)\,\frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y)\,d\sigma(y) + \\ & \int_{\partial\Omega} u(y)\,\frac{\partial E(x-y)}{\partial \nu_y}\,d\sigma(y) \qquad \forall x \in \Omega \end{aligned} \tag{3.19}$$

şi

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \Delta u(y) E(x-y)\,dy - \int_{\partial\Omega} E(x-y)\,\frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y)\,d\sigma(y) + \\ & \int_{\partial\Omega} u(y)\,\frac{\partial E(x-y)}{\partial \nu_y}\,d\sigma(y) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}\,. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Demonstraţie. Fie $x \in \Omega$ şi $\varepsilon > 0$ astfel încât $\overline{B(x,\varepsilon)} \subset \Omega$. Aplicând a doua formulă a lui Green în domeniul $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \overline{B(x,\varepsilon)}$ obţinem

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u(y) E(x-y)\,dy - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} E(x-y)\,\frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y)\,d\sigma(y) + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} u(y)\,\frac{\partial E(x-y)}{\partial \nu_y}\,d\sigma(y) = 0\,. \tag{3.21}$$

De aici rezultă că

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u(y) E(x-y)\,dy - \int_{\partial\Omega} E(x-y)\,\frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y)\,d\sigma(y) + \int_{\partial\Omega} u(y)\,\frac{\partial E(x-y)}{\partial \nu_y}\,d\sigma(y) = \\ & \int_{S_\varepsilon} E(x-y)\,\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\,d\sigma(y) - \int_{S_\varepsilon} u(y)\,\frac{\partial E(x-y)}{\partial \nu}\,d\sigma(y)\,, \end{aligned} \tag{3.22}$$

unde S_ε reprezintă sfera de rază ε centrată în punctul x. Presupunem în continuare că $N \geq 3$ şi lăsăm cititorului, ca exerciţiu, să efectueze calculele care urmează în cazul $N = 2$. Avem

$$\begin{aligned} & \left| \int_{S_\varepsilon} E(x-y)\,\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\,d\sigma(y) \right| \leq \\ & \frac{1}{(N-2)\omega_N \varepsilon^{N-2}} \int_{S_\varepsilon} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right| d\sigma(y) \leq \frac{C\varepsilon}{N-2} \to 0 \quad \text{dacă } \varepsilon \to 0\,. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Pe de altă parte,

$$\frac{\partial E(x-y)}{\partial \nu} = \left(\nabla_y E(x-y), \frac{x-y}{\|x-y\|}\right) = -\frac{1}{\omega_N \|x-y\|^{N-1}} = -\frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}}\,, \tag{3.24}$$

pentru orice $y \in S_\varepsilon$. Deci, folosind (3.24),

$$\int_{S_\varepsilon} u(y)\,\frac{\partial E(x-y)}{\partial \nu}\,d\sigma(y) = -\frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int_{S_\varepsilon} u(y)\,d\sigma(y) \to -u(x) \qquad \text{dacă } \varepsilon \to 0\,. \tag{3.25}$$

Cum aplicaţia $y \longmapsto E(x-y)\Delta u(y)$ este integrabilă pe Ω, rezultă că

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u(y) E(x-y)\,dy = \int_\Omega \Delta u(y) E(x-y)\,dy\,. \tag{3.26}$$

Din (3.22), (3.23), (3.25) şi (3.26) obţinem cu uşurinţă (3.19).

Relaţia (3.20) se obţine cu aceleaşi argumente ca (3.21), aplicând formula lui Green direct în Ω. Acest lucru este posibil deoarece $x \notin \overline{\Omega}$, deci aplicaţia $\Omega \ni y \longmapsto E(x-y)$ este netedă. □

Corolarul 1. (Formula de medie pentru funcţii armonice). *Fie $u \in C^2(\Omega)$ o funcţie armonică şi $x \in \Omega$, $r > 0$ astfel încât $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$. Atunci*

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\,d\sigma(y)\,.$$

Demonstraţie. Aplicând teorema Green-Riemann, prima formulă lui Green şi ţinând cont apoi că u este o funcţie armonică, avem (dacă $N \geq 3$)

$$\begin{aligned} u(x) = \quad & \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\,d\sigma(y) + \frac{1}{(N-2)\omega_N r^{N-2}} \int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\,d\sigma(y) = \\ & \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\,d\sigma(y) + \frac{1}{(N-2)\omega_N r^{N-2}} \int_{B(x,r)} \Delta u(y)\,dy = \\ & \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\,d\sigma(y) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\,d\sigma(y)\,, \end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstraţia. □

Am văzut că soluţia fundamentală a ecuaţiei lui Laplace este o funcţie netedă cu excepţia originii, care constituie o singularitate pentru această funcţie. Fie φ o funcţie netedă arbitrară cu suportul compact. Intrucât

$$\Delta E(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}\,,$$

am fi tentaţi să facem următorul “calcul” (*via* formula lui Green şi reducând integralele pe $\mathbb{R}^N$ la integrale pe o bilă suficient de mare):

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Delta\varphi(x)E(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \Delta E(x)\varphi(x)\,dx = 0\,,$$

căci $\Delta E = 0$, cu excepţia unui singur punct. Lăsăm cititorul să găsească greşeala făcută mai sus şi prezentăm în continuare varianta corectă:

Corolarul 2. *Fie* $\varphi \in C_c^2(\mathbb{R}^N)$*. Atunci*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Delta\varphi(x)E(x)\,dx = \varphi(0)\,. \tag{3.27}$$

Demonstraţia rezultă prin simpla aplicare a teoremei Green-Riemann pentru funcţia φ şi prin integrare pe o bilă suficient de mare centrată în origină.

Rezultatul exprimat în egalitatea (3.27) se exprimă în limbajul teoriei distribuţiilor prin

$$\Delta E = \delta_0 \qquad \text{în } \mathbb{R}^N\,, \tag{3.28}$$

unde δ_0 semnifică măsura (distribuţia) lui Dirac concentrată în origine.

3.5 Analiticitatea funcţiilor armonice

Definiţia 4. *O funcţie* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *se numeşte analitică dacă pentru orice compact* K *conţinut în* Ω *există* $C_K > 0$ *astfel încât*

$$\frac{1}{\alpha!}\,|D^\alpha u(x)| \le C_K^{|\alpha|+1}\,,$$

pentru orice $x \in K$ *şi pentru orice multi-indice* α*.*

In mod echivalent, această definiţie poate fi exprimată prin posibilitatea dezvoltării lui u în serie de puteri, în jurul oricărui punct:

$$u(x) = \sum_\alpha \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!}\,(x - x_0)^\alpha\,,$$

pentru orice x_0 şi pentru orice x într-o vecinătate a lui x_0.

Din definiţie, cât şi din observaţia de mai sus, rezultă că funcţiile elementare sunt analitice în domeniul lor de definiţie. In particular, soluţia fundamentală E a ecuaţiei lui Laplace este o funcţie analitică în $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$.

Teorema 5. *Fie $u : \Omega \to \mathbb{R}$ o funcţie armonică. Atunci u este funcţie analitică în Ω.*

Demonstraţie. Fixăm $x_0 \in \Omega$ şi fie

$$U := \{x \in \Omega \, ; \; |x - x_0| < r\} \, .$$

Putem presupune că $U \subset \Omega$. Fixăm un compact $U \subset K \subset \Omega$ şi considerăm $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ astfel încât $\operatorname{supp} \varphi = K$ şi $\varphi \equiv 1$ în

$$U_\varepsilon := \{x \in \Omega \, ; \; \operatorname{dist}(x, \overline{U}) \le \varepsilon\} \, .$$

Avem

$$\Delta(\varphi u) = \varphi \, \Delta u + u \, \Delta \varphi + 2 \, \nabla u \cdot \nabla \varphi \qquad \text{în } \Omega \, .$$

Aşadar, deoarece u este funcţie armonică,

$$\Delta(\varphi u) = g := u \, \Delta \varphi + 2 \, \nabla u \cdot \nabla \varphi \qquad \text{în } \Omega \, .$$

Pe de altă parte, întrucât $\varphi u = 0$ în $\Omega \setminus K$, teorema Green-Riemann implică

$$(\varphi u)(x) = \int_\Omega g(y) E(x - y) \, dy \qquad \forall x \in \Omega \, .$$

Dar $g = 0$ şi $\varphi = 1$ în U_ε. Deci

$$u(x) = \int_{\Omega \setminus U_\varepsilon} g(y) E(x - y) \, dy \qquad \forall x \in U \, .$$

Cum E este analitică în $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ rezultă că u este analitică pe U, deci în Ω.
□

Folosind faptul că o funcţie armonică este indefinit derivabilă şi aplicând formula de medie pentru funcţii armonice vom demonstra

Teorema 6. (Teorema lui Liouville.) *Fie $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ o funcţie armonică mărginită inferior. Atunci u este constantă.*

Demonstraţie. Fără a micşora cu nimic generalitatea, putem presupune $u \geq 0$. Fie $x \in \mathbb{R}^N$ un punct arbitrar. Deoarece u este armonică, rezultă că u_{x_i} este, de asemenea, o funcţie armonică, pentru orice $i = 1, \cdots, N$. Aplicând formula de medie şi teorema divergenţei avem

$$\begin{aligned} |u_{x_i}(x)| = & \frac{N}{\omega_N r^N} \left| \int_{B(x,r)} u_{x_i}(y)\,dy \right| = \frac{N}{\omega_N r^N} \left| \int_{\partial B(x,r)} u\nu_i\,d\sigma \right| \leq \\ & \frac{N}{\omega_N r^N} \int_{\partial B(x,r)} |u|\,d\sigma = \frac{N}{r}\,u(x)\,, \end{aligned}$$

pentru orice $r > 0$. Rezultă de aici că $u_{x_i}(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^N$ şi oricare ar fi $i = 1, \cdots, N$, adică u este constantă. □

Exerciţii.

1. Fie $u : \Omega \to \mathbb{R}$ o funcţie armonică şi $\omega \subset\subset \Omega$. Arătaţi că

$$\sup_{\omega} |\nabla u| \leq \frac{N}{d} \sup_{\Omega} |u|\,,$$

unde $d = \mathrm{dist}\,(\omega, \partial\Omega)$.

Soluţie. Deoarece u este armonică, rezultă că $\Delta\nabla u = 0$ în Ω. Aplicând formula de medie funcţiei armonice ∇u avem, pentru $r < d$ şi $x \in \omega$,

$$\begin{aligned} |\nabla u(x)| = & \frac{N}{\omega_N r^N} \left| \int_{B(x,r)} \nabla u(y)\,dy \right| = \\ & \frac{N}{\omega_N r^N} \left| \int_{\partial B(x,r)} u\nu \right| \leq \frac{N}{\omega_N r^N}\,\omega_N r^{N-1} \sup_{\Omega} |u| = \frac{N}{r} \sup_{\Omega} |u|\,. \end{aligned}$$

2. Folosind exerciţiul de mai sus arătaţi că dacă $u : \Omega \to \mathbb{R}$ este o funcţie armonică şi r este un număr pozitiv astfel încât $B_{2r}(x_0) \subset\subset \Omega$ atunci există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y|^{\alpha}\,(2r)^{1-\alpha}\,\frac{N}{r} \sup_{B_{2r}(x_0)} |u| \qquad \forall x, y \in B_r(x_0)\,.$$

3. Fie $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ o funcţie armonică cu proprietatea

$$\inf_{|x|<R} u(x) \geq -M(R)\,,$$

cu

$$\lim_{R\to\infty} \frac{M(R)}{R} = 0 \,.$$

Demonstraţi că u este constantă.

Ind. Pentru $y \in \mathbb{R}^N$ fixat, fie $R > |y|$. Se consideră apoi aplicaţia $u(x) + M(R)$ definită pe $B_d(y)$, unde $d = R - |y|$.

3.6 Funcţia lui Green

Vom găsi în continuare o formulă pentru rezolvarea problemei

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{în } \Omega \\ u = g & \text{pe } \partial\Omega \,, \end{cases} \tag{3.29}$$

unde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ este o mulţime deschisă cu frontiera de clasă C^1 pe porţiuni, iar $f \in C(\overline{\Omega})$, $g \in C(\partial\Omega)$ sunt funcţii date.

Aplicând formula Green-Riemann (3.19) avem

$$u(x) = \int_\Omega \Delta u(y) E(x-y)\, dy - \int_{\partial\Omega} E(x-y)\, \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y)\, d\sigma(y) + \int_{\partial\Omega} u(y)\, \frac{\partial E(x-y)}{\partial \nu_y}\, d\sigma(y) \,, \tag{3.30}$$

pentru orice $x \in \Omega$.

Pentru $x \in \Omega$ fixat, fie $\varphi_x(y)$ soluţia problemei

$$\begin{cases} \Delta \varphi_x(y) = 0 & y \in \Omega \\ \varphi_x(y) = E(x-y) & y \in \partial\Omega \,. \end{cases} \tag{3.31}$$

Prin înmulţire în (3.31) cu u şi integrare prin părţi obţinem

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Delta u(y) \varphi_x(y)\, dy = & \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \varphi_x(y)\, d\sigma(y) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi_x}{\partial \nu}(y)\, u(y)\, d\sigma(y) = \\ & \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) E(x-y)\, d\sigma(y) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi_x}{\partial \nu}(y)\, u(y)\, d\sigma(y) \,. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Prin adunarea relaţiilor (3.30) şi (3.32) obţinem

$$u(x) = \int_\Omega \Delta u(y) \left(E(x-y) - \varphi_x(y) \right)\, dy + \int_{\partial\Omega} u(y)\, \frac{\partial \left(E(x-y) - \varphi_x(y) \right)}{\partial \nu}\, d\sigma(y) \,. \tag{3.33}$$

Fie $G(x, y) := \varphi_x(y) - E(x - y)$. Relaţia (3.33) devine

$$u(x) = -\int_\Omega G(x, y) f(y)\, dy - \int_{\partial\Omega} g(y)\, \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y)\, d\sigma(y)\,. \tag{3.34}$$

Funcţia G definită mai sus se numeşte **funcţia lui Green pentru problema Dirichlet**. Ţinând cont de modul cum a fost definită funcţia φ_x precum şi de (3.28) rezultă că

$$\begin{cases} -\Delta_y G(x, y) = \delta_x & \forall y \in \Omega \\ G(x, y) = 0 & \forall y \in \partial\Omega\,. \end{cases}$$

De aici rezultă următoarea interpretare fizică (în $\mathbb{R}^3$) a funcţiei lui Green: funcţia $G(x, y)$ reprezintă potenţialul coulombian generat în domeniul mărginit de suprafaţa conductoare $\partial\Omega$, pusă la pământ, de sarcina $\frac{1}{4\pi}$ $(= \frac{1}{(N-2)\,\omega_N})$ aflată în punctul $y \in \partial\Omega$.

Teorema 7. (Simetria funcţiei lui Green.) *Dacă $x,\ y \in \Omega$, $x \neq y$ atunci $G(x, y) = G(y, x)$.*

Demonstraţie. Fie $v(z) = G(x, z)$, $w(z) = G(y, z)$, $z \in \Omega$. Avem

$$\begin{cases} \Delta v(z) = 0 & \forall z \neq x \\ \Delta w(z) = 0 & \forall z \neq y \\ v(z) = w(z) = 0 & \forall z \in \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{3.35}$$

Fie $\varepsilon > 0$ suficient de mic. Aplicând formula lui Green în domeniul $\Omega \setminus (B(x, \varepsilon) \cup B(y, \varepsilon))$ avem

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \left(\frac{\partial v}{\partial \nu} w - \frac{\partial w}{\partial \nu} v \right) d\sigma = \int_{\partial B(y,\varepsilon)} \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} v - \frac{\partial v}{\partial \nu} w \right) d\sigma\,, \tag{3.36}$$

unde ν semnifică normala **interioară** pe $\partial B(x, \varepsilon) \cup \partial B(y, \varepsilon)$. Intrucât w este funcţie netedă în vecinătatea lui x avem

$$\left| \int_{\partial B(x,\varepsilon)} v \frac{\partial w}{\partial \nu}\, d\sigma \right| \leq C\, \varepsilon^{N-1} \sup_{\partial B(x,\varepsilon)} |v| \to 0 \quad \text{dacă } \varepsilon \to 0\,. \tag{3.37}$$

Dar $v(z) = \varphi_x(z) - E(x - z)$. Deci

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B(x,\varepsilon)} w\frac{\partial v}{\partial \nu}\,d\sigma = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial E}{\partial \nu_z}(x-z)w(z)\,d\sigma(z) = \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_N\varepsilon^{N-1}}\int_{\partial B(x,\varepsilon)} w(z)\,d\sigma(z) = -w(x)\,. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Un argument similar pentru funcţia v într-o vecinătate a lui y conduce la

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B(y,\varepsilon)} v\frac{\partial w}{\partial \nu}\,d\sigma = -v(y) \tag{3.39}$$

şi

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B(y,\varepsilon)} w\frac{\partial v}{\partial \nu}\,d\sigma = 0\,. \tag{3.40}$$

Din (3.36), (3.37), (3.38), (3.39) şi (3.40) obţinem

$$G(x,y) = v(y) = w(x) = G(y,x)\,.$$

□

3.6.1 Funcţia lui Green pentru bilă

Fixăm $R > 0$ şi ne propunem să găsim expresia funcţiei lui Green pentru bila $B_R(0)$. Pentru orice $x \in B_R(0) \setminus \{0\}$ vom nota cu $x^\star$ imaginea sa prin inversiunea de pol originea şi modul R^2, adică

$$x^\star = \frac{R^2}{\|x\|^2}\,x \qquad \forall x \in B_R(0) \setminus \{0\}\,.$$

Căutăm funcţia lui Green sub forma

$$G(x,y) = \alpha E(x^\star - y) - E(x - y), \qquad \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

Din $G(x,y) = \varphi_x(y) - E(x - y)$ rezultă

$$G(x,y) = 0 \qquad \forall x \in B_R(0)\,,\ \forall y \in \partial B_R(0)\,. \tag{3.41}$$

Fixăm $x \in B_R(0)$, $x \neq 0$ şi $y \in \partial B_R(0)$. Din asemănarea triunghiurilor xOy şi $x^\star Oy$ rezultă

$$\frac{|x|}{R} = \frac{R}{|x^\star|} = \frac{|x-y|}{|x^\star - y|}\,.$$

Aşadar (dacă $N \geq 3$)

$$
\begin{aligned}
G(x,y) = \quad & \frac{1}{(2-N)\omega_N}\left(\frac{\alpha}{|x^\star - y|^{N-2}} - \frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right) = \\
& \frac{1}{(2-N)\omega_N}\left(\frac{\alpha |x|^{N-2}}{R^{N-2}|x-y|^{N-2}} - \frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right) = \\
& \frac{\alpha |x|^{N-2} - R^{N-2}}{(2-N)\omega_N R^{N-2}|x-y|^{N-2}} \,.
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

Din (3.41) şi (3.42) rezultă că

$$
\alpha = \frac{R^{N-2}}{|x|^{N-2}} \qquad x \neq 0\,.
$$

Pentru $x = 0$, soluţia problemei

$$
\begin{cases}
\Delta \varphi_0(y) = 0 & y \in B_R(0) \\
\varphi_0(y) = E(y) \left(= \dfrac{1}{(2-N)\omega_N R^{N-2}} \right) & y \in \partial B_R(0)
\end{cases}
$$

este $\varphi_0(y) = \frac{1}{(2-N)\omega_N R^{N-2}}$.

In concluzie, funcţia lui Green pentru problema Dirichlet este dată în cazul bilei de expresia

$$
G(x,y) = \begin{cases}
R^{N-2}|x|^{2-N} E(x^\star - y) - E(x-y) & \text{dacă } x \in B_R(0) \setminus \{0\} \\
\dfrac{1}{(2-N)\omega_N R^{N-2}} - E(y) & \text{dacă } x = 0\,.
\end{cases}
\tag{3.43}
$$

Se observă de aici cu uşurinţă că

$$
G(x,y) = G(y,x) \quad \text{şi} \quad G(x,y) > 0 \qquad \forall x, y \in B_R(0)\,.
$$

3.7 Formula lui Poisson

Vom deduce în continuare, folosind expresia explicită a funcţiei lui Green în cazul bilei, soluţia problemei

$$
\begin{cases}
\Delta u = 0 & \text{în } B_R(0) \\
u = g & \text{pe } \partial B_R(0)\,.
\end{cases}
\tag{3.44}
$$

Teorema 8. *Fie $g \in C(\partial B_R)$. Atunci funcţia*

$$u(x) := \begin{cases} \dfrac{R^2 - |x|^2}{R\omega_N} \displaystyle\int_{\partial B_R} \dfrac{g(y)}{|x-y|^N}\, d\sigma(y) & \forall x \in B_R \\ g(x) & \forall x \in \partial B_R \end{cases} \tag{3.45}$$

satisface $u \in C^2(B_R) \cap C(\overline{B_R})$ şi verifică (3.44).

Demonstraţie. Din (3.43) şi din

$$\nabla_y E(x-y) = \frac{1}{\omega_N} \frac{y-x}{|y-x|^N}$$

obţinem, pentru orice $x \in B_R(0)$ şi orice $y \in \partial B_R(0)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y) := \;& \frac{1}{R}\,(\nabla_y G(x,y), y) = \\ & R^{N-3}|x|^{2-N}\, \frac{(y-x^\star, y)}{\omega_N |x^\star - y|^N} - \frac{(y-x,y)}{R\omega_N |x-y|^N} = \\ & R^{N-3}|x|^{2-N}\, \frac{\left(y - \frac{R^2 x}{x^2}, y\right)}{\omega_N R^N |x-y|^N}\, |x|^N - \frac{(y-x,y)}{R\omega_N|x-y|^N} = \\ & \frac{(R^{-2}|x|^2 y - x - y + x, y)}{R\omega_N |x-y|^N} = \frac{|x|^2 - R^2}{R\omega_N |x-y|^N}\,. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Dar, conform formulei lui Green,

$$u(x) = -\int_{\partial B_R} g(y)\, \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y)\, d\sigma(y)\,. \tag{3.47}$$

Din (3.46) şi (3.47) obţinem că soluţia problemei (3.44) este dată de

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_N} \int_{\partial B_R} \frac{g(y)}{|x-y|^N}\, d\sigma(y) \qquad \forall x \in B_R\,. \tag{3.48}$$

Reciproc, fie $g \in C(\partial B_R)$. Vom demonstra că funcţia u definită prin relaţia (3.45) satisface $u \in C^2(B_R) \cap C(\overline{B_R})$ şi verifică (3.44). Faptul că $u \in C^2(B_R)$ este evident, ţinând cont de expresia lui u. Pe de altă parte, din $\Delta_x G(x,y) = 0$ rezultă că

$$\Delta u(x) = 0 \qquad \forall x \in B_R\,.$$

Arătăm în continuare că u este continuă pe ∂B_R. Fie $x_0 \in \partial B_R$ şi $\varepsilon > 0$. Din continuitatea lui g rezultă că există $\delta > 0$ astfel încât

$$|g(y) - g(x_0)| \le \varepsilon \qquad \forall y \in \partial B_R\,,\ |y - x_0| \le \delta\,.$$

Notăm prin

$$K(x,y) := \frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_N |x-y|^N}$$

nucleul lui Poisson. Rezultă că

$$\begin{aligned}
&|u(x) - u(x_0)| \le \int_{\partial B_R} K(x,y)\, |g(y) - g(x_0)|\, d\sigma(y) \le \\
&\int_{|y-x_0|\le\delta;\, y\in\partial B_R} K(x,y)\, |g(y) - g(x_0)|\, d\sigma(y) + \\
&\int_{|y-x_0|>\delta:\, y\in\partial B_R} K(x,y)\, |g(y) - g(x_0)|\, d\sigma(y) \le \\
&\varepsilon + \frac{2\|g\|_{L^\infty}\,(R^2 - |x|^2)}{(\delta/2)^N}\, R^{N-2} \le 2\varepsilon\,,
\end{aligned}$$

dacă $|x - x_0| \le \min\{\delta/2;\ (\delta/2)^N\, \varepsilon/(4\|g\|_{L^\infty} R^{N-1})\}$. □

Folosind formula lui Poisson putem deduce cu uşurinţă reciproca teoremei de medie pentru funcţii armonice.

Corolarul 3. *Fie $u : \Omega \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât pentru orice $x \in \Omega$ există $r(x) > 0$ cu proprietatea că*

$$u(x) = \oint_{\partial B(x,R)} u(y)\, d\sigma(y) \qquad \forall R < r(x) \ \text{cu}\ \overline{B(x,R)} \subset \Omega\,. \tag{3.49}$$

Atunci u este o funcţie armonică în Ω.

Demonstraţie. E suficient să arătăm că u este armonică în orice bilă conţinută în Ω. Fie aşadar $B = B(x,R) \subset\subset \Omega$. Conform formulei lui Poisson, există o funcţie v care este armonică în B şi astfel încât $v = u$ pe ∂B. Mai precis,

$$v(y) = \begin{cases} \dfrac{R^2 - |y-x|^2}{R\omega_N} \displaystyle\int_{\partial B} \frac{u(z)}{|z-y|^N}\, d\sigma(z) & \text{dacă } y \in B \\ u(y) & \text{dacă } y \in \partial B\,. \end{cases}$$

Din ipoteză şi din faptul că v este o funcţie armonică (deci este valabilă **directa** teoremei de medie) rezultă că

$$\sup_B (v-u) = \inf_B (v-u) = 0\,,$$

adică $v = u$ în B. Prin urmare, u este o funcţie armonică în B, ceea ce încheie demonstraţia. $\square$

Suntem acum în măsură să deducem următoarea proprietate interesantă a funcţiilor armonice.

Corolarul 4. *Fie $u_n : \Omega \to \mathbb{R}$ un şir de funcţii armonice cu proprietatea că este uniform convergent pe orice mulţime compactă conţinută în Ω către o funcţie u. Atunci u este o funcţie armonică.*

Demonstraţie. Conform rezultatului precedent e suficient să arătăm că pentru orice $x \in \Omega$ este verificată relaţia (3.49). Dar u_n este o funcţie armonică, pentru orice $n \geq 1$. Deci

$$u_n(x) = \oint_{\partial B(x,R)} u_n(y)\, d\sigma(y) \qquad \forall R < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)\,. \tag{3.50}$$

Trecând la limită în (3.50) cu $n \to \infty$ obţinem (3.49). $\square$

Exerciţii.

1. Fie $N \geq 3$. Arătaţi că

$$\int_{|y|=R} \frac{d\sigma(y)}{|x-y|^N} = \begin{cases} \dfrac{R\omega_N}{R^2 - |x|^2} & \text{dacă } |x| < R \\ \dfrac{R^{N-1}\omega_N}{|x|^{N-2}(|x|^2 - R^2)} & \text{dacă } |x| > R\,. \end{cases}$$

Cercetaţi problema similară pentru $N = 2$.

2. Rezolvaţi ecuaţia lui Poisson $-\Delta u = a$, $a \in \mathbb{R}$, în discul de rază R, cu condiţia pe frontieră $\partial u/\partial\nu_{|r=R} = b$, alegând b astfel încât problema să aibă soluţie.

R. Soluţia există dacă $aR + 2b = 0$ şi este determinată până la o constantă aditivă: $u(r) = -ar^2/4 + \text{Const.}$

3.8 Metoda separării variabilelor. Aplicaţie la deducerea formulei lui Poisson în $\mathbb{R}^2$

Ilustrăm în cele ce urmează metoda lui Fourier de separare a variabilelor pentru a deduce formula lui Poisson în dimensiune 2.

Fie $R > 0$ şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Ne propunem să găsim o funcţie $u = u(r, \theta) \in C^2(B(0,R)) \cap C(\partial B(0,R))$ care verifică

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \qquad \text{în } B(0,R) \subset \mathbb{R}^2 \\ u(R,\theta) = f(\theta)\,. \end{cases} \tag{3.51}$$

Căutăm funcţia u sub forma $u(r,\theta) = A(r)B(\theta)$. Reamintim că formula laplacianului în coordonate polare este

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r^2}\, u_{\theta\theta} + \frac{1}{r}\, u_r\,.$$

Introducând în (3.51) obţinem

$$A''B + \frac{1}{r}\, A'B + \frac{1}{r^2}\, AB'' = 0\,.$$

Impărţind prin AB şi înmulţind apoi cu r^2 găsim

$$r^2 \frac{A''}{A} + r\frac{A'}{A} = -\frac{B''}{B}\,.$$

In membrul stâng avem o funcţie care depinde doar de r iar în cel drept o funcţie ce depinde de θ. Acest lucru este posibil numai dacă fiecare funcţie se reduce la o constantă. Deci există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$r^2 A'' + rA' - \lambda A = 0 \tag{3.52}$$

şi

$$B'' + \lambda B = 0\,. \tag{3.53}$$

In plus, B este o funcţie periodică de perioadă 2π, adică

$$B(\theta) = B(\theta + 2\pi) \qquad \forall \theta \in [0, 2\pi)\,. \tag{3.54}$$

Din (3.53) şi (3.54) rezultă $\lambda \geq 0$ şi

$$B(\theta) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}\, \theta + C_2 \sin \sqrt{\lambda}\, \theta\, .$$

Folosind condiţia de periodicitate (3.54) obţinem $\lambda = n^2$ $(n \geq 0)$ deci

$$B_n(\theta) = C_n \cos n\, \theta + D_n \sin n\, \theta \qquad \forall n \geq 0\, . \tag{3.55}$$

Introducem acum valoarea $\lambda = n^2$ în (3.52) şi căutăm soluţiile sub forma $A(r) = r^\alpha$. Găsim

$$\alpha(\alpha - 1) r^\alpha + \alpha r^\alpha - n^2 r^\alpha = 0\, ,$$

care implică $\alpha = \pm n$. Deci

$$A_n(\theta) = C_1 r^n + C_2 r^{-n} \qquad n \geq 1\, .$$

De aici deducem $C_2 = 0$, pentru a evita singularitatea ce ar apărea în origine. Deci

$$A_n(\theta) = A_n r^n \qquad \forall n \geq 1\, . \tag{3.56}$$

Din (3.55) şi (3.56) găsim

$$u_n(r, \theta) = r^n (C_n \cos n\, \theta + D_n \sin n\, \theta)\, ,$$

adică

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2}\, C_0 + \sum_{n \geq 1} r^n (C_n \cos n\, \theta + D_n \sin n\, \theta)\, . \tag{3.57}$$

Ne propunem în continuare să găsim constantele C_n şi D_n, folosind condiţia pe frontieră din (3.51). Ideea este următoarea: punem $r = R$ în (3.57), înmulţim apoi cu $\cos j\theta$ şi integrăm pe $[0, 2\pi]$. Găsim astfel

$$C_j = \frac{1}{\pi R^j} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos j\varphi \, d\varphi \qquad \forall j \geq 0\, .$$

Inmulţind apoi cu $\sin j\theta$ şi integrând pe $[0, 2\pi]$ obţinem

$$D_j = \frac{1}{\pi R^j} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin j\varphi \, d\varphi \qquad \forall j \geq 1\, .$$

Exerciţii.

1. Rezolvaţi ecuaţia $\Delta u = 0$ în $\Omega := (0,a) \times (0,b)$ în raport cu următoarele condiţii la limită, folosind metoda separării variabilelor:

(i) $u(0,y) = u(a,y) = u(x,b) = 0$, $x \in (0,a)$, $y \in (0,b)$.

(ii) $u(0,y) = u(a,y) = 0$, $u(x,0) = u(x,b) = 2x(x-a)$, $x \in (0,a)$, $y \in (0,b)$.

(iii) $u(x,0) = u(x,b) = x(x-a)$, $u(0,y) = u(a,y) = \sin\dfrac{\pi y}{b}$, $x \in (0,a)$, $y \in (0,b)$.

2. Presupunem că u este o funcţie armonică în $\mathbb{R}^N$ şi că $u(x) = u_1(x_1) \cdots u_N(x_N)$. Arătaţi că $u_i'' - \lambda_i u_i = 0$ ($\lambda_i =$ Const., $i = 1, \cdots, N$) şi, în plus, $\lambda_1 + \cdots + \lambda_N = 0$.

3. Găsiţi o funcţie armonică în regiunea $|x| > 1$ care să verifice condiţia $u(1,\theta) = f(\theta)$.

4. Găsiţi o soluţie netrivială a ecuaţiei omogene $\Delta u = 0$ dacă $x^2 + y^2 < 1$, cu condiţiile la limită $u + \partial u/\partial \nu = 0$ pentru $x^2 + y^2 = 1$.

5. Rezolvaţi problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{în } (0,a) \times (0,b) \\ u(x,0) = u(x,b) = u(a,y) = 0 & \text{pentru } x \in [0,a] \text{ şi } y \in (0,b) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) + \lambda u(0,y) = g(y) & \text{dacă } y \in (0,b)\,, \end{cases}$$

unde g este continuă şi λ este un număr real.

6. Fie $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ y^2 < 1\}$. Arătaţi că problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{în } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega \end{cases}$$

are o unică soluţie $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ şi calculaţi apoi u.

7. Găsiţi soluţia problemei

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{în } B_1(0) \subset \mathbb{R}^N \\ u = 0 & \text{pe } \partial B_1(0)\,. \end{cases}$$

8. Fie $0 < \varepsilon < 1$ şi $\Omega_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^N ;\ \varepsilon < |x| < 1\}$. Găsiţi soluţia problemei

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{în } \Omega_\varepsilon \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega_\varepsilon \end{cases}$$

şi examinaţi apoi comportamentul acestei soluţii când $\varepsilon \to 0$.

3.9 Inegalitatea lui Harnack

Rezultatul următor arată că raportul dintre valorile extreme ale funcţiilor armonice pozitive se încadrează între anumite limite. Altfel spus, valoarea maximă a unei asemenea funcţii nu poate depăşi o anumită limită, care depinde de minimul său. Cu alte cuvinte, o funcţie armonică pozitivă nu poate lua într-un anume domeniu atât valori foarte mari cât şi valori foarte apropiate de zero.

Demonstrăm mai întâi inegalitatea lui Harnack în cazul discului, acest rezultat fiind o consecinţă directă a formulei lui Poisson şi a formulei de medie pentru funcţii armonice.

Teorema 9. *Fie $B_R \subset \mathbb{R}^N$ discul deschis de rază R centrat în origină şi $u \in C^2(B_R) \cap C(\overline{B_R})$ o funcţie armonică nenegativă. Atunci*

$$\frac{R^{N-2}(R-|x|)}{(R+|x|)^{N-1}}\, u(0) \le u(x) \le \frac{R^{N-2}(R+|x|)}{(R-|x|)^{N-1}}\, u(0)\,, \tag{3.58}$$

pentru orice $x \in B_R$.

Demonstraţie. Aplicând formula lui Poisson şi utilizând inegalitatea $|y-x| \ge |y| - |x|$ precum şi ipoteza $u \ge 0$, obţinem

$$\begin{aligned} u(x) = \;& \frac{R^2-|x|^2}{R\omega_N}\int_{|y|=R}\frac{u(y)}{|y-x|^N}d\sigma(y) \le \frac{R^2-|x|^2}{R\omega_N}\int_{|y|=R}\frac{u(y)}{(|y|-|x|)^N}d\sigma(y) = \\ & \frac{R^2-|x|^2}{R\omega_N(R-|x|)^N}\int_{|y|=R}u(y)d\sigma(y) = \frac{R+|x|}{R\omega_N(R-|x|)^{N-1}}\int_{|y|=R}u(y)d\sigma(y)\,. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Aplicând acum formula de medie funcţiei armonice u, inegalitatea de mai sus conduce la

$$u(x) \le \frac{R+|x|}{R\omega_N(R-|x|)^{N-1}}\,\omega_N R^{N-1}u(0) = \frac{R^{N-2}(R+|x|)}{(R-|x|)^{N-1}}\,u(0)\,.$$

Cealaltă inegalitate din (3.58) se demonstrează asemănător, utilizând de această dată inegalitatea $|y - x| \leq |y| + |x|$. □

Rezultatul de mai sus permite regăsirea teoremei lui Liouville (Teorema 8). Intr-adevăr, să presupunem că $u : \mathbb{R}^N \to [0, \infty)$ este o funcţie armonică. Fixând arbitrar $x \in \mathbb{R}^N$ şi trecând la limită cu $R \to \infty$ în (3.59), obţinem $u(x) = u(0)$, adică u este constantă în $\mathbb{R}^N$.

Teorema 10. *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un deschis arbitrar şi $\omega \subset\subset \Omega$ o mulţime deschisă, mărginită şi conexă. Atunci există o constantă $C = C(\omega)$ astfel încât*

$$\sup_\omega u \leq C \inf_\omega u\,,$$

pentru orice funcţie armonică $u : \Omega \to \mathbb{R}$ care satisface $u \geq 0$ în Ω.

Teorema lui Harnack implică

$$\frac{1}{C}\, u(y) \leq u(x) \leq C\, u(y) \qquad \forall x, y \in \omega\,.$$

Aşadar, valorile unei funcţii armonice ne-negative pe ω sunt comparabile, în sensul că u nu poate fi foarte mică (sau foarte mare) într-un punct decât dacă ea este foarte mică (sau foarte mare) în **toate** punctele.

Demonstraţie. Fixăm $r < \frac{1}{2}\,\mathrm{dist}\,(\omega, \partial\Omega)$ şi fie x, $y \in \omega$ astfel încât $|x - y| \leq r$. Aplicând formula de medie pentru funcţii armonice avem

$$u(x) = \fint_{B(x,2r)} u(z)\,dz \geq \frac{N}{\omega_N 2^N r^N} \int_{B(y,r)} u(z)\,dz = \frac{1}{2^N} \fint_{B(y,r)} u(z)\,dz = \frac{1}{2^N} u(y)\,.$$

Rezultă că

$$2^N\, u(y) \geq u(x) \geq \frac{1}{2^N}\, u(y) \qquad \forall x, y \in \omega\,,\ |x - y| \leq r\,. \tag{3.60}$$

Cum mulţimea $\overline{\omega}$ este compactă, ea se poate acoperi cu un număr finit de bile B_i de rază r şi, în plus, B_i şi B_{i+1} sunt disjuncte. Cu alte cuvinte, există p bile B_i de rază r (p depinde doar de ω) astfel încât

$$\overline{\omega} \subset \bigcup_{i=1}^{p} B_i(r) \quad \text{şi} \quad B_i \cap B_{i+1} = \emptyset \quad \forall i = 1, \cdots, p-1\,.$$

Repetând de p ori argumentul făcut în cazul unei singure bile şi ţinând cont de (3.60) obţinem

$$u(x) \geq \frac{1}{2^{Np}}\, u(y) \qquad \forall x, y \in \omega\,,$$

ceea ce încheie demonstraţia. $\square$

Importante progrese în direcţia extinderii teoremei lui Harnack şi a principiilor de maxim au fost făcute de către DeGiorgi [16], Serrin [60] şi Stampacchia [67]. Ei au arătat că aceste rezultate rămân valabile dacă se înlocuieşte operatorul lui Laplace cu operatori de tipul

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{N} a_i\,\frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u\,,$$

unde $a_0 \leq 0$, iar coeficienţii $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ satisfac condiţia de uniform elipticitate

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha\,\|\xi\|^2 \qquad \forall \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N,\ \alpha > 0,\ \text{a.p.t. } x \in \Omega.$$

Amintim în această direcţie că Serrin demonstrează în [60], utilizând principiul de maxim, o inegalitate de tip Harnack pentru ecuaţii uniform eliptice în două variabile. Mai precis, dacă

$$Lu = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}$$

este un operator uniform eliptic în bila $B_R \subset \mathbb{R}^2$ iar $u \in C^2(B_R)$ este o soluţie nenegativă a ecuaţiei $Lu = 0$ în B_R, atunci există o constantă $C = C(R, L)$ astfel încât

$$\frac{1}{C}\, u(0) \leq u(z) \leq C\, u(0) \qquad \forall z = (x, y) \in B_{R/4}.$$

Cu un argument similar celui folosit la începutul acestui paragraf se poate deduce o teoremă de tip Liouville pentru operatorul L definit mai sus. Inegalitatea lui Harnack demonstrată de Serrin cât şi varianta corespunzătoare a teoremei lui Liouville sunt legate de teorema lui Bernstein [32] pe suprafeţe de curbură negativă sau nulă, care implică faptul că orice soluţie a problemei uniform eliptice

$$\begin{cases} au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = 0 & \text{în } \mathbb{R}^2 \\ \lim\limits_{|z|\to\infty} \dfrac{u(z)}{|z|} = 0 & z = (x, y) \end{cases}$$

trebuie să fie constantă. Rezultatul lui Bernstein este bazat tot pe principiul de maxim dar argumentul să este diferit şi de natură geometrică.

Exerciţii.

1. Arătaţi că orice şir crescător de funcţii armonice $u_n : \Omega \to \mathbb{R}$ converge, sau către $+\infty$ (uniform pe orice compact conţinut în Ω), sau către o funcţie armonică în Ω.

2. Arătaţi că dacă $|\Delta u| \leq M$ şi $u \geq 0$ în discul $x^2 + y^2 < R^2$ atunci

$$\frac{R-r}{R+r} \left(u(0,0) - \frac{1}{4}\, M\, \left(R^2 + (R+r)^2\right) \right) \leq u(x,y) \leq$$
$$\frac{R+r}{R-r} \left(u(0,0) + \frac{1}{4}\, M\, \left(R^2 + (R-r)^2\right) \right) \qquad \forall r := \sqrt{x^2+y^2} < R\,.$$

Sol. A demonstra a doua inegalitate revine la a arăta că

$$u(x,y) - \frac{M}{4}\,(R^2 - r^2) \leq \frac{R+r}{R-r} \left(u(0,0) + \frac{M}{4}\, R^2 \right).$$

Fie $w \in C^2(B_R) \cap C(\overline{B_R})$ funcţia armonică în B_R satisfăcând $w = u$ pe ∂B_R. Aplicând teorema 9 şi ţinând cont de faptul că $u(0,0) + \frac{M}{4}\, R^2 = w(0,0)$, observăm că este suficient să demonstrăm că

$$u(x,y) - \frac{M}{4}\,(R^2 - r^2) \leq w(x,y) \leq u(x,y) + \frac{M}{4}\,(R^2 - r^2).$$

Aceste inegalităţi sunt o consecinţă imediată a principiului de maxim.

3.10 Principii de maxim pentru funcţii subarmonice

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă şi conexă cu frontiera de clasă C^1 pe porţiuni. Dacă $u \in C^2(\Omega)$ are un maxim local într-un punct interior $x_0 \in \Omega$ atunci

$\nabla u(x_0) = 0$ şi $u_{x_i x_i}(x_0) \le 0$, pentru orice $i = 1, \cdots, N$. Rezultă $\Delta u(x_0) \le 0$. In concluzie, dacă $\Delta u > 0$ în Ω atunci u nu-şi poate atinge maximul în Ω decât dacă $u \equiv$ Const.

Definiţia 5. *O funcţie $u \in C^2(\Omega)$ se numeşte subarmonică (resp. superarmonică) dacă $-\Delta u \le 0$ (resp. $-\Delta u \ge 0$) în Ω.*

Teorema 11. (Principiul slab de maxim pentru funcţii subarmonice). *Fie $u \in C^2(\Omega)$ o funcţie subarmonică. Dacă există $x_0 \in \Omega$ astfel încât $u(x_0) = \sup_\Omega u$ atunci u este constantă.*

Demonstraţie. Fie $x_0 \in \Omega$ astfel încât $u(x_0) = M := \sup_\Omega$. Fixăm $R < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ şi fie $r \le R$. Aplicând teorema Green-Riemann şi prima formulă a lui Green avem

$$\begin{aligned} u(x_0) = \; & \frac{1}{(2-N)\omega_N} \int_{B(x_0,r)} \frac{\Delta u(y)}{|x_0 - y|^{N-2}}\, dy - \\ & \frac{1}{(2-N)\omega_N r^{N-2}} \int_{\partial B(x_0,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\, d\sigma(y) + \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x_0,r)} u(y)\, d\sigma(y) = \\ & \frac{1}{(2-N)\omega_N} \int_{B(x_0,r)} \frac{\Delta u(y)}{|x_0 - y|^{N-2}}\, dy + \\ & \frac{1}{(N-2)\omega_N r^{N-2}} \int_{B(x_0,r)} \Delta u(y)\, dy + \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x_0,r)} u(y)\, d\sigma(y) \le \\ & \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x_0,r)} u(y)\, d\sigma(y)\,, \end{aligned}$$

căci u este subarmonică. De aici rezultă că $u(x_0) = u(y)$, oricare ar fi $y \in \partial B(x_0, r)$. Cum r a fost ales în mod arbitrar, rezultă de aici că $u(x_0) = u(y)$, pentru orice $y \in B(x_0, R)$. Cu alte cuvinte, mulţimea nevidă

$$A := \{x \in \Omega\,;\; u(x) = M\}$$

este deschisă. Din continuitatea lui u, această mulţime este şi închisă. Aşadar, A este simultan închisă şi deschisă. Cum Ω este conexă, rezultă de aici că $A = \Omega$. $\square$

Din Teorema 11 rezultă imediat

Corolarul 5. *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă şi mărginită şi fie $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ o funcţie subarmonică. Atunci*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u\,.$$

Pentru acest rezultat putem da şi următoarea **demonstraţie alternativă**: evident avem

$$\max_{\overline{\Omega}} u \geq \max_{\partial\Omega} u\,. \tag{3.61}$$

Presupunem prin absurd că nu avem egalitate în (3.61). Deci există $x_0 \in \overline{\Omega}$ astfel încât

$$u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u > \max_{\partial\Omega} u\,. \tag{3.62}$$

Fie

$$v(x) = u(x) + \varepsilon\,|x - x_0|^2\,.$$

Din definiţia lui v şi din faptul că inegalitatea din (3.62) este strictă rezultă că putem alege $\varepsilon > 0$ suficient de mic astfel încât

$$v(x_0) = u(x_0) > \max_{\partial\Omega} v\,. \tag{3.63}$$

Deoarece

$$\max_{\overline{\Omega}} v \geq \max_{\overline{\Omega}} u$$

rezultă, folosind (3.63), că funcţia v îşi atinge maximul în $\overline{\Omega}$ într-un punct interior lui Ω, fie acesta x_1. Deci, în baza ipotezei că u este subarmonică,

$$\Delta v(x) = \Delta u(x) + 2\,\varepsilon\,N \geq 2\,\varepsilon\,N > 0 \qquad \forall x \in \Omega$$

şi

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(x_1) \leq 0 \qquad \forall i = 1, \cdots, N\,,$$

ceea ce constituie o contradicţie. □

Rezultatul următor constituie o altă variantă a principiului de maxim, pornind de la caracterizarea funcţiilor subarmonice, *via* formula de medie.

Propoziţia 1. *Fie* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă astfel încât pentru orice* $x \in \Omega$*, există* $r = r(x) > 0$ *cu proprietatea că*

$$u(x) \leq \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) d\sigma(y)\,,$$

pentru orice $r < r(x)$ *astfel încât* $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$*.*

Presupunem că există $x_0 \in \Omega$ *astfel încât* $u(x_0) = \sup_\Omega u$*. Atunci* u *este constantă.*

Demonstraţie. Fie

$$A := \{x \in \Omega\,;\; u(x) = u(x_0)\}\,.$$

Din ipoteză rezultă că A este nevidă. In plus, continuitatea lui u atrage că A este închisă. Faptul că A este deschisă rezultă cu aceleaşi argumente ca în demonstraţia teoremei 11. Prin urmare, $A = \Omega$. □

Propoziţia 2. *Fie* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *o mulţime deschisă şi conexă. Fie* $a : \Omega \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă,* $a \geq 0$ *şi* $u \in C^2(\Omega)$ *astfel încât*

$$-\Delta u(x) + a(x)u(x) \leq 0 \qquad \text{în } \Omega\,. \tag{3.64}$$

Presupunem că $\sup\limits_\Omega u > 0$ *şi* u *nu este constantă în* Ω*. Atunci funcţia* u *nu îşi atinge marginea superioară în interiorul lui* Ω*.*

Demonstraţie. Presupunem, prin reducere la absurd, că există $x_0 \in \Omega$ astfel încât

$$u(x_0) = M := \sup_\Omega u > 0\,.$$

In particular, există $R > 0$ astfel încât $u \geq 0$ în $B(x_0, R)$. Din ipoteză rezultă că $-\Delta u \leq 0$ în $B(x_0, R)$. Deci, conform teoremei 11, $u \equiv M$ în $B(x_0, R)$, adică mulţimea

$$A := \{x \in \Omega\,; u(x) = M\}$$

este deschisă. Această mulţime este şi închisă, căci u este continuă. Cum Ω este conexă şi $A \neq \emptyset$, rezultă $A = \Omega$, adică u este constantă în Ω, ceea ce contrazice ipoteza. □

Condiţia $a \geq 0$ din ipoteza propoziţiei 2 este esenţială. Intr-adevăr, funcţia $u(x) = e^{-|x|^2}$ are un maxim absolut în $x = 0$, deşi

$$-\Delta u(x) + (4\,|x|^2 - 2N)\, u(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N\,.$$

Următorul rezultat oferă informaţii mult mai precise în legătură cu funcţiile sub (super) armonice. Vom prezenta de data aceasta rezultatul pentru cazul funcţiilor superarmonice.

Definiţia 6. *Fie Ω un deschis din $\mathbb{R}^N$. Un punct $x_0 \in \partial\Omega$ are proprietatea sferei interioare dacă există o bilă închisă $B \subset \overline{\Omega}$ astfel încât $B \cap \partial\Omega = \{x_0\}$.*

Vom spune că Ω are proprietatea sferei interioare dacă orice punct de pe frontieră are această proprietate.

Teorema 12. (Principiul tare de maxim al lui Hopf). *Presupunem că $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ este un domeniu cu proprietatea sferei interioare şi $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ este o funcţie superarmonică în Ω. Presupunem de asemenea că u îşi atinge minimul în $\overline{\Omega}$ într-un punct $x_0 \in \partial\Omega$ şi, în plus, există $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)$. Atunci are loc următoarea alternativă:*

(i) u este constantă în Ω

sau

(ii) $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0.$

Demonstraţie. Fie $B = B(x_1, R) \subset \Omega$ astfel încât $x_0 \in \partial B$. Fie de asemenea o altă bilă $B_0 \subset B$ centrată în x_1 şi $\Omega_0 = B \setminus B_0$. Pentru $\alpha > 0$, considerăm funcţia

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\alpha R^2} - e^{-\alpha\,|x - x_1|^2} & \text{dacă } x \in B \\ 0 & \text{dacă } x \notin B\,. \end{cases}$$

Această funcţie are următoarele proprietăţi:

1. $g \in C^2(\overline{\Omega_0}) \cap C(\mathbb{R}^N)$.
2. $g < 0$ în Ω_0.
3. $-\Delta g(x) = 2\,\alpha\,(2\,\alpha\,|x - x_1|^2 - N)\, e^{-\alpha\,|x - x_1|^2} > 0$, pentru orice $x \in \Omega_0$ şi $\alpha > 0$ suficient de mare.

Fie funcţia $v = u + \varepsilon\, g$, unde $\varepsilon > 0$. Rezultă următoarele:

a) $-\Delta v = -\Delta u - \varepsilon\, \Delta g > 0$ în Ω_0, deci v este superarmonică în Ω_0.

b) $v(x_0) = u(x_0) =: m$ şi $u(x) > u(x_0)$, pentru orice $x \in \Omega_0$. De aici şi din modul în care a fost definit v rezultă că există $\varepsilon > 0$ suficient de mic astfel încât

$$v(x) > u(x_0) = m \qquad \forall x \in \partial B_0\,. \tag{3.65}$$

Dacă v nu este constantă, rezultă din principiul slab de maxim aplicat funcţiei superarmonice v că $\min\limits_{\overline{\Omega_0}} v$ este atins pe $\partial\Omega_0 = \partial B \cup \partial B_0$. Ţinând acum cont de (3.65) deducem că $\min\limits_{\overline{\Omega_0}} v$ se atinge pe ∂B în x_0, căci $v_{|\partial B} = u_{|\partial B}$. Insă

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) \leq 0\,, \tag{3.66}$$

căci $v_{|\partial B} = u_{|\partial B}$. Pe de altă parte

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) + \varepsilon\,\frac{\partial g}{\partial \nu}(x_0) \leq 0 \tag{3.67}$$

şi

$$\frac{\partial g}{\partial \nu}(x_0) > 0\,. \tag{3.68}$$

Din (3.67) şi (3.68) deducem că

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0\,.$$

□

Principiul tare de maxim este datorat lui Hopf [33], dar o demonstraţie independentă, diferită doar prin alegerea funcţiei de comparaţie g, a fost obţinută în Oleinik [51].

Principiul tare de maxim rămâne valabil chiar dacă derivata normală a lui u nu există în x_0. In acest caz concluzia $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0$ se înlocuieşte prin

$$\limsup_{x \to x_0} \frac{u(x_0) - u(x)}{|x - x_0|} < 0,$$

dacă unghiul dintre vectorul $x_0 - x$ şi normala la $\partial\Omega$ în x_0 este mai mic decât un anume $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Exerciţii.

1. Arătaţi că dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie convexă de clasă C^2 iar $u : \Omega \to \mathbb{R}$ este o funcţie armonică, atunci funcţia $f \circ u$ este subarmonică.

2. Presupunem că $u \in C^2(\Omega)$ este o funcţie strict pozitivă cu proprietatea că $v = u\, e^{\sum_{i=1}^N a_i x_i}$ este subarmonică, pentru orice alegere a constantelor $a_1, \cdots, a_N$. Arătaţi că $\ln u$ este o funcţie subarmonică în Ω.

Ind. Se arată mai întâi că

$$\Delta v = e^{\sum_{i=1}^N a_i x_i}(\Delta u + 2\sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^N a_i^2 u) \geq 0\,.$$

Deci $u\Delta u - |\nabla u|^2 \geq 0$, ceea ce înseamnă că $\ln u$ este subarmonică.

3. Demonstraţi că dacă u este o funcţie armonică atunci $v = |\nabla u|^2$ este subarmonică.

4. Fie u o soluţie a problemei

$$\begin{cases} -\Delta u = u - u^3 & \text{în } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Arătaţi că $-1 \leq u \leq 1$ în Ω. Pot fi atinse valorile ± 1 în Ω?

5. Fie A şi B două mulţimi compacte disjuncte din $\mathbb{R}^3$ şi $\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus (A \cup B)$. Fie u o soluţie a problemei

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \qquad \text{în } \Omega \\ u(x) \to 0 \qquad \text{dacă } |x| \to \infty \\ u_{|\partial A} = \text{constant} \\ u_{|\partial B} = \text{constant} \\ \displaystyle\int_{\partial A} \frac{\partial u}{\partial \nu} = Q > 0 \\ \displaystyle\int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0\,. \end{cases} \tag{3.69}$$

Arătaţi că

(i) problema (3.69) are soluţie unică.

(ii) $u \geq 0$ în Ω.

(iii) $u > 0$ în Ω.

Indicaţii. (i) Aplicaţi principiul lui Hopf.

(ii) Prin absurd, dacă $\min u < 0$, aplicaţi din nou principiul tare de maxim.

Interpretare fizică. Funcţia u se numeşte potenţialul electrostatic al conductorilor A şi B. Cantitatea Q se numeşte sarcina pe conductorul A, în timp ce conductorul B este neîncărcat.

6. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domeniu mărginit cu frontiera netedă. Presupunem că u este o soluţie a problemei supradeterminate de tip Pompeiu

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{în } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = C = \text{Const.} & \text{pe } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Arătaţi că Ω este o bilă şi $u(x) = \frac{C^2N^2-|x|^2}{2N}$.

Sol. Se verifică printr-un calcul elementar că $\Delta(ru_r) = -2$, deci $2u - ru_r = -u\Delta(ru_r) + ru_r\Delta u$. Aplicând a doua formulă a lui Green se obţine

$$\int_\Omega (2u - ru_r)\,dx = C^2 \int_{\partial\Omega} \frac{r\partial r}{\partial \nu}\,d\sigma = C^2 N\,|\Omega|\,.$$

Pe de altă parte

$$\int_\Omega ru_r\,dx = -N\int_\Omega udx \qquad \text{şi} \qquad (N+2)\int_\Omega u\,dx = C^2N\,|\Omega|\,.$$

Mai mult,

$$1 = (\Delta u)^2 \le N\,|\nabla u|^2 \le N\,\sum_{i,j=1}^{N} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)$$

şi

$$\Delta\left(|\nabla u|^2 + \frac{2u}{N}\right) = 2\sum_{i,j=1}^{N}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) - \frac{2}{N} \ge 0\,.$$

De aici şi din principiul de maxim pentru funcţii subarmonice rezultă că $|\nabla u|^2 + \frac{2}{N} < C^2$ sau $|\nabla u|^2 + \frac{2}{N} = C^2$ în Ω. Ultima variantă nu este posibilă, căci ar implica

$$\left(1 + \frac{2}{N}\right)\int_\Omega f\,dx < C^2\,|\Omega|\,.$$

Aşadar, $u_{x_i x_j} = -\delta_{ij}/N$ şi $u = (2N)^{-1}(A - r^2)$. Condiţia la limită de tip Dirichlet pentru u arată acum că Ω este o bilă de rază $\sqrt{A}$.

7. Demonstraţi **teorema celor trei cercuri a lui Hadamard**: Fie u o funcţie subarmonică în coroana circulară $a < |x| < b$ din plan şi $m(r) := \max\{u(x)\,;\ |x| = r\}$. Arătaţi că funcţia m satisface inegalitatea

$$m(r) \leq \frac{m(a)(\ln b - \ln r) + m(b)(\ln r - \ln a)}{\ln b - \ln a} \qquad \forall a < r < b\,.$$

Ind. Aplicaţi principiul de maxim funcţiei $v(r) = u(r) - (C_1 + C_2 \ln r)$, cu o alegere convenabilă a constantelor C_1 şi C_2.

3.11 Existenţa soluţiei pentru problema Dirichlet. Metoda lui Perron

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă, mărginită cu frontiera de clasă C^2. Scopul nostru este de a demonstra în continuare existenţa unei soluţii $u \in C^2(\Omega) \cap C(\partial\Omega)$ pentru problema

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{în } \Omega \\ u = g & \text{pe } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{3.70}$$

unde $f : \Omega \to \mathbb{R}$ şi $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ sunt funcţii date, suficient de netede.

Am demonstrat anterior (vezi Teorema 1) că funcţia

$$u_0(x) = \int_\Omega E(x - y) f(y)\, dy$$

satisface

$$\Delta u_0 = f \qquad \text{în } \Omega\,.$$

Prin urmare, ţinând cont de liniaritatea operatorului lui Laplace, este suficient să probăm existenţa soluţiei pentru problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{în } \Omega \\ u = g & \text{pe } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{3.71}$$

Vom presupune în cele ce urmează că $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă.

Definiţia 7. *O funcţie* $\underline{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\partial\Omega)$ *se numeşte subsoluţie pentru problema (3.71) dacă*

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u} \le 0 & \text{în } \Omega \\ \underline{u} \le g & \text{pe } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{3.72}$$

O funcţie $\overline{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\partial\Omega)$ *se numeşte supersoluţie pentru problema (3.71) dacă*

$$\begin{cases} -\Delta \overline{u} \ge 0 & \text{în } \Omega \\ \overline{u} \ge g & \text{pe } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{3.73}$$

Existenţa unei subsoluţii (resp. supersoluţii) pentru problema (3.71) rezultă cu uşurinţă. De pildă, funcţia $\underline{u} \equiv -n$ este subsoluţie, pentru n suficient de mare. In plus, principiul de maxim arată că dacă u este soluţie a problemei (3.71) iar $\underline{u}$ este o subsoluţie, atunci $\underline{u} \le u$ în Ω. De aici reiese că un posibil candidat de soluţie pentru (3.71) este funcţia

$$u(x) = \sup\{\underline{u}(x)\,;\ \underline{u} \text{ este subsoluţie}\}\,.$$

Lucrurile stau cu adevărat aşa în plan. Intr-adevăr, considerând problema

$$\begin{cases} u'' = 0 & \text{în } (0,1) \\ u(0) = a \\ u(1) = b\,, \end{cases} \tag{3.74}$$

funcţia

$$u(x) = \sup\{\underline{u}(x)\,;\ \underline{u} \text{ este convexă şi } \underline{u}(0) \le a,\ \underline{u}(1) \le b\}$$

reprezintă dreapta ce trece prin punctele $(0,a)$ şi $(1,b)$. Aceasta este însă unica soluţie a problemei (3.74).

Următoarea noţiune de funcţie subarmonică nu cere ca aceasta să fie de clasă C^2.

Definiţia 8. *O funcţie* $u \in C(\overline{\Omega})$ *se numeşte subarmonică (resp. superarmonică) dacă pentru orice bilă* B *cu* $\overline{B} \subset \Omega$ *şi orice funcţie* $\varphi \in C^2(\overline{B})$ *astfel* *încât $\Delta\varphi = 0$ în B şi $u \leq \varphi$ (resp. $u \geq \varphi$) pe ∂B, avem $u \leq \varphi$ (resp. $u \geq \varphi$) în B.*

O subsoluţie (resp. supersoluţie) a problemei Dirichlet (3.71) este o funcţie $u \in C(\overline{\Omega})$ care este subarmonică (resp. superarmonică) şi satisface $u \leq g$ (resp. $u \geq g$) pe $\partial\Omega$.

Exemplu. Dacă $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ şi $-\Delta u \leq 0$ în Ω, atunci u este o funcţie subarmonică în sensul definiţiei 8, conform principiului de maxim.

Propoziţia 3. *(i) Fie u_1, u_2 funcţii subarmonice în sensul definiţiei 8. Atunci funcţia $\max\{u_1, u_2\}$ este o funcţie subarmonică.*

(ii) Fie $u \in C(\overline{\Omega})$ o funcţie subarmonică în Ω şi B o bilă astfel încât $\overline{B} \subset \Omega$. Fie $\tilde{u}$ extensia armonică a lui u pe B astfel încât $\tilde{u} = u$ pe ∂B. Atunci funcţia

$$U(x) = \begin{cases} \tilde{u}(x) & \text{dacă } x \in B \\ \\ u(x) & \text{dacă } x \in \Omega \setminus B \end{cases}$$

este subarmonică în Ω.

Demonstraţie. (i) Rezultă din definiţia funcţiei subarmonice.

(ii) Fie $B = B(x_0, R)$. Conform formulei lui Poisson, funcţia $\tilde{u}$ este dată de

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} \dfrac{R^2 - |x - x_0|^2}{R\omega_N} \displaystyle\int_{\partial B(x_0,R)} \frac{u(y)}{|x-y|^N} d\sigma(y) & \forall x \in B \\ \\ u(x) & \forall x \notin B\,. \end{cases}$$

Fie $B_0 \subset\subset \Omega$ o bilă şi φ o funcţie armonică în B_0 astfel încât $U_{|\partial B_0} \leq \varphi_{|\partial B_0}$. Vom arăta că

$$U \leq \varphi \qquad \text{în } (B_0 \setminus B) \cup (B_0 \cap B) = B_0\,. \tag{3.75}$$

Din faptul că u este subarmonică şi $u = \tilde{u}$ pe ∂B rezultă că $u \leq \tilde{u}$ în B. Rezultă din definiţia lui U că $u \leq U$ în Ω. Pe de altă parte, $U \leq \varphi$ pe ∂B_0. Deci $u \leq U \leq \varphi$ pe ∂B_0. Am obţinut că $u \leq \varphi$ pe ∂B_0, u este subarmonică în B_0, iar φ este armonică în B_0. De aici rezultă că

$$u \leq \varphi \qquad \text{în } B_0 \setminus B\,. \tag{3.76}$$

Pe de altă parte,

$$\Delta U = \Delta \tilde{u} = 0 \qquad \text{în } B$$

şi

$$U \leq \varphi \qquad \text{pe } \partial(B \cap B_0)\,.$$

De aici rezultă că

$$U \leq \varphi \qquad \text{în } B_0 \cap B\,. \tag{3.77}$$

Din (3.76) şi (3.77) obţinem (3.75). □

Următorul rezultat este datorat lui Hopf [31] şi a fost demonstrat în 1927.

Teorema 13. *(***Principiul de maxim pentru funcţii subarmonice***). Fie $u \in C(\overline{\Omega})$ o funcţie subarmonică astfel încât $u \leq 0$ pe $\partial\Omega$. Atunci are loc următoarea alternativă:*

(i) $u \equiv 0$ *în* Ω

sau

(ii) $u < 0$ *în* Ω.

Demonstraţie. Raţionând prin reducere la absurd, presupunem că există $x_0 \in \Omega$ astfel încât $u(x_0) = M := \sup_{\overline{\Omega}} u \geq 0$. Dacă $u \equiv M$ în Ω atunci, din continuitatea lui u până la frontieră şi din $u \leq 0$ pe $\partial\Omega$, rezultă $M = 0$, adică (i).

Presupunem acum că $u \not\equiv M$ în Ω şi alegem o bilă $B \subset\subset \Omega$ astfel încât $x_0 \in B$ şi $u \not\equiv$ Const. pe ∂B. Fie $\tilde{u}$ extensia armonică a lui u pe B dată de formula lui Poisson. Aşadar

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u} = 0 & \text{în } B \\ \tilde{u} = u & \text{pe } \partial B\,. \end{cases}$$

De aici şi din faptul că $\tilde{u}$ este subarmonică rezultă că

$$u \leq \tilde{u} \qquad \text{în } B\,. \tag{3.78}$$

Pe de altă parte,

$$\max_{\overline{B}} \tilde{u} = \max_{\partial B} \tilde{u} = \max_{\partial B} u \leq M\,.$$

Deci, conform (3.78)

$$M = u(x_0) \leq \tilde{u}(x_0) \leq M\,,$$

de unde rezultă că $\tilde{u}(x_0) = M$. Cum $\tilde{u}$ este armonică în B, $x_0 \in B$, $\tilde{u}(x_0) = M = \sup_B u$, rezultă că $\tilde{u} \equiv M$ în B, conform principiului de maxim pentru funcţii armonice. Aşadar

$$\tilde{u}_{|\partial B} = M = u_{|\partial B}\,,$$

ceea ce constituie o contradicţie. □

Folosind construcţia de mai sus, bazată pe noţiunea de funcţie continuă subarmonică, ne propunem să demonstrăm în continuare existenţa unei soluţii pentru problema la limită (3.71).

Teorema 14. *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă, mărginită, cu frontiera de clasă C^2 şi $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci problema Dirichlet (3.71) are soluţie.*

Demonstraţie. Fie S_g mulţimea tuturor subsoluţiilor (în sens clasic) pentru problema (3.71), adică

$$S_g := \{u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})\,;\ -\Delta u \leq 0 \ \text{ în } \ \Omega \ \text{ şi } \ u \leq g \ \text{ pe } \ \partial\Omega\}\,.$$

Definim

$$u(x) := \sup_{\underline{u} \in S_g} \underline{u}(x) \qquad x \in \Omega\,. \tag{3.79}$$

Observăm mai întâi că funcţia u este bine definită. Intr-adevăr, "sup" în (3.79) există şi este finit, căci orice subsoluţie este mai mică decât orice supersoluţie.

Pentru a demonstra teorema 14 vom demonstra mai întâi că u este funcţie armonică, apoi că ea satisface condiţia la limită din (3.71).

Lema 1. *Funcţia u este armonică în Ω.*

Demonstraţia lemei. Fie $x_0 \in \Omega$ şi $(v_n) \subset S_g$ astfel încât $v_n(x_0) \to u(x_0)$ dacă $n \to \infty$. Evident, şirul (v_n) este mărginit superior (de pildă, de orice supersoluţie a problemei (3.71)). Mai mult, putem presupune că şirul (v_n) este mărginit inferior. Intr-adevăr, dacă nu ar fi aşa, înlocuim v_n prin $\max\{v_n, \underline{u}\}$, unde $\underline{u} \in S_g$ este un element fixat în mod arbitrar. Fie acum $R > 0$ astfel încât $\overline{B(x_0,R)} \subset \Omega$. Notăm cu V_n extensia armonică a lui v_n pe această bilă, resp. V_n este soluţia problemei

$$\begin{cases} \Delta V_n = 0 & \text{în } B(x_0,R) \\ V_n = v_n & \text{pe } \partial B(x_0,R)\,. \end{cases} \tag{3.80}$$

Mai mult, reamintim că formula lui Poisson ne dă expresia explicită a funcţiei V_n:

$$V_n(x) = \frac{R^2 - |x-x_0|^2}{R\omega_N} \int_{\partial B(x_0,R)} \frac{v_n(y)}{|x-y|^N}\, d\sigma(y)\,.$$

Deci mulţimea de funcţii armonice $\{V_n\}$ este uniform mărginită. Aşadar, trecând eventual la un subşir, putem presupune că V_n converge uniform pe orice mulţime compactă conţinută în B către o funcţie armonică v. Din $V_n \in S_g$ şi din definiţia lui u rezultă că $v \leq u$ în $B(x_0,R)$ şi, în plus, $v \in S_g$.

Arătăm acum că $v = u$ în $B := B(x_0,R)$. Presupunem, prin absurd, că $v(x_1) < u(x_1)$, pentru un anume $x_1 \in B$. Deci există $\underline{u} \in S_g$ astfel încât $v(x_1) < \underline{u}(x_1)$. Fie $w_n = \max\{\underline{u}, V_n\}$ şi W_n extensia armonică a lui w_n în raport cu B. Ca mai sus, putem presupune că W_n converge în B către o funcţie armonică w. Deci, $v \leq w$ în B şi $v(x_0) = w(x_0)$. Aplicând acum principiul de maxim obţinem $v = w$ în B, ceea ce contrazice alegerea lui $\underline{u}$. □

Vom arăta în continuare că u este o funcţie continuă până la frontiera lui Ω şi, în plus, $u = g$ pe $\partial\Omega$. Fixăm $x_0 \in \partial\Omega$. Intrucât $\partial\Omega$ este de clasă C^2, există o bilă $B = B(y,R)$ exterioară lui Ω astfel încât $\overline{B} \cap \overline{\Omega} = \{x_0\}$. Fie

$$w(x) = \begin{cases} R^{2-N} - |x-x_0|^{2-N} & x \in \overline{\Omega} \ \text{ dacă } N \geq 3 \\ \ln \dfrac{|x-x_0|}{R} & x \in \overline{\Omega} \ \text{ dacă } N = 2\,. \end{cases}$$

Observăm că funcţia "barieră" w este armonică în Ω şi, în plus, $w > 0$ în $\overline{\Omega} \setminus \{x_0\}$, $w(x_0) = 0$.

Lema 2. *Pentru orice $x_0 \in \partial\Omega$ avem*

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = g(x_0)\,.$$

Demonstraţia lemei. Fie $\varepsilon > 0$ şi $M := \|g\|_{L^\infty}$. Din continuitatea lui g rezultă că există $\delta > 0$ astfel încât

$$|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon \qquad \forall x \in \partial\Omega\,,\ \ |x - x_0| < \delta\,. \tag{3.81}$$

Din definiţia lui w rezultă că există un număr natural k astfel încât

$$kw(x) \geq 2M \qquad \forall x \in \Omega\,,\ \ |x - x_0| \geq \delta\,. \tag{3.82}$$

Aplicaţiile $-kw(x) + g(x_0) - \varepsilon$ şi $kw(x) + g(x_0) + \varepsilon$ sunt subsoluţie, resp. supersoluţie, pentru problema (3.71). Deci, în particular,

$$-kw(x) + g(x_0) - \varepsilon \leq u(x) \leq kw(x) + g(x_0) + \varepsilon \qquad \forall x \in \Omega\,.$$

Cum $w(x) \to 0$ dacă $x \to x_0$ şi $\varepsilon > 0$ a fost ales arbitrar, de aici rezultă concluzia lemei. $\square$

Cu aceasta demonstraţia teoremei 14 este încheiată. $\square$

Remarcăm că demonstraţia rămâne valabilă pentru orice domeniu ce admite funcţie barieră exterioară, în particular dacă Ω este convex.

3.12 Principiul lui Dirichlet

Vom arăta în această secţiune că unica soluţie a problemei Dirichlet este caracterizată de faptul că minimizează o anumită funcţională.

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă, mărginită, cu frontiera netedă. Fixăm $f \in C(\overline{\Omega})$ şi $g \in C(\partial\Omega)$. Fie problema Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{în } \Omega \\ u = g & \text{pe } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{3.83}$$

Am demonstrat în secţiunea precedentă că problema (3.83) admite o unică soluţie clasică u. Ataşăm problemei la limită (3.83) funcţionala

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega fu\,dx\,,$$

care se numeşte funcţionala Euler-Lagrange corespunzătoare lui (3.83) sau "funcţională energetică". Fie varietatea

$$\mathcal{D} := \{u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})\,;\ u = g \text{ pe } \partial\Omega\}\,.$$

Considerăm problema de minim

$$\min_{v\in\mathcal{D}} E(v)\,. \tag{3.84}$$

Teorema 15. *(**Principiul lui Dirichlet**). Presupunem că $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ este soluţie a problemei (3.83). Atunci u este şi o soluţie a problemei de minim (3.84), adică*

$$E(u) = \min_{v\in\mathcal{D}} E(v)\,.$$

Reciproc, dacă $u \in \mathcal{D}$ realizează minimul în (3.84) atunci u este soluţie a problemei la limită (3.83).

Demonstraţie. Presupunem mai întâi că u verifică (3.83). Avem, conform primei formule a lui Green,

$$0 = \int_\Omega (-\Delta u - f)(u-v)\,dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(u-v)\,dx - \int_\Omega f\cdot(u-v)\,dx \qquad \forall v \in \mathcal{D}\,.$$

Deci

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega fu\,dx = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx - \int_\Omega fv\,dx \le$$
$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx - \int_\Omega fv\,dx \qquad \forall v \in \mathcal{D}\,,$$

ceea ce arată că

$$E(u) \le E(v) \qquad \forall v \in \mathcal{D}\,.$$

Reciproc, fie u soluţie a problemei de minim (3.84). Avem nevoie pentru demonstraţie de următorul rezultat auxiliar de excepţională importanţă, cunoscut şi sub numele de **lema fundamentală a calculului variaţional**.

Lema 3. *Fie $u : \Omega \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că*

$$\int_\Omega u\varphi\,dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\,. \tag{3.85}$$

Atunci $u = 0$ în Ω.

Demonstraţia lemei. Fixăm în mod arbitrar $\varepsilon > 0$. Din motive de densitate există $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ astfel încât $\|u - \varphi\|_{L^2(\Omega)} \le \varepsilon$. Ţinând cont de (3.85) şi folosind inegalitatea Cauchy-Schwarz, avem

$$\|u\|_{L^2}^2 = \int_\Omega u^2\,dx = \int_\Omega u(u-\varphi)\,dx + \int_\Omega u\varphi\,dx = \int_\Omega u(u-\varphi)\,dx \le$$
$$\|u\|_{L^2} \cdot \|u-\varphi\|_{L^2} \le \varepsilon\,\|u\|_{L^2}\,.$$

De aici rezultă că

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \le \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0\,,$$

ceea ce atrage $u = 0$ în Ω. $\square$

Continuarea demonstraţiei teoremei 15.

Fixăm o funcţie $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ şi considerăm funcţia de variabilă reală $h(t) := E(u + t\varphi)$. Observăm că, prin ipoteză,

$$h(0) = \min_{t\in\mathbb{R}} h(t)\,.$$

Intrucât $u + t\varphi \in \mathcal{D}$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$ şi orice $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ rezultă, conform teoremei lui Fermat, că $h'(0) = 0$. Observăm că

$$\begin{aligned} h(t) = \;& \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u+t\varphi)|^2\,dx - \int_\Omega f\cdot(u+t\varphi)\,dx = \\ & \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx + t\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx - \int_\Omega f\cdot(u+t\varphi)\,dx\,. \end{aligned}$$

Deci

$$\begin{aligned} 0 = \;& h'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{h(t)-h(0)}{t} = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx - \int_\Omega f\varphi\,dx = \\ & \int_\Omega (-\Delta u - f)\varphi\,dx \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\,. \end{aligned}$$

Aplicând acum lema fundamentală a calculului variaţional obţinem

$$-\Delta u = f \qquad \text{în } \Omega\,.$$

Relaţia $u = g$ pe $\partial\Omega$ este verificată întrucât $u \in \mathcal{D}$. $\square$

Exerciţii.

1. Demonstraţi **principiul lui Dirichlet pentru problema Neumann**: fie problema la limită

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{în } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{pe } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{3.86}$$

unde $f \in C(\overline{\Omega})$ şi $g \in C(\partial\Omega)$ sunt funcţii date cu proprietatea că $\int_\Omega f\,dx = -\int_{\partial\Omega} g\,d\sigma$. Fie funcţionala

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega fu\,dx - \int_{\partial\Omega} gu\,d\sigma(x)$$

şi clasa de funcţii

$$\mathcal{N} := \{u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})\,;\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \ \text{ pe } \ \partial\Omega\}\,.$$

Arătaţi că:

(i) dacă u este soluţie clasică a problemei (3.86) atunci

$$E(u) \le E(v) \qquad \forall v \in \mathcal{N}\,.$$

(ii) dacă $u \in \mathcal{N}$ şi $E(u) = \min\{E(v)\,;\ v \in \mathcal{N}\}$ atunci u este soluţie a problemei (3.86).

Chapter 4

Probleme la limită de tip parabolic

Evolution is the history of a system undergoing irreversible change.

A. Lotka (1956), [46] p.24

4.1 Generalităţi despre ecuaţia căldurii

Fie Ω o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^N$ şi $0 < T \leq +\infty$. Vom studia în acest capitol soluţiile $u = u(x,t) : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ ale ecuaţiei omogene a căldurii

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 \qquad \text{în } \Omega \times (0,T) \tag{4.1}$$

sau ale ecuaţiei neomogene a căldurii

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t) \qquad \text{în } \Omega \times (0,T)\,. \tag{4.2}$$

Această ecuaţie se încadrează în cadrul problemelor de tip parabolic şi, în studiul acestor probleme, ne vom călăzi după următorul principiu de bază: orice afirmaţie despre funcţiile armonice are un analog (de obicei mai complicat) legat de soluţiile ecuaţiei căldurii.

Ecuaţia căldurii (sau a difuziei), fie că este vorba de varianta sa omogenă (4.1), fie că este vorba de forma neomogenă (4.2), descrie variaţia în timp a densităţii $u(x,t)$ la momentul de timp t şi în punctul $x \in \Omega$ a unei anumite cantităţi precum temperatura sau concentraţia chimică. Dacă $\omega \subset\subset \Omega$ atunci viteza de schimb a cantităţii totale în raport cu ω este dată, din considerente fizice, de fluxul $\vec{F}$ de-a lungul frontierei lui ω, luat cu semnul minus, respectiv

$$\frac{d}{dt}\int_\omega u\,dx = -\int_{\partial\omega} \vec{F}\cdot\nu\,d\sigma = -\int_\omega \operatorname{div}\vec{F}\,dx.$$

De aici rezultă că

$$u_t = -\operatorname{div}\vec{F}. \tag{4.3}$$

Pe de altă parte, conform legii a doua a lui Newton, $\vec{F}$ este proporţională cu ∇u, anume

$$\vec{F} = -k\,\nabla u \qquad k > 0. \tag{4.4}$$

Factorul de proporţionalitate este negativ deoarece direcţia fluxului este de la regiuni cu concentraţie mai mare spre regiuni cu concentraţie mai mică. Constanta k se numeşte conductivitatea termică şi depinde de material. Din (4.3) şi (4.4) rezultă că

$$u_t = k\operatorname{div}(\nabla u) = k\,\Delta u\,,$$

adică tocmai ecuaţia căldurii.

In ceea ce priveşte condiţiile ataşate ecuaţiilor (4.1) sau (4.2) acestea sunt de mai multe feluri:

Condiţii iniţiale, care sunt de forma

$$u(x,0) = f(x) \qquad \forall x \in \Omega$$

şi care descriu starea substanţei (temperatura, concentraţia etc.) la momentul iniţial $t = 0$.

Condiţii de temperatură pe bord, respectiv de tipul

$$u(x,t) = g(x,t) \qquad \forall (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T)\,.$$

Această situaţie corespunde în practică cu plasarea frontierei (sau a unei porţiuni a acesteia) în contact cu o sursă având o anumită temperatură g.

Condiţii de flux, respectiv de forma

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = g(x,t) \qquad \forall (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T).$$

Această condiţie corespunde în situaţii practice cu fixarea fluxului (schimbului de căldură cu exteriorul) pe frontieră sau pe o porţiune a acesteia. In cazul particular $g = 0$ nu există schimb de căldură cu exteriorul.

Condiţii de radiaţie, care sunt de forma

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = \alpha\, u(x,t) \qquad \forall (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T)$$

şi care sunt obţinute prin liniarizarea unei anumite legi de radiaţie.

Presupunem în cele ce urmează că Ω este mărginit. De o deosebită importanţă se vor bucura următoarele două noţiuni:

(a) **Domeniu parabolic**, care este definit prin “cilindrul spaţiu-timp” $(N+1)$-dimensional

$$\Omega_T := \Omega \times (0,T) \subset \mathbb{R}^N \times (0,\infty);$$

(b) **Frontieră parabolică**, respectiv

$$\Gamma_T := (\Omega \times \{t=0\}) \cup (\partial\Omega \times (0,T)).$$

Această mulţime corespunde bazei inferioare şi suprafeţei laterale a “cilindrului” Ω_T.

4.2 Metode energetice în studiul problemelor parabolice

Fie problema la limită

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta_x u(x,t) = f(x,t) & \text{în } \Omega_T \\ u(x,t) = g(x,t) & \text{pe } \Gamma_T. \end{cases} \tag{4.5}$$

Ne vom concentra asupra proprietăţilor soluţiilor **clasice**, resp. funcţii $u \in C^{2,1}(\Omega_T)$, unde

$$C^{2,1}(\Omega_T) := \left\{ u \in C(\overline{\Omega_T});\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C(\overline{\Omega_T}),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in C(\Omega_T),\ \frac{\partial u}{\partial t} \in C(\overline{\Omega} \times (0,T]) \right\}.$$

Teorema 16. *Problema la limită (4.5) admite cel mult o soluţie clasică.*

Demonstraţie. Presupunem că u_1 şi u_2 sunt soluţii ale problemei (4.5). Notăm $u := u_1 - u_2$. Prin scădere şi ţinând cont de liniaritatea acestei probleme găsim

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{în } \Omega_T \\ u = 0 & \text{pe } \Gamma_T . \end{cases} \tag{4.6}$$

Rămâne să demonstrăm că $u = 0$. Ataşăm acestei probleme "energia"

$$E(t) = \int_\Omega u^2(x,t)\, dx \qquad \forall t \in [0,T]\,.$$

Remarcăm că această funcţională semnifică tocmai norma în $L^2(\Omega)$ a aplicaţiei $u(\cdot,t)$. Continuăm să denumim această funcţională "energie", deşi nu are nici o semnificaţie fizică în acest context. Avem, conform formulei lui Green şi condiţiei omogene pe frontieră din (4.6)

$$\begin{aligned} E'(t) &= 2\int_\Omega u u_t\, dx = 2\int_\Omega u\Delta u\, dx \\ &= 2\left(\int_{\partial\Omega} u\,\frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma - \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right) = -2\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \le 0\,. \end{aligned}$$

Rezultă că funcţia $E(t)$ este descrescătoare pe $(0,T)$. Condiţia iniţială omogenă din (4.6) arată că $E(0) = 0$. Aşadar

$$E(t) \le E(0) = 0 \qquad \forall t > 0\,,$$

ceea ce conduce la $E(t) = 0$, pentru orice $t \in (0,T)$, căci E este nenegativă. De aici rezultă că $u = 0$ în Ω_T. $\square$

Fie acum

$$\Omega_+ := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2;\ x \in (0,1) \text{ şi } t \in (0,\infty)\}\,.$$

Considerăm problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{în } \Omega_+ \\ u(x,0) = f(x) & x \in (0,1) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t \in (0,\infty)\,. \end{cases} \tag{4.7}$$

Pentru a rezolva problema (4.7) folosim metoda separării variabilelor şi punem

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Rezultă că

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n\, e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x\,. \tag{4.8}$$

Exerciţiu: găsiţi coeficienţii Fourier a_n.

Fie acum $\Omega_- := (0,1)\times(-\infty,0)$. Punând $\tau = -t$ în (4.7) obţinem ecuaţia

$$\begin{cases} u_t = -u_{xx} & \text{în } \Omega_+ \\ u(x,0) = f(x) & x \in (0,1) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t \in (0,\infty)\,, \end{cases} \tag{4.9}$$

cu soluţia

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} a_n\, e^{n^2\pi^2 t} \sin n\pi x\,. \tag{4.10}$$

De aici rezultă proprietatea următoare a ecuaţiei căldurii, care exprimă faptul că putem găsi o condiţie iniţială pentru care soluţia explodează înapoi în timp oricât de repede.

Propoziţia 4. (Instabilitatea înapoi în timp a ecuaţiei căldurii) *Pentru orice numere pozitive T, M şi ε, există $f \in C([0,1])$ cu $\|f\|_{L^\infty} = \varepsilon$ astfel încât problema la limită (4.9) are o soluţie $u(x,t)$ cu $\|u(\cdot,T)\|_{L^\infty} \geq M$.*

Demonstraţie. Alegem $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n_0^2\pi^2 T \geq \ln\frac{M}{\varepsilon}$ şi definim $f(x) = \varepsilon \sin n_0\pi x$. Deci, aplicând eventual (4.10) sau prin observaţie directă, deducem că soluţia acestei probleme este dată de

$$u(x,t) = \varepsilon\, e^{n_0^2\pi^2 t} \sin n_0\pi x\,.$$

Rezultă că

$$\|u(\cdot,T)\|_{L^\infty} = \varepsilon\, e^{n_0^2\,\pi^2\,T} \geq M\,,$$

ceea ce încheie demonstraţia. □

Stabilim în cele ce urmează o inegalitate energetică legată de soluţiile ecuaţiei omogene a căldurii şi care exprimă faptul că “norma L^2 descreşte în timp”. Fie problema pe frontieră

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{în } \Omega_T \\ u(x,t) = 0 & \forall (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty)\,. \end{cases} \tag{4.11}$$

Propoziţia 5. *Fie u o soluţie arbitrară a problemei (4.11) şi $0 \le t_1 \le t_2 < T$. Atunci*

$$\int_\Omega u^2(x,t_2)\,dx \le \int_\Omega u^2(x,t_1)\,dx\,.$$

Demonstraţie. Avem

$$(u^2)_t = 2uu_t = 2u\,\Delta u = 2\,\mathrm{div}\,(u\nabla u) - 2\,|\nabla u|^2\,.$$

Prin urmare, conform primei formule a lui Green şi folosind faptul că u verifică (4.11),

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (u^2)_t\,dx = \int_{\partial\Omega} u\,\frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\sigma - \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = -\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\,.$$

Deci

$$\int_\Omega u^2(x,t_2)\,dx - \int_\Omega u^2(x,t_1)\,dx = -2\int_\Omega \int_{t_1}^{t_2} |\nabla u|^2\,dt\,dx \le 0\,,$$

ceea ce încheie demonstraţia. □

Exerciţii.

1. Folosiţi metoda separării variabilelor pentru ecuaţia căldurii pentru a rezolva următoarele probleme la limită:

(i)

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{în } (0,1)\times(0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) & \forall x \in (0,1) \\ u(0,t) = 0 & \forall t > 0 \\ u_x(1,t) = -u(1,t) & \forall t > 0\,. \end{cases}$$

(ii)

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{în } (0,1)\times(0,\infty) \\ u(x,0) = \sin \pi x & \forall x \in (0,1) \\ u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 1 & \forall t > 0\,. \end{cases}$$

Găsiţi în acest caz $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$.

2. Fie $\Omega = (0,a)\times(0,b) \subset \mathbb{R}^2$. Rezolvaţi problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{în } \Omega \times (0,\infty) \\ u(x,y;0) = f(x,y) & \forall (x,y) \in \Omega \\ u_x(0,y;t) = u_x(a,y;t) = 0 & \forall y \in (0,b) \\ u(x,0;t) = u(x,b;t) = 0 & \forall x \in (0,a)\,. \end{cases}$$

R. $u_{mn}(x,y;t) = C_{mn} \cos \dfrac{m\pi x}{a} \sin \dfrac{n\pi y}{b}\, e^{-\pi^2[(m/a)^2+(n/b)^2]t}$, $m \geq 0$, $n \geq 1$.

3. Folosind metoda energetică arătaţi că problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x,t) & \text{dacă } (x,t) \in (0,1)\times(0,\infty) \\ u(x,0) = \varphi(x) & \forall x \in (0,1) \\ u_x(0,t) = g(t)\,,\ u_x(1,t) = h(t) & \forall t > 0 \end{cases}$$

are cel mult o soluţie clasică.

4. Fie $u(x,t)$ soluţia problemei Neumann

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{dacă } (x,t) \in (0,1)\times(0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) & \forall x \in (0,1) \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 & \forall t > 0. \end{cases}$$

Folosing metoda energetică demonstraţi că

$$\int_0^1 u^2(x,t)dx \leq \int_0^1 f^2(x)dx \qquad \forall t \geq 0.$$

5. Fie problema

$$\begin{cases} u_t = Au_{xx} + p(u) & \text{dacă } (x,t) \in (0,1) \times (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) & \forall x \in (0,1) \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 & \forall t > 0, \end{cases}$$

unde $A > 0$ este o constantă iar neliniaritatea p satisface condiţia

$$\sup_{u \in \mathbb{R}} |p'(u)| \leq M < \infty.$$

(i) Arătaţi că

$$F'(t) \leq 2\,(M - A\pi^2)\,F(t) \qquad \forall t > 0,$$

unde

$$F(t) := \int_0^1 u_x^2(x,t)dx.$$

(ii) Demonstraţi că dacă $M < A\,\pi^2$, atunci

$$\lim_{t\to\infty} u_x(x,t) = 0 \qquad \forall x \in (0,1).$$

6. Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că $ug(u) \leq 0$, pentru orice $u \in \mathbb{R}$. Arătaţi că orice soluţie a problemei neliniare

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = g(u) & \text{dacă } (x,t) \in (0,1) \times (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) & \forall x \in (0,1) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

satisface estimarea

$$\int_0^1 u^2(x,t)dx \leq \int_0^1 f^2(x)dx \qquad \forall t \geq 0.$$

7. Fie $a = a(x,t,u)$ o funcţie strict pozitivă. Utilizând eventual argumente energetice arătaţi că orice soluţie a problemei

$$\begin{cases} u_t = (a(x,t,u))_x & \text{dacă } (x,t) \in (0,1) \times (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) & \forall x \in (0,1) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

satisface estimarea

$$\int_0^1 u^2(x,t)dx \le \int_0^1 f^2(x)dx \qquad \forall t \ge 0.$$

8. Fie problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u & \text{dacă } (x,t) \in (0,1) \times (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) & \forall x \in (0,1) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \forall t > 0. \end{cases}$$

Arătaţi că

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-2t}\int_0^1 u^2(x,t)dx\right] \le 0$$

şi deduceţi că

$$\int_0^1 u^2(x,t)dx \le e^{2t}\int_0^1 f^2(x)dx \qquad \forall t \ge 0.$$

Utilizaţi această inegalitate pentru a deduce o estimare a diferenţei a două soluţii în funcţie de diferenţa valorilor iniţiale. Are problema de mai sus soluţie unică pentru orice valoare iniţială f?

Sol. Fie

$$E(t) = e^{-2t}\int_0^1 u^2(x,t)dx.$$

Aplicând formula de integrare prin părţi şi folosind faptul că u este soluţie, obţinem

$$\begin{aligned} E'(t) = \; & -2e^{-2t}\int_0^1 u^2(x,t)dx + 2e^{-2t}\int_0^1 u(x,t)u_t(x,t)dx = \\ & 2e^{-2t}\int_0^1 u(u_t - u)dx = 2e^{-2t}\int_0^1 uu_{xx}dx = -2e^{-2t}\int_0^1 u_x^2 dx \le 0. \end{aligned}$$

Deci, pentru orice $t > 0$

$$E(t) \le E(0) = \int_0^1 f^2(x)dx,$$

adică

$$\int_0^1 u^2(x,t)dx \le e^{2t}\int_0^1 f^2(x)dx.$$

9. Considerăm ecuaţia căldurii cu condiţii periodice pe frontieră

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{dacă } (x,t) \in (-1,1) \times (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) & \forall x \in (-1,1) \\ u(-1,t) = u(1,t),\ u_x(-1,t) = u_x(1,t) & \forall t > 0, \end{cases}$$

unde f este o funcţie continuă pe porţiuni. Definim energia corespunzătoare acestei probleme prin

$$E(t) = \int_{-1}^{1} u^2(x,t)dx \qquad \forall t \geq 0.$$

(i) Explicaţi de ce nu este adevărat, în general, că

$$\lim_{t\to\infty} E(t) = 0.$$

(ii) Presupunem că f verifică

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0.$$

Arătaţi că

$$E(t) \leq e^{-2\pi^2 t} E(0) \qquad \forall t \geq 0.$$

4.3 Soluţia fundamentală pentru ecuaţia căldurii

Vom căuta o soluţie particulară a ecuaţiei omogene a căldurii

$$u_t - \Delta u = 0 \qquad \text{în } \mathbb{R}^N \times (0,\infty) \tag{4.12}$$

care să dea posibilitatea exprimării printr-o formulă integrală a soluţiei problemei Cauchy cu valoare iniţială.

Observăm mai întâi că dacă $u(x,t)$ este soluţie a problemei (4.12), atunci $v(x,t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$ este, de asemenea, soluţie a aceleiaşi probleme, pentru orice număr real λ. Intr-adevăr,

$$v_t(x,t) = \lambda^2\, u_t(\lambda x, \lambda^2 t)$$

şi

$$v_{x_i}(x,t) = \lambda\, u_{x_i}(\lambda x, \lambda^2 t)\,.$$

Deci

$$v_t(x,t) - \Delta v(x,t) = \lambda^2 \left(u_t(\lambda x, \lambda^2 t) - \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)\right) = 0.$$

Din acest motiv căutăm o soluţie a ecuaţiei (4.12) folosind metoda separării variabilelor şi scriind această soluţie sub forma

$$u(x,t) = v\left(\frac{|x|^2}{t}\right) w(t) \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty)\,.$$

Avem

$$u_t = v\left(\frac{|x|^2}{t}\right) w'(t) - \frac{|x|^2}{t^2}\, v'\left(\frac{|x|^2}{t}\right) w(t) \tag{4.13}$$

şi

$$u_{x_i} = \frac{2x_i}{t}\, v'\left(\frac{|x|^2}{t}\right) w(t)\,.$$

Deci

$$u_{x_i x_i} = \frac{4x_i^2}{t^2}\, v''\left(\frac{|x|^2}{t}\right) w(t) + \frac{2}{t}\, v'\left(\frac{|x|^2}{t}\right) w(t)\,. \tag{4.14}$$

Din (4.13) şi (4.14) obţinem

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u = \; & v\left(\frac{|x|^2}{t}\right) w'(t) - \\ & \frac{w(t)}{t}\left[\frac{4|x|^2}{t}\, v''\left(\frac{|x|^2}{t}\right) + \frac{|x|^2}{t}\, v'\left(\frac{|x|^2}{t}\right) + 2N\, v'\left(\frac{|x|^2}{t}\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Alegând v astfel încât $4v'' + v' = 0$ găsim $v(z) = e^{-z/4}$. Folosind acum (4.15) obţinem ecuaţia satisfăcută de w:

$$w'(t) + \frac{N}{2}\,\frac{w(t)}{t} = 0\,.$$

Un calcul elementar conduce la $w(t) = a\, t^{-N/2}$, $a \in \mathbb{R}$. Ţinând acum cont de expresiile găsite pentru v şi w obţinem o soluţie a ecuaţiei (4.12) de forma

$$u(x,t) = \frac{a}{t^{N/2}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}} + b \qquad a, b \in \mathbb{R}\,.$$

Definiţia 9. *Funcţia*

$$E(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{N/2}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty) \\ 0 & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (-\infty, 0] \end{cases}$$

se numeşte soluţie fundamentală a ecuaţiei căldurii.

Această funcţie satisface

Propoziţia 6. *Avem, pentru orice $t > 0$,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} E(x,t)\, dx = 1\,.$$

Demonstraţie. Aplicând formula lui Fubini şi utilizând schimbarea de variabilă avem

$$\int_{\mathbb{R}^N} E(x,t)\, dx = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\, dx =$$
$$\frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \prod_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_i^2}{4t}}\, dx_i = \frac{1}{\pi^{N/2}} \prod_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} e^{-z_i^2}\, dz_i = 1\,.$$

□

Exerciţii. 1. Rezolvaţi ecuaţia căldurii cu constantă disipativă

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + au = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}\,, \end{cases}$$

unde $a > 0$ este o constantă.

Ind. Faceţi schimbarea de variabilă $u(x,t) = e^{-at}\, v(x,t)$ şi deduceţi ecuaţia satisfăcută de v.

2. Rezolvaţi ecuaţia căldurii cu variabilă disipativă

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + at^2 u = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}\,, \end{cases}$$

unde $a > 0$ este o constantă.

Ind. Soluţiile ecuaţiei diferenţiale $w_t + at^2 w = 0$ sunt de forma $Ce^{-at^3/3}$. Acest rezultat sugerează să se efectueze schimbarea de variabilă $u(x,t) = e^{-at^3/3}v(x,t)$.

3. Rezolvaţi ecuaţia căldurii cu convecţie

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + au_x = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}\,, \end{cases}$$

unde $a > 0$ este o constantă.

Ind. Faceţi substituţia $y = x - at$.

4. Fie $\varepsilon > 0$. Considerăm ecuaţia

$$u_t = \varepsilon u_{xx} + uu_x \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,.$$

Găsiţi toate soluţiile mărginite de forma $u(x,t) = U(x - ct)$, $c \in \mathbb{R}$.

5. Fie $\varepsilon > 0$. Considerăm ecuaţia

$$u_t = \varepsilon u_{xx} + \varepsilon u(1-u) \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,.$$

Faceţi substituţia $u(x,t) = U(x-ct)$, $c \in \mathbb{R}$ şi efectuaţi calculele. In particular, găsiţi toate soluţiile mărginite de această formă.

4.4 Problema Cauchy pentru ecuaţia omogenă a căldurii

Pentru $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ considerăm problema Cauchy

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{în } \mathbb{R}^N \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & \forall x \in \mathbb{R}^N\,. \end{cases} \tag{4.16}$$

Am văzut în secţiunea anterioară că funcţia $E(x,t)$ este o soluţie a ecuaţiei omogene a căldurii (4.12). Ne punem acum problema găsirii unei funcţii (care va depinde, în mod evident, de g) care să verifice problema cu condiţie iniţială (4.16).

Teorema 17. *Presupunem că* $g \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$. *Fie*

$$\begin{aligned} u(x,t) := & \int_{\mathbb{R}^N} E(x-y,t)g(y)\,dy = \\ & \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)\,dy \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty)\,. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Atunci această funcţie satisface următoarele proprietăţi:

(i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times (0,\infty))$.

(ii) $u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = 0$, *pentru orice* $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty)$.

(iii) $\lim\limits_{(x,t)\to(x_0,0)} u(x,t) = g(x_0)$, *pentru orice* $x_0 \in \mathbb{R}^N$.

Demonstraţie. (i) Aplicaţia

$$\mathbb{R}^N \times (0,\infty) \ni (x,t) \longmapsto \frac{1}{t^{N/2}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

este de clasă C^∞ şi are toate derivatele uniform mărginite pe $\mathbb{R}^N \times [\delta, +\infty)$, pentru orice $\delta > 0$ fixat. Prin urmare, $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times (0,\infty))$. In particular, operatorii de derivare şi cel de integrare comută, deci

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} (E_t - \Delta_x E)(x-y,t) g(y)\,dy = 0 \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty)\,,$$

adică (ii).

(iii) Fixăm $\varepsilon > 0$ şi $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Din continuitatea lui g, există $\delta > 0$ astfel încât

$$|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon \qquad \forall y \in \mathbb{R}^N\,,\ |y - x_0| < \delta\,.$$

Folosind Propoziţia 6 avem

$$\begin{aligned} & |u(x,t) - g(x_0)| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} E(x-y,t)g(y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^N} E(x-y,t)g(x_0)\,dy \right| \le \\ & \int_{\mathbb{R}^N} E(x-y,t)|g(y) - g(x_0)|\,dy = \\ & \int_{B(x_0,\delta)} E(x-y,t)|g(y) - g(x_0)|\,dy + \\ & \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x_0,\delta)} E(x-y,t)|g(y) - g(x_0)|\,dy =: A + B\,. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Din modul cum a fost ales δ rezultă că

$$A \le \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} E(x-y,t)\,dy = \varepsilon\,. \tag{4.19}$$

Pe de altă parte

$$B \leq 2\|g\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x_0,\delta)} E(x-y,t)\, dy \leq \frac{C}{t^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x_0,\delta)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, dy\,. \quad (4.20)$$

Să presupunem că $|x - x_0| \leq \frac{\delta}{2}$. Aşadar, dacă $y \in \mathbb{R}^N$ şi $|y - x_0| \geq \delta$, atunci

$$|y-x| \geq |y-x_0| - |x-x_0| \geq |y-x_0| - \frac{\delta}{2} \geq \frac{|y-x_0|}{2}\,. \quad (4.21)$$

Din (4.20) şi (4.21) obţinem

$$\begin{aligned} B &\leq \frac{C}{t^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x_0,\delta)} e^{-\frac{|x_0-y|^2}{16t}}\, dy = \\ \frac{C}{t^{N/2}} &\int_\delta^\infty e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{N-1}\, dr \to 0 \qquad \text{dacă } t \to 0\,. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Din (4.19) şi (4.22) deducem că

$$|u(x,t) - g(x_0)| \leq 2\,\varepsilon\,,$$

pentru orice $t > 0$ suficient de mic şi pentru orice $x \in \mathbb{R}^N$ cu $|x - x_0| \leq \frac{\delta}{2}$. □

Rezultatul anterior arată că soluţia fundamentală $E(x,t)$ a ecuaţiei căldurii satisface

$$\begin{cases} E_t - \Delta E = 0 & \text{în } \mathbb{R}^N \times (0,\infty) \\ E = \delta_0 & \text{în } \mathbb{R}^N \times \{t = 0\}\,, \end{cases} \quad (4.23)$$

unde δ_0 semnifică distribuţia lui Dirac concentrată în origină.

Exerciţii

1. Fie u o soluţie a ecuaţiei $u_t - \Delta u = 0$ în $\mathbb{R}^N \times (0,\infty)$. Arătaţi că funcţia

$$v(x,t) := x \cdot \nabla u(x,t) + 2tu_t(x,t)$$

este, de asemenea, soluţie a ecuaţiei omogene a căldurii.

2. Fie

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x > 0 \\ 0 & \text{dacă } x < 0\,. \end{cases}$$

Arătaţi că soluţia problemei

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{în } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = g(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

este dată de

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(1 + \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right),$$

unde Φ este "funcţia eroare" a lui Gauss

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-s^2}\, ds\,.$$

3. Folosiţi eventual rezultatul de mai sus pentru a găsi soluţia problemei

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \forall (x,t) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = 0 & \forall x > 0 \\ u(0, t) = 1 & \forall t > 0\,. \end{cases}$$

R. $u(x,t) = 1 - \Phi(x/2\sqrt{t})$.

4. **Metodă alternativă pentru deducerea soluţiei fundamentale a ecuaţiei căldurii în dimensiune 1.**

Considerăm ecuaţia omogenă a căldurii în dimensiune 1:

$$u_t - u_{xx} = 0 \qquad \text{în } \mathbb{R} \times (0, \infty)\,.$$

Fie $u = u(x,t)$ o soluţie arbitrară a acestei probleme. Definim funcţia $v : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ prin

$$v\left(\frac{x^2}{t}\right) = u(x,t)\,.$$

(i) Arătaţi că funcţia v este bine definită.

(ii) Demonstraţi că v satisface ecuaţia diferenţială

$$4z\, v''(z) + (2 + z)\, v'(z) = 0 \qquad \forall z > 0\,.$$

(iii) Arătaţi că soluţia generală a acestei ecuaţii este

$$v(z) = C_1 \int_0^z e^{-t/4} t^{-1/2}\, dt + C_2\,.$$

(iv) Derivaţi în raport cu x funcţia $v(x^2/t)$ şi alegeţi constanta C_1 pentru a obţine soluţia fundamentală a ecuaţiei căldurii în dimensiune 1.

5. Utilizând tehnicile folosite în această secţiune, găsiţi o formulă explicită pentru soluţia ecuaţiei neomogene a căldurii cu condiţie iniţială

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + cu = f & \text{în } \mathbb{R}^N \times (0,\infty) \\ u = g & \text{în } \mathbb{R}^N \times \{t=0\}\,. \end{cases}$$

4.5 Problema Cauchy pentru ecuaţia neomogenă a căldurii. Principiul lui Duhamel

Fie problema Cauchy

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{în } \mathbb{R}^N \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & \forall x \in \mathbb{R}^N\,. \end{cases}$$

Reamintim că funcţia

$$u(x,t) := \int_{\mathbb{R}^N} E(x-y,t)g(y)\,dy = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)\,dy$$

este o soluţie a acestei probleme cu condiţie iniţială.

Vom căuta să adaptăm tehnicile de demonstraţie pentru a găsi o soluţie a problemei neomogene

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{în } \mathbb{R}^N \times (0,\infty) \\ u(x,0) = 0 & \forall x \in \mathbb{R}^N\,. \end{cases} \tag{4.24}$$

Pornim de la observaţia că nu numai $E(x-y,t)$ verifică ecuaţia căldurii, ci şi funcţia

$$\mathbb{R}^N \times (s,\infty) \ni (x,t) \longmapsto E(x-y,t-s)\,,$$

unde $s>0$ este un număr fixat în mod arbitrar, iar $y \in \mathbb{R}^N$. Fie aplicaţia

$$u(x,t;s) := \int_{\mathbb{R}^N} E(x-y,t-s)f(y,s)\,dy\,, \tag{4.25}$$

care verifică problema omogenă

$$\begin{cases} u_t(x,t;s) - \Delta u(x,t;s) = 0 & \text{în } \mathbb{R}^N \times (s,\infty) \\ u(x,s;s) = f(x,s) & \forall x \in \mathbb{R}^N . \end{cases} \tag{4.26}$$

Remarcăm că funcţia u definită prin (4.25) **nu** este soluţie a problemei (4.24). Cu toate acestea, prin integrare în raport cu s, se poate construi o soluţie a problemei neomogene (4.24) pornind de la (4.25). Acesta este **principiul lui Duhamel**. Prin urmare, dacă $u(x,t;s)$ semnifică funcţia definită prin (4.25), fie

$$u(x,t) := \int_0^t u(x,t;s)\, ds . \tag{4.27}$$

Deci, din (4.25) şi (4.27),

$$\begin{aligned} u(x,t) = & \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} E(x-y,t-s) f(y,s)\, dy\, ds = \\ & \int_0^t \frac{1}{(4\pi\,(t-s))^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y,s)\, dy\, ds . \end{aligned} \tag{4.28}$$

Are loc următorul rezultat.

Teorema 18. *Fie $f \in C_c^{2,1}(\mathbb{R}^N \times [0,\infty))$ şi fie u definită prin relaţia (4.28). Atunci*

(i) $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^N \times (0,\infty))$.

(ii) $u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t)$, *pentru orice* $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty)$.

(iii) Pentru orice $x_0 \in \mathbb{R}^N$ avem

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} u(x,t) = 0 .$$

Demonstraţie. Funcţia $E(x,t)$ prezintă o singularitate în punctul $(x,t) = (0,0)$, deci trebuie evitată o derivare directă sub semnul integral. Folosind însă o schimbare de variabilă în (4.28) obţinem

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} E(y,s) f(x-y,t-s)\, dy\, ds .$$

Utilizând acum ipoteza $f \in C_c^{2,1}(\mathbb{R}^N \times [0,\infty))$ precum şi faptul că funcţia $E(y,s)$ este netedă în vecinătatea lui $s = t > 0$ avem

$$u_t(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} E(y,s) f_t(x-y,t-s)\, dy\, ds + \int_{\mathbb{R}^N} E(y,t) f(x-y,0)\, dy \tag{4.29}$$

şi

$$D^2u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} E(y,s) D_x^2 f(x-y, t-s)\, dy\, ds\,. \tag{4.30}$$

Din (4.29) şi (4.30) deducem că u_t, $D^2u \in C(\mathbb{R}^N \times (0,\infty))$ şi, în plus,

$$\begin{aligned}
&u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = \\
&\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} E(y,s) \left[\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right] f(x-y,t-s)\, dy\, ds + \int_{\mathbb{R}^N} E(y,t) f(x-y,0)\, dy = \\
&\int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^N} E(y,s) \left[-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y\right] f(x-y,t-s)\, dy\, ds + \\
&\int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} E(y,s) \left[-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y\right] f(x-y,t-s)\, dy\, ds + \int_{\mathbb{R}^N} E(y,t) f(x-y,0)\, dy =: \\
&A_\varepsilon + B_\varepsilon + K\,.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Folosind integrarea prin părţi obţinem

$$\begin{aligned}
A_\varepsilon = &\int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y\right) E(y,s)\, f(x-y,t-s)\, dy\, ds + \\
&\int_{\mathbb{R}^N} E(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon)\, dy - \int_{\mathbb{R}^N} E(y,t) f(x-y,0)\, dy = \\
&\int_{\mathbb{R}^N} E(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon)\, dy - K\,.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Am folosit în (4.32) faptul că funcţia E satisface ecuaţia căldurii. Pe de altă parte,

$$|B_\varepsilon| \le \left(\|f_t\|_{L^\infty} + \|D^2 f\|_{L^\infty}\right) \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} E(y,s)\, dy\, ds \le \varepsilon\, C\,. \tag{4.33}$$

Din (4.31)-(4.33) obţinem

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} E(y,\varepsilon)\, f(x-y,t-\varepsilon)\, dy = f(x,t) \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty)\,, \tag{4.34}$$

limita fiind calculată exact ca în demonstraţia teoremei 17. Din (4.28) rezultă în particular că

$$|u(x,t)| \le t\, \|f\|_{L^\infty} \to 0 \qquad \text{uniform când } t \to 0\,.$$

□

Din teoremele 17 şi 18 rezultă următorul rezultat pentru problema Cauchy neomogenă cu condiţii iniţiale neomogene.

Teorema 19. *Fie* $f \in C_c^{2,1}(\mathbb{R}^N \times [0,\infty))$ *şi* $g \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$. *Atunci funcţia*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} E(x-y,t)g(y)\,dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} E(x-y,t-s)f(y,s)\,dy\,ds$$

este o soluţie a problemei

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{în } \mathbb{R}^N \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & \text{în } \mathbb{R}^N\,. \end{cases} \tag{4.35}$$

4.6 Formula de medie pentru ecuaţia căldurii

Pentru $x \in \mathbb{R}^N$, $t \in \mathbb{R}$ şi $r > 0$ fixaţi, definim "bila ecuaţiei căldurii" centrată în (x,t) şi de rază r prin

$$B(x,t;r) := \left\{(y,s) \in \mathbb{R}^{N+1}\,;\ E(x-y,t-s) \geq \frac{1}{r^N}\right\}.$$

Observăm că $(y,s) \in B(0,0;r)$ dacă şi numai dacă $(y/r, s/r^2) \in B(0,0;1)$.

Considerăm ecuaţia omogenă a căldurii

$$u_t - \Delta u = 0 \qquad \text{în } \Omega_T\,. \tag{4.36}$$

Vom demonstra mai întâi următorul rezultat auxiliar.

Lema 4. *Avem*

$$\int_{B(0,0;1)} \frac{|y|^2}{s^2}\,dy\,ds = 4\,.$$

Demonstraţie. Fie $(x,s) \in B(0,0;1)$. Din definiţia acestei "bile" rezultă că

$$\frac{1}{(-4\pi\, s)^{N/2}}\, e^{\frac{|y|^2}{4s}} \geq 1\,,$$

adică

$$|y| \leq \sqrt{2Ns\, \ln(-4\pi s)}\,.$$

Prin urmare, aplicând formula schimbării de variabilă,

$$\int_{B(0,0;1)} \frac{|y|^2}{s^2}\, dy\, ds = \omega_N \int_{-\frac{1}{4\pi}}^{0} \frac{ds}{s^2} \left(\int_0^{\sqrt{2Ns\,\ln(-4\pi s)}} r^{N+1}\, dr \right) =$$
$$\frac{\omega_N}{N+2} \int_{-\frac{1}{4\pi}}^{0} (2N)^{\frac{N+2}{2}} (-s)^{\frac{N}{2}-1} \left[-\ln(-4\pi s)\right]^{\frac{N}{2}+1}\, ds =$$
$$\frac{\omega_N}{N+2} \int_0^{\frac{1}{4\pi}} (2N)^{\frac{N+2}{2}} u^{\frac{N}{2}-1} \left[-\ln(4\pi u)\right]^{\frac{N}{2}+1}\, du =$$
$$\frac{\omega_N}{N+2} (2N)^{\frac{N}{2}+1} (4\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_0^1 t^{\frac{N}{2}-1} (-\ln t)^{\frac{N}{2}+1}\, dt =$$
$$\frac{\omega_N}{N+2} (2N)^{\frac{N}{2}+1} (4\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_0^\infty e^{-(\frac{N}{2}-1)u} e^{-u} u^{\frac{N}{2}+1}\, du =$$
$$\frac{\omega_N}{N+2} 2^{-\frac{N}{2}+1} N^{\frac{N}{2}+1} \pi^{-\frac{N}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{Nu}{2}} u^{\frac{N}{2}+1}\, du =$$
$$\frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{(N+2)\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} 2^{-\frac{N}{2}+1} N^{\frac{N}{2}+1} \frac{2^{\frac{N}{2}+2}}{N^{\frac{N}{2}+2}\pi^{\frac{N}{2}}} \left(\frac{N}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right) = 4\,,$$

ceea ce încheie demonstraţia lemei. □

Teorema 20. *Presupunem că funcţia* $u \in C^{2,1}(\Omega_T)$ *este o soluţie a ecuaţiei căldurii (4.36). Atunci*

$$u(x,t) = \frac{1}{4r^N} \int_{B(x,t;r)} u(y,s)\, \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}\, dy\, ds\,, \tag{4.37}$$

pentru orice "bilă" $B(x,t;r)$ *inclusă în* Ω_T.

Demonstraţie. Putem presupune, fără a afecta cu nimic generalitatea enunţului, că $(x,t) = (0,0)$. Convenim să notăm prin $B(r)$ "bila" $B(0,0;r)$. Pentru orice $r > 0$ definim aplicaţia

$$\varphi(r) := \frac{1}{r^N} \int_{B(r)} u(y,s)\, \frac{|y|^2}{s^2}\, dy\, ds\,.$$

Prin schimbarea de variabile $y = ry'$ şi $s = r^2 s'$ observăm că

$$\varphi(r) = \int_{B(1)} u(ry, r^2 s)\, \frac{|y|^2}{s^2}\, dy\, ds\,. \tag{4.38}$$

Pe de altă parte

$$E(-y,-s) = \frac{1}{(-4\pi s)^{N/2}}\, e^{\frac{|y|^2}{4s}} \qquad \forall (y,s) \in \Omega \times (-\infty, 0)\,.$$

Observăm că

$$E_{y_i} = \frac{y_i}{2s}\,E \qquad \forall i = 1,\cdots,N \tag{4.39}$$

şi

$$\ln E = -\frac{N}{2}\,\ln(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s}\,. \tag{4.40}$$

Din (4.38) deducem că

$$\varphi'(1) = \int_{B(1)} \left(\sum_{i=1}^{N} y_i u_{y_i} \,\frac{|y|^2}{s^2} + 2u_s\,\frac{|y|^2}{s} \right) dy\,ds =: A + B\,. \tag{4.41}$$

Folosind acum (4.39) şi (4.40) găsim, folosind formula lui Green,

$$\begin{aligned} B = \int_{B(1)} 4u_s \sum_{i=1}^{N} y_i\,(\ln E)_{y_i}\,dy\,ds = \\ -\int_{B(1)} \left(4N\,u_s\,\ln E + 4\sum_{i=1}^{N} u_{sy_i} y_i\,\ln E \right) dy\,ds\,. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Observăm că nu apare nici o integrală pe frontieră în (4.42) deoarece $\ln E = 0$ pe $\partial B(1)$. Integrând prin părţi în (4.42) obţinem

$$\begin{aligned} B = \int_{B(1)} \left(-4N\,u_s\,\ln E + 4\sum_{i=1}^{N} u_{y_i} y_i\,(\ln E)_s \right) dy\,ds = \\ \int_{B(1)} \left[-4N\,u_s\,\ln E + 4\sum_{i=1}^{N} u_{y_i} y_i \left(-\frac{N}{2s} - \frac{|y|^2}{4s^2} \right) \right] dy\,ds = \\ \int_{B(1)} \left(-4N\,u_s\,\ln E - \frac{2N}{s}\,\sum_{i=1}^{N} u_{y_i} y_i \right) dy\,ds - A\,. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Ţinând acum cont că u verifică ecuaţia căldurii şi utilizând (4.41) şi (4.43) obţinem

$$\begin{aligned} \varphi'(1) = \int_{B(1)} \left(-4N\,\Delta u\,\ln E - \frac{2N}{s}\,\sum_{i=1}^{N} u_{y_i} y_i \right) dy\,ds = \\ \sum_{i=1}^{N} \int_{B(1)} \left(4N\,u_{y_i}\,(\ln E)_{y_i} - \frac{2N}{s}\,u_{y_i} y_i \right) dy\,ds = 0\,, \end{aligned} \tag{4.44}$$

conform (4.39).

Folosind acum (4.44) împreună cu observaţia importantă că $u(rx, r^2t)$ verifică, de asemenea, ecuaţia omogenă a căldurii, obţinem

$$\varphi'(r) = 0 \qquad \forall r > 0\,.$$

Deci

$$\varphi(r) = \lim_{t\to 0} \varphi(t) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^N} \int_{B(t)} u(y,s)\, \frac{|y|^2}{s^2}\, dy\, ds = 4u(0,0)\,,$$

căci, conform Lemei 4

$$\frac{1}{t^N} \int_{B(t)} \frac{|y|^2}{s^2}\, dy\, ds = \int_{B(1)} \frac{|y|^2}{s^2}\, dy\, ds = 4\,.$$

□

4.7 Principiul de maxim pentru ecuaţia căldurii

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă şi mărginită. Ca şi până acum, fie $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$ şi $\Gamma_T = (\Omega \times \{t = 0\}) \cup (\partial\Omega \times [0,T])$, unde $T > 0$.

Teorema următoare arată că dacă o soluţie a ecuaţiei căldurii îşi atinge maximul într-un punct **interior** lui Ω_T, atunci ea este **constantă** la orice moment **anterior** de timp.

Teorema 21. (Principiul de maxim pentru ecuaţia căldurii.) *Presupunem că $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ este o soluţie a ecuaţiei*

$$u_t - \Delta u = 0 \qquad \text{în } \Omega_T\,.$$

Atunci

(i) $\max\limits_{\overline{\Omega_T}} u = \max\limits_{\Gamma_T} u$.

(ii) Dacă, în plus, Ω este conexă şi există $(x_0, t_0) \in \overline{\Omega_T} \setminus \Gamma_T$ astfel încât

$$u(x_0, t_0) = \max_{\overline{\Omega_T}} u$$

atunci u este constantă în $\overline{\Omega_{t_0}}$.

Demonstraţie. Fie

$$M := u(x_0, t_0) = \max_{\overline{\Omega_T}} u\,.$$

Cum (x_0, t_0) este punct interior domeniului parabolic Ω_T, rezultă că $B(x_0, t_0; r) \subset \Omega_T$, pentru $r > 0$ suficient de mic. Deci, conform teoremei de medie pentru ecuaţia căldurii,

$$M = u(x_0, t_0) = \frac{1}{4r^N} \int_{B(x_0,t_0;r)} u(y, s) \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2}\, dy\, ds \le M\,,$$

ceea ce atrage

$$u \equiv M \qquad \text{în } B(x_0, t_0; r)\,. \tag{4.45}$$

Pentru a încheia demonstraţia este suficient să arătăm că funcţia u este constantă pe **toate** segmentele de dreaptă ce unesc punctul (x_0, t_0) cu puncte $(y, s) \in \Gamma_T$ având $s < t_0$. Fie aşadar un punct arbitrar $(y_0, s_0) \in \Gamma_T$, cu $s_0 < t_0$ şi fie L segmentul de dreaptă ce uneşte punctele (x_0, t_0) şi (y_0, s_0). Definim

$$r_0 := \inf\{s \ge s_0\,;\ u(x, t) = M\,,\ (x, t) \in L\,,\ s \le t \le t_0\}\,.$$

Cum funcţia u este continuă, rezultă că "inf" este atins. Fie acum $r_0 > s_0$ arbitrar ales. Rezultă că $u(z_0, r_0) = M$, întrucât $(z_0, r_0) \in L \cap \Omega_T$ şi conform (4.45). Dar "bila" $B(z_0, r_0; r)$ conţine segmentul $\{(y, t) \in L\,;\ r_0 - \varepsilon \le t \le r_0\}$, pentru $\varepsilon > 0$ suficient de mic. Aceasta contrazice însă definiţia lui r_0, ceea ce arată că, într-adevăr, $u \equiv M$ pe L. $\square$

Din teorema 21 rezultă ca o aplicaţie imediată următoarea teoremă de unicitate pe domenii mărginite.

Teorema 22. *Problema*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{în } \Omega_T \\ u = g & \text{pe } \Gamma_T \end{cases}$$

are cel mult o soluţie clasică.

Exerciţii.

1. Fie ecuaţia

$$u_t - u_{xx} = 0 \qquad \text{dacă } (x,t) \in \Omega_T := (0,1) \times (0,T)$$

şi consideraţi soluţia $u(x,t) = 1 - x^2 - 2t$. Aflaţi extremele lui u în $\overline{\Omega_T}$ şi comparaţi cu concluzia principiului de maxim pentru ecuaţia căldurii.

2. (i) Arătaţi următorul principiu de comparaţie pentru ecuaţia căldurii

$$u_t - u_{xx} = 0 \qquad \text{în } (0,a) \times (0,\infty)\,.$$

Presupunem că u şi v sunt două soluţii astfel încât $u \le v$ pentru $t = 0$, pentru $x = 0$ şi pentru $x = a$. Arătaţi că $u \le v$ în $[0,a] \times [0,\infty)$.

(ii) Mai general, arătaţi că dacă

$$u_t - u_{xx} = f \quad v_t - v_{xx} = g \qquad \text{în } (0,a) \times (0,\infty)\,,$$

$f \le g$ şi $u \le v$ pentru $x = 0$, $x = a$ şi $t = 0$, demonstraţi că $u \le v$ în $[0,a] \times [0,\infty)$.

(iii) Fie $v = v(x,t) : [0,\pi] \times [0,\infty)$ astfel încât $v_t - v_{xx} \ge \sin x$ în $[0,\pi] \times (0,\infty)$. Presupunem, în plus, că $v(0,t) \ge 0$, $v(\pi,t) \ge 0$ şi $v(x,0) \ge \sin x$. Utilizând eventual (ii) deduceţi că $v(x,t) \ge (1 - e^{-t}) \sin x$.

3. Scopul exerciţiului următor este de a demonstra că principiul de maxim nu rămâne adevărat în cazul ecuaţiilor cu coeficienţi variabili.

(i) Fie ecuaţia $u_t - u_{xx} = 0$. Verificaţi că funcţia $u(x,t) = -x^2 - 2xt$ este soluţie. Găsiţi maximul acestei funcţii în dreptunghiul $[-2,2] \times [0,1]$.

(ii) Identificaţi care din etapele demonstraţiei principiului de maxim nu rămâne valabilă în acest caz.

4. Fie u o soluţie a ecuaţiei

$$u_t - u_{xx} = 0 \qquad \text{în } [0,1] \times [0,\infty)\,.$$

Definim

$$M(T) = \max\{u(x,t)\,;\ (x,t) \in [0,1] \times [0,T]\}\,.$$

Stabiliţi monotonia aplicaţiei $[0,\infty) \ni T \longmapsto M(T)$.

5. Fie problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{în } (0,1)\times(0,\infty) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \forall t > 0 \\ u(x,0) = 4x(1-x) & \forall x \in (0,1)\,. \end{cases}$$

(i) Arătaţi că $0 < u(x,t) < 1$ pentru orice $(x,t) \in (0,1)\times(0,\infty)$.

(ii) Arătaţi că $u(x,t) = u(1-x,t)$ în $[0,1]\times[0,\infty)$.

(iii) Folosind eventual metode energetice arătaţi că aplicaţia

$$[0,\infty) \ni t \longmapsto \int_0^1 u^2(x,t)dx$$

este strict descrescătoare.

6. Fie problema

$$\begin{cases} u_t + cu_x = u_{xx} & \text{în } (0,1)\times(0,T] \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \forall t \in (0,T) \\ u(x,0) = f(x) & \forall x \in (0,1)\,, \end{cases}$$

unde $c \geq 0$ este o constantă dată şi $f(0) = f(1) = 0$. Arătaţi că o soluţie a acestei probleme satisface următorul principiu de maxim:

$$\inf_{x\in(0,1)} f(x) \leq u(x,t) \leq \sup_{x\in(0,1)} f(x) \qquad \forall (x,t) \in (0,1)\times(0,T).$$

Mai general, fie problema neliniară cu condiţie iniţială

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = u_{xx} & \text{în } (0,1)\times(0,T] \\ u(0,t) = u_0(t),\ u(1,t) = u_1(t) & \forall t \in (0,T) \\ u(x,0) = g(x) & \forall x \in (0,1)\,, \end{cases}$$

unde $f = f(u)$ este o funcţie netedă. Demonstraţi că o soluţie a acestei probleme satisface următorul principiu de maxim:

$$\inf_{(x,t)\in(0,1)\times(0,T)} \{u_0(x), u_1(x), g(x)\} \leq u(x,t) \leq$$

$$\sup_{(x,t)\in(0,1)\times(0,T)} \{u_0(x), u_1(x), g(x)\} \qquad \forall (x,t) \in (0,1)\times(0,T).$$

7. Fie $u \in C^2(\mathbb{R}^N \times (0,T)) \cap C(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ o soluţie a ecuaţiei

$$u_t - \Delta u = 0 \qquad \text{în } \mathbb{R}^N \times (0,T)\,.$$

Arătaţi că

$$\sup_{\mathbb{R}^N \times (0,T)} u \leq \sup_{\mathbb{R}^N} u(\cdot,0)\,.$$

Ind. Consideraţi funcţia $v(x,t) = u(x,t) - \varepsilon\,(2Nt + |x|^2)$.

8. Fie problema parabolică cu condiţie iniţială

$$\begin{cases} u_t = a(x,t)u_{xx} + \alpha u(x,t) & \text{în } (0,1) \times (0,T] \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \forall t \in (0,T) \\ u(x,0) = f(x) & \forall x \in (0,1)\,, \end{cases}$$

unde $a(x,t) \geq a_0 > 0$ pentru orice $(x,t) \in [0,1] \times [0,T]$ iar α este o constantă dată. Demonstraţi că

$$||u(\cdot,t)||_\infty \leq e^{\alpha t}||f||_\infty \qquad \forall t \in [0,T],$$

unde

$$||u(\cdot,t)||_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |u(x,t)|.$$

Ind. Consideraţi funcţia $v(x,t) = e^{-\alpha t}u(x,t)$.

4.8 Principiul de maxim pentru problema Cauchy

Considerăm mai întâi problema Cauchy omogenă

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{în } \mathbb{R}^N \times (0,T) \\ u(x,0) = g(x) & \forall x \in \mathbb{R}^N\,, \end{cases} \tag{4.46}$$

unde $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ este o funcţie dată.

Teorema 23. *Fie $g \in C(\mathbb{R}^N)$ şi $T > 0$ un număr finit. Presupunem că $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^N \times (0,T)) \cap C(\mathbb{R}^N \times [0,T))$ este o soluţie a problemei (4.46) care, în plus, satisface relaţia*

$$u(x,t) \leq A\,e^{a|x|^2} \qquad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T)\,. \tag{4.47}$$

Atunci

$$\sup_{\mathbb{R}^N\times[0,T)} u = \sup_{\mathbb{R}^N} g\,.$$

Demonstraţie. Vom proba mai întâi concluzia pentru $t \in (0, T_0)$, unde T_0 satisface

$$4aT_0 < 1\,.$$

Fie acum $\varepsilon > 0$ astfel încât

$$4a(T_0+\varepsilon) < 1\,.$$

Fixăm $y \in \mathbb{R}^N$ şi $\mu > 0$ şi definim aplicaţia

$$v(x,t) := u(x,t) - \frac{\mu}{(T_0+\varepsilon-t)^{N/2}}\, e^{\frac{|x-y|^2}{4(T_0+\varepsilon-t)}}\,.$$

Un calcul direct arată că funcţia v satisface

$$v_t - \Delta v = 0\,.$$

In plus,

$$v(x,0) = u(x,0) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{N/2}}\, e^{\frac{|x-y|^2}{4(T_0+\varepsilon)}} \leq u(x,0) = g(x)\,.$$

Dacă $|x-y| = r$ şi $t \in [0, T_0)$ atunci

$$\begin{aligned} v(x,t) = \quad & u(x,t) - \frac{\mu}{(T_0+\varepsilon-t)^{N/2}}\, e^{\frac{r^2}{4(T_0+\varepsilon-t)}} \leq \\ & A\, e^{a|x|^2} - \frac{\mu}{(T_0+\varepsilon-t)^{N/2}}\, e^{\frac{r^2}{4(T_0+\varepsilon-t)}} \leq \\ & A\, e^{a(|y|+r)^2} - \frac{\mu}{(T_0+\varepsilon)^{N/2}}\, e^{\frac{r^2}{4(T_0+\varepsilon)}}\,. \end{aligned}$$

Dar

$$\frac{1}{4(T_0+\varepsilon)} = a+\delta \qquad \text{cu } \delta > 0\,.$$

Deci, dacă $r > 0$ este ales suficient de mare, atunci

$$v(x,t) \leq A\, e^{a(|y|+r)^2} - \mu\ (4(a+\delta))^{N/2}\ e^{(a+\delta)r^2} \leq \sup_{\mathbb{R}^N} g\,.$$

Cum maximul lui v se atinge pe frontiera parabolică, în virtutea principiului de maxim pentru ecuaţia căldurii, rezultă că, prin trecere la limită cu $\delta \to 0$,

$$v(x,t) \leq \sup_{\mathbb{R}^N} g \qquad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T_0]\,.$$

Se foloseşte în continuare un procedeu iterativ, pentru a "împinge" concluzia până la T. Mai precis, fixăm $T_0 = (8a)^{-1}$ şi considerăm acum momentul $t = T_0$ ca moment iniţial. Folosind un raţionament analog cu cel anterior, deducem aceeaşi concluzie pentru orice $t \in [T_0, 2T_0]$, apoi pentru $t \in [2T_0, 3T_0]$ etc. $\square$

Chapter 5

Probleme la limită de tip hiperbolic

5.1 Generalităţi despre ecuaţia undelor

Fie Ω un deschis arbitrar din $\mathbb{R}^N$. Vom studia ecuaţia

$$u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 \qquad \forall (x,t) \in \Omega \times (0,\infty)\,, \tag{5.1}$$

care este cunoscută sub numele de **ecuaţia undelor**. Aceasta deoarece ea descrie mişcarea coardei vibrante (dacă $N = 1$), deplasarea membranei (dacă $N = 2$) sau a solidului elastic (pentru $N = 3$).

Vom schiţa în cele ce urmează modul în care se deduce ecuaţia (5.1). Fie $\omega \subset\subset \Omega$ un deschis arbitrar cu frontiera suficient de netedă. Conform legilor fizicii, acceleraţia înăuntrul lui ω este dată de

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_\omega u\,dx = \int_\omega u_{tt}\,dx\,.$$

Fie $\vec{F}$ forţa (elastică) care acţionează pe domeniul ω prin intermediul frontierei acestuia. Deci, componenta acestei forţe pe direcţia normalei exterioare este

$$-\int_{\partial\omega} \vec{F}\cdot\nu\,d\sigma\,.$$

Presupunând că masa $m = 1$ şi aplicând legea a doua a lui Newton, obţinem

$$\int_\omega u_{tt}\,dx = -\int_{\partial\omega} \vec{F}\cdot\nu\,d\sigma = -\int_\omega \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,,$$

pentru orice $\omega \subset\subset \Omega$. Deci

$$u_{tt} = -\mathrm{div}\, \vec{F} \qquad \text{în } \Omega \times (0, T)\,. \tag{5.2}$$

Din considerente fizice, în cazul corpurilor elastice $\vec{F}$ depinde de deplasarea gradientului. Aşadar, din (5.2) găsim

$$u_{tt} + \mathrm{div}\, (F(\nabla u)) = 0 \qquad \text{în } \Omega \times (0, T)\,. \tag{5.3}$$

Pentru u şi ∇u suficient de mici, legea lui Hooke arată că

$$F(\nabla u) \sim -a\, \nabla u \qquad a > 0\,. \tag{5.4}$$

Din (5.3) şi (5.4) deducem că

$$u_{tt} - a\, \Delta u = 0 \qquad \text{în } \Omega \times (0, T)\,.$$

Interpretarea fizică sugerează că este natural să se specifice condiţii iniţiale care să implice deplasarea u şi viteza u_t la momentul $t = 0$.

Exerciţii.

1. Folosind metoda separării variabilelor rezolvaţi problema la limită

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2\, u_{xx} = 0 & \text{în } (0, \pi) \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x) & \forall x \in (0, \pi) \\ u_t(x, 0) = g(x) & \forall x \in (0, \pi) \\ u(0, t) = u(\pi, t) & \forall t \in (0, \infty)\,. \end{cases}$$

R. Punând $u(x, t) = X(x)T(t)$ se obţine $X_n(x) = \sin nx$ şi $T_n(t) = a_n\, \sin nt + b_n\, \cos nt$, unde

$$a_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^\pi g(x)\, \sin nx\, dx \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx\, dx\,.$$

Frecvenţa fundamentală $\nu_1 = \frac{1}{2\pi}$ determină tonul fundamental iar multiplii săi determină supertonurile sau armonicele.

2. Rezolvaţi problema

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & (x,t) \in (0,\infty) \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 & x > 0 \\ u(0,t) = \sin t & t > 0\,. \end{cases}$$

3. Pentru a, b, c numere reale fixate considerăm ecuaţia

$$u_{tt} + au_x + bu_t + cu = u_{xx}\,.$$

Arătaţi că această ecuaţie poate fi redusă la o ecuaţie fără termeni de ordinul întâi prin substituţia

$$u(x,t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x,t)\,.$$

4. Fie c un număr real fixat.

(i) Arătaţi că ecuaţia

$$u_{tt} + cu = u_{xx}$$

poate fi redusă la ecuaţia

$$v_{\xi\eta} + \lambda v = 0\,,$$

unde $\lambda = c/4$.

(ii) Fie $\lambda > 0$. Faceţi substituţia $v(\xi,\eta) = f(2\sqrt{\lambda\xi\eta})$ şi deduceţi ecuaţia satisfăcută de f. Care este soluţia acestei ecuaţii satisfăcând condiţia $f(0) = 1$?

(iii) Găsiţi o soluţie a problemei

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - cu & (x,t) \in (-t,t) \times (0,\infty) \\ u(-t,t) = u(t,t) = 0 & t > 0\,. \end{cases}$$

5. Fie u o soluţie a ecuaţiei undelor

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \qquad \text{în } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}\,. \tag{5.5}$$

Fie funcţionala

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ t\left(|u_t|^2 + |\nabla u|^2\right) + 2u_t \sum_{i=1}^{N} x_i u_{x_i} + (N-1)\, u\, u_t \right\} dx \qquad \forall t > 0\,.$$

Arătaţi că E este constantă.

Ind. Se înmulţeşte cu $2tu_t + 2\sum_{i=1}^{N} x_i u_{x_i} + (N-1)u$ în (5.5) şi se integrează pe $\mathbb{R}^N$.

6. Fie $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$ şi $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ o soluţie a ecuaţiilor lui Maxwell

$$\begin{cases} \vec{E}_t = \mathrm{rot}\,\vec{B} \\ \vec{B}_t = -\mathrm{rot}\,\vec{E} \\ \mathrm{div}\,\vec{B} = \mathrm{div}\,\vec{E} = 0. \end{cases}$$

Arătaţi că

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

unde $u = E_i$ sau $u = B_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

5.2 Metode energetice în studiul problemelor hiperbolice

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă şi mărginită. Fie $f \in C(\overline{\Omega_T})$, $g \in C(\Gamma_T)$ şi $h \in C(\overline{\Omega})$. Considerăm următoarea problemă la limită pentru ecuaţia undelor:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f & \text{în } \Omega_T \\ u = g & \text{în } \Gamma_T \\ u_t(x,0) = h(x), & x \in \Omega\,. \end{cases} \tag{5.6}$$

Teorema 24. *Problema (5.6) are cel mult o soluţie $u \in C^2(\overline{\Omega_T})$.*

Demonstraţie. Fie u_1, u_2 soluţii arbitrare ale problemei (5.6) şi $u := u_1 - u_2$. Rezultă că u verifică

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{în } \Omega_T \\ u = 0 & \text{în } \Gamma_T \\ u_t(x,0) = 0 & \text{în } \Omega \times \{t = 0\}\,. \end{cases} \tag{5.7}$$

Definim funcţionala

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (u_t^2 + |\nabla u|^2)dx \qquad t \in [0, T]\,.$$

Prin urmare, conform primei formule a lui Green,

$$\begin{aligned} E'(t) = \; & \int_\Omega (u_t u_{tt} + \nabla u \cdot \nabla u_t)\, dx = \\ & \int_\Omega u_t u_{tt}\, dx + \int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma - \int_\Omega u_t\, \Delta u\, dx = \\ & \int_\Omega u_t (u_{tt} - \Delta u)\, dx = 0\,, \end{aligned} \tag{5.8}$$

căci $u = 0$ pe $\partial\Omega \times [0,T]$ atrage $u_t = 0$ pe $\partial\Omega \times [0,T]$. Observând acum că $E(0) = 0$ rezultă din (5.8) că

$$E(t) = 0 \qquad \forall t \in [0,T]\,.$$

De aici rezultă că

$$u_t = 0 \;\text{ şi }\; \nabla u = 0 \qquad \text{în } \Omega_T\,,$$

adică u este constantă în Ω_T. Cum $u = 0$ pe $\Omega \times \{t = 0\}$ rezultă de aici că $u = 0$ în Ω_T. □

5.2.1 Domeniul de dependenţă al soluţiilor

Revenim la ecuaţia omogenă a undelor în întregul spaţiu

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \qquad \text{în } \mathbb{R}^N \times (0,\infty)\,. \tag{5.9}$$

Fixăm $x_0 \in \mathbb{R}^N$ şi $t_0 > 0$ şi considerăm conul cu vârful în (x_0,t_0) definit prin

$$C = C(x_0,t_0) := \{(x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty)\,;\; 0 \le t \le t_0 \text{ şi } |x - x_0| \le t_0 - t\}\,.$$

Teorema 25. *Dacă u este soluţie a ecuaţiei (5.9) şi $u = u_t = 0$ pe mulţimea $C(x_0,t_0) \cap \{t = 0\}$ atunci $u = 0$ în C.*

Demonstraţie. Fie

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{B(x_0,t_0-t)} (u_t^2 + |\nabla u|^2)\, dx \qquad t > 0\,.$$

Avem

$$
\begin{aligned}
E'(t) = & \int_{B(x_0,t_0-t)} (u_t u_{tt} + \nabla u \cdot \nabla u_t)\, dx - \frac{1}{2} \int_{\partial B(x_0,t_0-t)} (u_t^2 + |\nabla u|^2)\, d\sigma = \\
& \int_{B(x_0,t_0-t)} u_t (u_{tt} - \Delta u)\, dx + \int_{\partial B(x_0,t_0-t)} u_t \, \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma - \\
& \frac{1}{2} \int_{\partial B(x_0,t_0-t)} (u_t^2 + |\nabla u|^2)\, d\sigma = \\
& \int_{\partial B(x_0,t_0-t)} \left(u_t \, \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{1}{2}\, u_t^2 - \frac{1}{2}\, |\nabla u|^2 \right) d\sigma\,.
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

Dar

$$
\left| u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} \right| \leq |u_t|\, |\nabla u| \leq \frac{1}{2}\, (u_t^2 + |\nabla u|^2)\,. \tag{5.11}
$$

Din (5.10) şi (5.11) rezultă că

$$
E'(t) \leq 0 \qquad \forall t > 0\,.
$$

Deci $E(t) \leq E(0) = 0$, adică $E(t) = 0$ pentru orice $t \in [0, t_0]$. Aceasta atrage $u_t = 0$ şi $\nabla u = 0$, adică u este constantă în conul $C(x_0, t_0)$. Cum, din ipoteză, $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$, rezultă concluzia. □

Exerciţii.

1. Demonstraţi că soluţia problemei

$$
\begin{cases}
u_{tt} + u_t = u_{xx} & \text{dacă } (x,t) \in (0,1) \times (0,\infty) \\
u(x,0) = f(x) & \forall x \in (0,1) \\
u_t(x,0) = g(x) & \forall x \in (0,1) \\
u(0,t) = u(1,t) = 0 & \forall t \geq 0
\end{cases}
$$

verifică estimarea

$$
E(t) \leq E(0) \qquad \forall t \geq 0,
$$

unde

$$
E(t) = \int_0^1 \left(u_x^2(x,t) + u_t^2(x,t) \right) dx.
$$

2. **Legea conservării energiei pentru ecuaţia undelor**. Fie problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{în } \Omega_T \\ u(x,0) = g(x) & \forall x \in \Omega \\ u_t(x,0) = h(x) & \forall x \in \Omega \\ u(x,t) = 0 & \forall (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \end{cases}$$

precum şi energia totală asociată acestui sistem

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(u_t^2 + |\nabla u|^2 \right) dx \qquad t \in [0,T)\,.$$

Folosind eventual ideile din demonstraţia teoremei 24, arătaţi că $E(t) =$ Const., pentru orice $t \in [0,T)$.

5.3 Formula lui d'Alembert

Ne propunem acum să găsim o formulă explicită pentru soluţia problemei coardei vibrante

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{în } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = h(x) & \forall x \in \mathbb{R}\,, \end{cases} \tag{5.12}$$

unde $g \in C^1(\mathbb{R})$ iar $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă. Pornind de la observaţia că ecuaţia $u_{tt} - u_{xx} = 0$ se mai poate scrie sub forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0\,,$$

facem schimbarea de funcţie

$$v(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x,t)\,.$$

Rezultă că

$$v_t + v_x = 0\,,$$

ceea ce atrage $v(x,t) = \varphi(x-t)$. In plus, $\varphi(x) = v(x,0)$. Am obţinut problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_x(x,t) = \varphi(x-t) & \text{în } \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & \forall x \in \mathbb{R}\,. \end{cases} \tag{5.13}$$

Fixăm acum $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ şi considerăm aplicaţia

$$w(s) := u(x-s, t+s) \qquad s \geq -t\,.$$

Avem

$$w'(s) = -u_x(x-s,t+s) + u_t(x-s,t+s) = \varphi(x-t-2s)\,.$$

Aplicând formula lui Leibnitz-Newton obţinem

$$w(0) - w(-t) = \int_{-t}^{0} \varphi(x-t-2s)\,ds = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \varphi(y)\,dy\,.$$

Ţinând acum cont de definiţia lui w şi de condiţia iniţială din (5.12) obţinem

$$u(x,t) = g(x+t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \varphi(y)\,dy\,. \tag{5.14}$$

Dar

$$\varphi(y) = v(y,0) = u_t(y,0) - u_x(y,0) = h(y) - g'(y)\,. \tag{5.15}$$

Din (5.14) şi (5.15) deducem **formula lui d'Alembert**

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy + \frac{g(x+t)+g(x-t)}{2}\,. \tag{5.16}$$

In particular observăm că soluţia problemei (5.12) este de forma

$$u(x,t) = F(x+t) + G(x-t)\,.$$

Din (5.16) deducem în particular că dacă $g \in C^2$ şi $h \in C^1$ atunci u este de clasă C^2. Mai general, dacă $g \in C^k$ şi $h \in C^{k-1}$ atunci $u \in C^k$.

Exerciţii.

1. Găsiţi soluţia problemei cu valori iniţiale

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{în } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x,0) = 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = f(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

şi studiaţi ce se întâmplă când $x \to \infty$. Studiaţi problema analoagă pentru ecuaţia $u_{tt} + u_{xx} = 0$ şi comparaţi rezultatele.

2. (i) Utilizând schimbarea de variabile $\xi = x + t$, $\eta = x - t$, arătaţi că $u_{tt} - u_{xx} = 0$ dacă şi numai dacă $u_{\xi\eta} = 0$.

(ii) Folosiţi rezultatul de mai sus pentru a regăsi formula lui d'Alembert.

5.4 Ecuaţia Euler-Poisson-Darboux

Fie problema la limită

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{în } \mathbb{R}^N \times (0, \infty) \\ u(x,0) = g(x) & \forall x \in \mathbb{R}^N \\ u_t(x,0) = h(x) & \forall x \in \mathbb{R}^N \,, \end{cases} \tag{5.17}$$

unde $g \in C^k(\mathbb{R}^N)$ şi $h \in C^{k-1}(\mathbb{R}^N)$, $k \geq \frac{N+3}{2}$. Definim aplicaţiile

$$U(x;r,t) = \begin{cases} \displaystyle\oint_{\partial B(x,r)} u(y,t)\, d\sigma(y) & \text{dacă } r > 0 \\ u(x,t) & \text{dacă } r = 0 \\ U(x;-r,t) & \text{dacă } r < 0 \,, \end{cases}$$

$$G(x;r) = \oint_{\partial B(x,r)} g(y)\, d\sigma(y) \qquad \forall r > 0 \,,$$

$$H(x;r) = \oint_{\partial B(x,r)} h(y)\, d\sigma(y) \qquad \forall r > 0 \,.$$

Are loc următorul rezultat

Teorema 26. (Euler-Poisson-Darboux). *Pentru orice $x \in \mathbb{R}^N$ fixat avem $U(x;\cdot,\cdot) \in C^k(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ şi, în plus, această funcţie verifică*

$$\begin{cases} U_{tt} = U_{rr} + \dfrac{N-1}{r}\, U_r & \text{pe } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ U(r,0) = G(r) & \forall r > 0 \\ U_t(r,0) = H(r) & \forall r > 0\,. \end{cases} \tag{5.18}$$

Demonstraţie. Din definiţia lui U, pentru orice $r > 0$,

$$U(x;r,t) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y,t)\, d\sigma(y)\,.$$

Cu schimbarea de variabilă $y = x + rz$ obţinem

$$U(x;r,t) = \frac{1}{\omega_N} \int_{\partial B(0,1)} u(x+rz,t)\, d\sigma(z) = \oint_{\partial B(0,1)} u(x+rz,t)\, d\sigma(z)\,.$$

Prin urmare

$$\begin{aligned} U_r(x;r,t) = & \oint_{\partial B(0,1)} \nabla u(x+rz,t)\cdot z\, d\sigma(z) = \oint_{\partial B(x,r)} \nabla u(y,t)\cdot \frac{y-x}{r}\, d\sigma(y) = \\ & \oint_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y,t)\, d\sigma(y) = \frac{r}{N} \oint_{B(x,r)} \Delta u(y)\, dy\,. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Rezultă că

$$\lim_{r \searrow 0} U_r(x;r,t) = \lim_{r \nearrow 0} U_r(x;r,t) = 0\,.$$

Folosind acum faptul că u este soluţie a problemei (5.17) şi utilizând (5.19) obţinem

$$U_r = \frac{r}{N} \oint_{B(x,r)} u_{tt}\, dy = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{B(x,r)} u_{tt}\, dy\,.$$

Rezultă că, pentru orice $r > 0$,

$$(r^{N-1}U_r)_r = \frac{1}{\omega_N} \int_{\partial B(x,r)} u_{tt}\, d\sigma(y) = r^{N-1} \oint_{\partial B(x,r)} u_{tt}\, d\sigma(y) = r^{N-1}\, U_{tt}\,,$$

ceea ce încheie demonstraţia. $\square$

5.5 Formula lui Kirkhoff

5.5.1 Cazul $N =$ impar

Continuăm studiul problemei (5.17) dacă N este un număr impar. Pentru a fixa ideile şi uşura calculele, vom presupune $N = 3$, care corespunde situaţiei undelor sferice. Revenim la ecuaţia Euler-Poisson-Darboux unu-dimensională (5.18). Pentru aceasta fixăm $x \in \mathbb{R}^3$ şi notăm cu $U(x; r, t)$ soluţia problemei (5.18). Fie

$$\tilde{U}(r,t) = rU(x;r,t) \quad \tilde{G}(r) = rG(x;r) \quad \tilde{H}(r) = rH(x;r)\,.$$

Din condiţiile iniţiale rezultă

$$\tilde{U}(r,0) = \tilde{G}(r) \qquad \tilde{U}_t(r,0) = \tilde{H}(r)\,.$$

Lema 5. *Funcţia $\tilde{U}$ satisface proprietatea*

$$\tilde{U}_{rr} = \tilde{U}_{tt} \qquad \forall (r,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)\,.$$

Demonstraţie. Avem

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{rr} = \quad & (rU)_{rr} = (rU_r + U)_r = \\ & 2U_r + rU_{rr} = rU_{tt} = \tilde{U}_{tt}\,, \end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstraţia lemei. □

Aplicând acum formula lui d'Alembert în dimensiune 1 avem

$$\tilde{U}(r,t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{G}(r+t) + \tilde{G}(r-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{r-t}^{r+t} \tilde{H}(y)\,dy \qquad \forall (r,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)\,.$$

Dar

$$u(x,t) = \lim_{r\to 0} U(x;r,t)\,.$$

Ţinând cont de faptul că

$$\tilde{U}(r,t) = r\,U(x;r,t)\,.$$

Prin urmare,

$$\begin{aligned}
&u(x,t) = \lim_{r\to 0} U(x;r,t) = \lim_{r\to 0} \frac{\tilde{U}(r,t)}{r} = \\
&\lim_{r\to 0}\left[\frac{\tilde{G}(t+r)-\tilde{G}(t-r)}{2r} + \frac{1}{2r}\int_t^{t+r}\tilde{H}(y)\,dy + \frac{1}{2r}\int_{r-t}^{-t}\tilde{H}(y)\,dy\right] = \\
&\tilde{G}'(t) + \tilde{H}(t)\,,
\end{aligned} \tag{5.20}$$

căci $\tilde{G}$ şi $\tilde{H}$ sunt funcţii impare. Dar

$$\tilde{G}(t) = t\,G(x;t) = t\oint_{\partial B(x,t)} g(y)\,d\sigma(y)\,.$$

Deci

$$\begin{aligned}
\tilde{G}'(t) = \quad & \left(t\oint_{\partial B(x,t)} g(y)\,d\sigma(y)\right)' = \\
& \oint_{\partial B(x,t)} g(y)\,d\sigma(y) + t\left(\oint_{\partial B(x,t)} g(y)\,d\sigma(y)\right)' = \\
& \oint_{\partial B(x,t)} g(y)\,d\sigma(y) + t\left(\oint_{\partial B(0,1)} g(x+tz)\,d\sigma(z)\right)' = \\
& \oint_{\partial B(x,t)} g(y)\,d\sigma(y) + t\oint_{\partial B(0,1)} g'(x+tz)\cdot z\,d\sigma(z) = \\
& \oint_{\partial B(x,t)} g(y)\,d\sigma(y) + t\oint_{\partial B(x,t)} g'(y)\cdot\frac{y-x}{t}\,d\sigma(y)\,.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Din (5.20) şi (5.21) rezultă

$$u(x,t) = \oint_{\partial B(x,t)} \left[th(y) + g(y) + g'(y)\cdot(y-x)\right]\,d\sigma(y)\,, \tag{5.22}$$

cunoscută sub numele de **formula lui Kirkhoff**. Comparând cu formula lui d'Alembert (5.16) corespunzătoare situaţiei $N = 1$ observăm de această dată apariţia contribuţiei derivatei lui g. Acest lucru sugerează că dacă $N > 1$ o soluţie a ecuaţiei undelor nu este la intervale pozitive de timp la fel de netedă ca la momentul iniţial, reflectat de aplicaţia g. Remarcăm şi faptul că pentru a calcula valoarea soluţiei într-un punct (x,t) e suficient să cunoaştem valorile lui u, u_t şi ∇u **doar** pe frontiera bilei centrate în x şi de rază t.

Exerciţii.

1. O **undă sferică** este o soluţie a ecuaţiei undelor (pentru $N = 3$) de forma $u(r,t)$. Aşadar, ecuaţia undelor devine

$$u_{tt} = u_{rr} + \frac{2}{r}\, u_r\,.$$

(i) Faceţi schimbarea de variabilă $v = ru$. Ce ecuaţie se obţine?

(ii) Găsiţi soluţia generală a ecuaţiei obţinute.

(iii) Folosiţi apoi formula lui d'Alembert pentru a rezolva problema

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{rr} + \dfrac{2}{r}\, u_r & \forall (r,t) \in (0,\infty)\times(0,\infty) \\ u(r,0) = g(r) & \forall r > 0 \\ u_t(r,0) = h(r) & \forall r > 0\,, \end{cases}$$

unde g şi h sunt funcţii pare.

5.5.2 Cazul $N =$ par

Pentru a fixa ideile vom presupune $N = 2$, care descrie în practică undele cilindrice. Fie u o soluţie a problemei

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{în } \mathbb{R}^2 \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & \forall x \in \mathbb{R}^2 \\ u_t(x,0) = h(x) & \forall x \in \mathbb{R}^2\,. \end{cases} \tag{5.23}$$

Pentru orice $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ notăm $\overline{x} = (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3$ şi

$$\overline{g}(\overline{x}) = g(x_1,x_2) \qquad \overline{h}(\overline{x}) = h(x_1,x_2) \qquad \forall \overline{x} = (x_1,x_2,0) \in \mathbb{R}^3\,.$$

Fie $\overline{u}(\overline{x},t) := u(x_1,x_2,t)$. Această funcţie verifică

$$\begin{cases} \overline{u}_{tt} - \Delta \overline{u} = 0 & \text{în } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \\ \overline{u}(\overline{x},0) = \overline{g}(\overline{x}) & \forall \overline{x} = (x_1,x_2,0) \in \mathbb{R}^3 \\ \overline{u}_t(\overline{x},0) = \overline{h}(\overline{x}) & \forall \overline{x} = (x_1,x_2,0) \in \mathbb{R}^3\,. \end{cases} \tag{5.24}$$

Aplicând formula lui Kirkhoff (5.22) putem scrie

$$u(x,t) = \overline{u}(\overline{x},t) = \oint_{\partial B(\overline{x},t)} \left(t\overline{h}(\overline{y}) + \overline{g}(\overline{y}) + \overline{g}'(\overline{y}) \cdot (\overline{y} - \overline{x}) \right)\, d\sigma(\overline{y})\,. \tag{5.25}$$

Dar, prin definiţie,

$$\oint_{\partial B(\overline{x},t)} \overline{g}\, d\overline{\sigma} = \frac{1}{4\pi\, t^2} \int_{\partial B(\overline{x},t)} \overline{g}\, d\overline{\sigma}\,. \tag{5.26}$$

Pe de altă parte, pe frontiera bilei $B(\overline{x},t)$ avem

$$y_3 - x_3 = \pm\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}\,,$$

adică

$$y_3 = \pm\sqrt{t^2 - |y - x|^2}\,, \tag{5.27}$$

căci $x_3 = 0$. Deci, din (5.26) şi (5.27),

$$\oint_{\partial B(\overline{x},t)} \overline{g}\, d\overline{\sigma} = \frac{1}{2\pi\, t^2} \int_{B(x,t)} g(y_1, y_2) \left[1 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_2}\right)^2\right]^{1/2} dy_1\, dy_2\,. \tag{5.28}$$

Observând că

$$1 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_2}\right)^2 = 1 + \frac{(y_1 - x_1)^2}{t^2 - |y - x|^2} + \frac{(y_2 - x_2)^2}{t^2 - |y - x|^2}\,,$$

relaţia (5.28) devine

$$\begin{aligned} &\oint_{\partial B(\overline{x},t)} \overline{g}\, d\overline{\sigma} = \frac{1}{2\pi\, t^2} \cdot t \int_{B(x,t)} \frac{g(y)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}}\, dy = \\ &\frac{1}{2\pi\, t} \int_{B(x,t)} \frac{g(y)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}}\, dy = \\ &\frac{t}{2} \oint_{B(x,t)} \frac{g(y)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}}\, dy\,. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Procedând analog pentru celelalte două integrale din (5.25), avem

$$\oint_{\partial B(\overline{x},t)} \overline{h}\, d\overline{\sigma} = \frac{t}{2} \oint_{B(x,t)} \frac{h(y)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}}\, dy \tag{5.30}$$

şi

$$\oint_{\partial B(\overline{x},t)} \overline{g}'(\overline{y}) \cdot (\overline{y} - \overline{x})\, d\overline{\sigma}(\overline{y}) = \frac{t}{2} \oint_{B(x,t)} \frac{g'(y) \cdot (y - x)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}}\, dy\,. \tag{5.31}$$

Din (5.25) şi (5.29)-(5.31) obţinem următoarea formulă a lui Kirkhoff pentru $N = 2$:

$$u(x,t) = \frac{t}{2} \oint_{B(x,t)} \frac{g(y) + th(y) + g'(y) \cdot (y - x)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}} dy\,. \tag{5.32}$$

Remarcăm că, spre deosebire de cazul $N = 3$ (vezi formula (5.22)) în această situaţie avem nevoie de informaţii cu privire la valorile lui u, u_t şi ∇u pe **întreaga** bilă $B(x,t)$ şi nu numai de valorile acestor funcţii pe frontiera bilei respective.

5.6 Ecuaţia neomogenă a undelor. Principiul lui Duhamel

Ne propunem să dăm o formulă explicită pentru soluţia problemei neomogene

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f & \text{în } \mathbb{R}^N \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 & \forall x \in \mathbb{R}^N . \end{cases} \tag{5.33}$$

Pentru $s \geq 0$ fixat, fie $u(x,t;s)$ soluţia problemei omogene

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t;s) - \Delta_x u(x,t;s) = 0 & \text{în } \mathbb{R}^N \times (s,\infty) \\ u(x,s;s) = 0 & \forall x \in \mathbb{R}^N \\ u_t(x,s;s) = f(x,s) & \forall x \in \mathbb{R}^N . \end{cases} \tag{5.34}$$

Principiul lui Duhamel afirmă că funcţia

$$u(x,t) := \int_0^t u(x,t;s)\, ds \tag{5.35}$$

este soluţie a problemei (5.33). Mai precis, are loc următorul rezultat

Teorema 27. *Fie $f : \mathbb{R}^N \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie netedă. Atunci funcţia u definită în (5.35) satisface problema neomogenă (5.33).*

Demonstraţie. Ţinând cont de definiţia lui u avem

$$u_t(x,t) = u(x,t;t) + \int_0^t u_t(x,t;s)\, ds = \int_0^t u_t(x,t;s)\, ds .$$

Deci

$$u_{tt}(x,t) = u_t(x,t;t) + \int_0^t u_{tt}(x,t;s)\, ds = f(x,t) + \int_0^t u_{tt}(x,t;s)\, ds . \tag{5.36}$$

In plus,

$$\Delta u(x,t) = \int_0^t \Delta u(x,t;s)\,ds = \int_0^t u_{tt}(x,t;s)\,ds\,. \tag{5.37}$$

Din (5.36) şi (5.37) rezultă că

$$u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t) \qquad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty)\,.$$

Evident

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N\,,$$

ceea ce încheie demonstraţia. □

Cazuri particulare:

1) $N = 1$. In acest caz,

$$u(x,t;s) = \frac{1}{2} \int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y,s)\,dy\,.$$

Deci

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y,s)\,dy\,ds\,,$$

adică soluţia devine

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-s}^{x+s} f(y,t-s)\,dy\,ds\,.$$

2) $N = 3$. Conform formulei lui Kirkhoff (5.22) putem scrie

$$u(x,t;s) = (t-s) \oint_{\partial B(x,t-s)} f(y,s)\,d\sigma(y)\,.$$

Prin urmare

$$\begin{aligned} u(x,t) = & \int_0^t (t-s) \left(\oint_{\partial B(x,t-s)} f(y,s)\,d\sigma(y) \right) ds = \\ & \frac{1}{4\pi} \int_0^t \int_{\partial B(x,t-s)} \frac{f(y,s)}{t-s}\,d\sigma(y)\,ds = \\ & \frac{1}{4\pi} \int_0^t \int_{\partial B(x,r)} \frac{f(y,t-r)}{r}\,d\sigma(y)\,dr\,. \end{aligned}$$

In concluzie

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi} \int_{B(x,t)} \frac{f(y,t-|y-x|)}{|y-x|}\,dy\,.$$

Chapter 6

Soluţii slabe pentru problemele la limită

The sophisticated methods of Schwarz, Neumann and Poincaré essentially solved the boundary value problems for the Laplace equation. However, these methods cannot be directly extended to more general cases... I am convinced that it will be possible to get these existence proofs by a *general basic idea*, towards the Dirichlet principle points. Perhaps it will then also be possible to answer the question of whether or not every regular variational problem possesses a solution if, with regard to boundary conditions, certain assumptions are fulfilled and if, when necessary, one sensibly *generalizes* the concept of *solution*.

David Hilbert, 1900 (Paris lecture at the International Congress of Mathematics)

6.1 Soluţii slabe pentru problemele de tip eliptic

In studiul soluţiilor slabe ale problemelor eliptice vom aplica următorul rezultat clasic:

Lema lui Lax-Milgram: *Fie H un spaţiu Hilbert real şi $a(u,v)$ o formă biliniară, continuă şi coercivă definită pe H. Fie, de asemenea, o funcţională liniară şi continuă $\varphi : H \to \mathbb{R}$. Atunci există şi este unic un element $u \in H$ astfel încât*

$$a(u,v) = \varphi(v) \qquad \text{pentru orice } v \in H\,. \tag{6.1}$$

Dacă, în plus, a este simetrică, atunci elementul u este caracterizat de proprietatea că

$$\frac{1}{2}\,a(u,u) - \varphi(u) = \min_{v\in H}\left\{\frac{1}{2}\,a(v,v) - \varphi(v)\right\}.$$

In terminologia calculului variaţional, ecuaţia (6.1) se numeşte **ecuaţia Euler-Lagrange** asociată **funcţionalei energetice**

$$E(v) = \frac{1}{2}\,a(v,v) - \varphi(v) \qquad v \in H\,. \tag{6.2}$$

In anumite situaţii vom folosi următoare variantă mai generală a lemei lui Lax-Milgram:

Teorema lui Stampacchia: *Fie H un spaţiu Hilbert real şi $a(u,v)$ o formă biliniară, continuă şi coercivă definită pe H. Fie, de asemenea, K o submulţime convexă şi închisă a lui H şi o funcţională liniară şi continuă $\varphi : H \to \mathbb{R}$. Atunci există şi este unic un element $u \in K$ astfel încât*

$$a(u, v-u) \geq \varphi(v-u) \qquad \forall v \in K\,.$$

Dacă, în plus, a este simetrică, atunci elementul $u \in K$ este caracterizat de proprietatea că

$$\frac{1}{2}\,a(u,u) - \varphi(u) = \min_{v\in K}\left\{\frac{1}{2}\,a(v,v) - \varphi(v)\right\}\,.$$

.

Demonstraţii elementare ale acestor două rezultate clasice de analiză funcţională pot fi găsite în monografia Brezis [10].

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă, mărginită cu frontiera netedă. Vom considera următoarea problemă-model:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{în } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{6.3}$$

Definiţia 10. *Se numeşte soluţie slabă a problemei (6.3) o funcţie $u \in H_0^1(\Omega)$ astfel încât*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f v \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Din modul în care a fost definită soluţia slabă, condiţia $u = 0$ pe $\partial\Omega$ ce apare în (6.3) rezultă din faptul că $u \in H_0^1(\Omega)$.

Teorema 28. *Fie $f \in L^2(\Omega)$. Atunci problema (6.3) are o unică soluţie slabă u. In plus, această funcţie este soluţie a problemei de minim*

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega f v \right\} .$$

Demonstraţie. Fie $a(\cdot,\cdot) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definită prin

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, .$$

Evident, $a(\cdot,\cdot)$ este o formă biliniară simetrică. Să arătăm că este şi continuă. Pentru orice u, $v \in H_0^1(\Omega)$ avem, conform inegalităţii Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |a(u,v)| = \; & |\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v| \le \int_\Omega |\nabla u| \cdot |\nabla v| \le \\ & \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 \right)^{1/2} = ||u||_{H_0^1} \cdot ||v||_{H_0^1} \, , \end{aligned}$$

ceea ce probează continuitatea formei biliniare $a(\cdot,\cdot)$. Am utilizat aici în mod esenţial faptul că aplicaţia

$$u \longmapsto \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{1/2}$$

poate fi considerată (în baza inegalităţii lui Poincaré) o normă în spaţiul $H_0^1(\Omega)$.

Arătăm acum că $a(\cdot,\cdot)$ este coercivă. Intr-adevăr

$$a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \to \infty \qquad \text{dacă } ||u||_{H_0^1(\Omega)} \to \infty \, .$$

Considerăm acum aplicaţia

$$\varphi(u) = \int_\Omega f u \qquad u \in H_0^1(\Omega) \, .$$

Evident, φ este o funcţională liniară. Este uşor de verificat că ea este şi continuă. Intr-adevăr, aplicând din nou inegalitatea Cauchy-Schwarz,

$$|\varphi(u)| \le \; \int_\Omega |f| \cdot |u| \le \left(\int_\Omega f^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\int_\Omega u^2 \right)^{1/2} = ||f||_{L^2} \cdot ||u||_{L^2} \le ||f||_{L^2} \cdot ||u||_{H_0^1} \, .$$

Suntem acum în măsură să aplicăm lema lui Lax-Milgram. Rezultă că există un unic element $u \in H_0^1(\Omega)$ astfel încât

$$a(u,v) = \varphi(v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)\,,$$

ceea ce înseamnă de fapt că u este soluţie slabă a problemei (6.3). Mai mult, datorită simetriei lui a, funcţia u minimizează funcţionala "energetică"

$$E(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega fv \qquad v \in H_0^1(\Omega)\,,$$

ceea ce încheie demonstraţia. □

Propunem în continuare o listă de exerciţii care se rezolvă după aceleaşi principii. Cititorul poate găsi mai multe detalii în lucrarea Brezis [10].

Exerciţii.

1. Fie E funcţionala definită în (6.2). Calculaţi derivata lui E şi deduceţi că orice punct critic lui E este soluţie a ecuaţiei Euler-Lagrange (6.1).

2. Fie $f \in L^2(0,1)$. Demonstraţi existenţa şi unicitatea soluţiei slabe pentru problema

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{în } (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0\,. \end{cases}$$

Dacă, în plus, $f \in C([0,1])$, arătaţi că problema de mai sus admite o unică soluţie clasică $u \in C^2([0,1])$.

3. Fie $f \in L^2(0,1)$ şi a, b numere reale. Demonstraţi existenţa şi unicitatea soluţiei slabe pentru problema

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{în } (0,1) \\ u(0) = a\,;\ u(1) = b\,. \end{cases}$$

Ind. Aplicaţi teorema lui Stampacchia considerând mulţimea

$$K = \{u \in H^1(0,1)\,;\ u(0) = a,\ u(1) = b\}.$$

4. Arătaţi existenţa şi unicitatea soluţiei slabe pentru problema Sturm-Liouville

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f & \text{în } (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0\,, \end{cases}$$

unde $p \in C^1([0,1])$, $q \in C([0,1])$, $p, q > 0$ şi $f \in L^2(0,1)$.

5. Fie $f \in L^2(0,1)$. Demonstraţi existenţa şi unicitatea soluţiei slabe pentru problema Neumann cu condiţii la limită omogene

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{în } (0,1) \\ u'(0) = u'(1) = 0\,. \end{cases}$$

Formulaţi şi demonstraţi analogul N-dimensional al problemei de mai sus.

6. Fie $f \in L^2(0,1)$ şi a, b numere reale. Demonstraţi existenţa şi unicitatea soluţiei slabe pentru problema Neumann cu condiţii la limită neomogene

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{în } (0,1) \\ u'(0) = a\,;\ u'(1) = b\,. \end{cases}$$

7. Fie $f \in L^2(0,1)$. Demonstraţi existenţa şi unicitatea soluţiei slabe pentru problema cu condiţii la limită periodice

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{în } (0,1) \\ u(0) = u(1)\,, \quad u'(0) = u'(1)\,. \end{cases}$$

8. Fie $f \in L^2(0,1)$ şi $a \in \mathbb{R}$. Studiaţi existenţa şi unicitatea soluţiei slabe pentru problema la limită cu condiţii de tip Robin

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{în } (0,1) \\ u'(0) + au(0) = 0\,;\ u(1) = 0\,. \end{cases}$$

6.2 Soluţii slabe pentru ecuaţia căldurii

Fie a, b numere reale cu $a < b$, $1 \le p < \infty$ şi X un spaţiu Banach. Vom nota cu $L^p(a,b;X)$ spaţiul funcţiilor măsurabile $u : (a,b) \to X$ cu proprietatea că

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} := \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p} < +\infty\,.$$

In particular, dacă $X = H^k(\Omega)$ (k întreg, $k \geq 1$), atunci spaţiul $L^2(0,T;H^k(\Omega))$ conţine funcţiile măsurabile $u : (0,T) \to H^k(\Omega)$ cu proprietatea că

$$\int_0^T \|u(t)\|^2_{H^k(\Omega)}\, dt < \infty\,.$$

Funcţiile din $L^1(a,b;X)$ se numesc funcţii integrabile în sens Bochner. Observăm (în baza teoremei lui Fubini) că spaţiul $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ coincide cu spaţiul $L^2(\Omega_T)$, unde $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$.

Fie acum $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă, mărginită, cu frontiera netedă. Considerăm "cilindrul parabolic" $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$ şi suprafaţa laterală a acestuia

$$\Sigma_T := \partial\Omega \times (0,T)\,.$$

Considerăm **problema mixtă pentru ecuaţia căldurii**

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{în } \Omega_T \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall x \in \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \Sigma_T\,, \end{cases} \tag{6.4}$$

unde $f : \Omega_T \to \mathbb{R}$ şi $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ sunt funcţii date.

Definiţia 11. *Fie $f \in C([0,T];L^2(\Omega))$ şi $u_0 \in L^2(\Omega)$. Funcţia $u : \Omega_T \to \mathbb{R}$ se numeşte soluţie slabă a problemei (6.4) dacă sunt satisfăcute următoarele proprietăţi:*

(i) $u \in C([0,T];L^2(\Omega)) \cap C((0,T];H^1_0(\Omega)) \cap C^1((0,T];L^2(\Omega))$;

(ii) pentru orice $v \in H^1_0(\Omega)$ şi pentru orice $t \in (0,T]$,

$$\int_\Omega u_t(x,t)v(x)\,dx + \int_\Omega \nabla_x u(x,t)\cdot\nabla_x v(x,t)\,dx = \int_\Omega f(x,t)v(x)\,dx$$

şi

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad a.p.t.\ x \in \Omega\,.$$

De aici rezultă că dacă $u \in C^{2,1}(\Omega_T)$ este soluţie clasică a problemei (6.4), atunci u este şi soluţie slabă.

Teorema 29. *Fie $f \in C^1([0,T];L^2(\Omega))$ şi $u_0 \in L^2(\Omega)$. Atunci problema mixtă (6.4) admite o unică soluţie slabă u. Mai mult, $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ şi are loc legea conservării energiei*

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^t \|\nabla u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^t\int_\Omega f(x,s)u(x,s)\,dx\,ds \qquad \forall t\in[0,T]\,. \tag{6.5}$$

Dacă, în plus, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ atunci

$$u \in C([0,T];H_0^1(\Omega)) \qquad \text{şi} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))\,.$$

Demonstraţie. In ipoteza că am demonstrat deja existenţa unei soluţii, ne propunem să arătăm că aceasta e unică. Fie aşadar u_1 şi u_2 soluţii slabe ale problemei (6.4). Dar $u=u_1-u_2$ satisface o problema de tipul (6.4), dar pentru $u_0=0$ şi $f=0$. Ţinând acum cont de identitatea (6.5) deducem că $u(t)=0$, pentru orice $t\in[0,T]$, adică $u_1=u_2$.

Să demonstrăm acum existenţa unei soluţii pentru problema (6.4). Vom folosi în acest sens metoda lui Fourier de separare a variabilelor. Fie pentru aceasta $(e_n)_{n\geq 1}$ o bază ortonormală a lui $L^2(\Omega)$ formată din vectori proprii în $H_0^1(\Omega)$ ai operatorului $(-\Delta)$. Aşadar

$$\begin{cases} -\Delta u_n = \lambda_n u_n & \text{în } \Omega \\ u_n = 0 & \text{pe } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Fie f_n şi u_{0n} coeficienţii Fourier ai lui f şi u_0 în raport cu această bază, adică

$$f_n(t) = (f(t),e_N)_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega f(x,t)e_n(x)\,dx \qquad t\in[0,T]$$

şi

$$u_{0n} = (u_0,e_N)_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega u_0(x)e_n(x)\,dx \qquad n\geq 1\,.$$

Dezvoltând u în serie Fourier obţinem

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty u_n(t)e_n(x) \qquad \forall (x,t)\in\Omega\times(0,T)\,. \tag{6.6}$$

Necunoscutele u_n satisfac

$$\begin{cases} u_n'(t)+\lambda_n u_n(t) = f_n(t) & t\in(0,T)\,,\forall n\geq 1 \\ u_n(0)=u_{0n}\,. \end{cases} \tag{6.7}$$

Rezolvând problema (6.7) găsim

$$u_n(t) = e^{-\lambda_n t} u_{0n} + \int_0^t f_n(s) e^{-\lambda_n (t-s)}\, ds \qquad t \in [0,T]\,. \tag{6.8}$$

Pasul 1: $u \in C([0,T]; L^2(\Omega))$.

Aplicând identitatea lui Parseval obţinem, pentru orice $t \in [0,T]$,

$$\left\| \sum_{k=n}^{n+p} u_k(t) e_k \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{k=n}^{n+p} u_k^2(t)\,. \tag{6.9}$$

Arătăm acum că e suficient să demonstrăm că seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(t) \qquad \text{este uniform convergentă pe } [0,T]. \tag{6.10}$$

Intr-adevăr, conform (6.9), rezultă în acest caz că seria de funcţii continue $\sum_{n\geq 1} u_n(t) e_n$ converge uniform pe intervalul $[0,T]$ cu valori în $L^2(\Omega)$. Mai precis, pentru orice $\varepsilon > 0$, există N_ε astfel încât

$$\left\| u(t) - \sum_{i=1}^{n} u_i(t) e_i \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon \qquad \forall t \in [0,T]\,, \forall n \geq N_\varepsilon\,.$$

De aici rezultă că funcţia $u : [0,T] \to L^2(\Omega)$ este continuă, adică $u \in C([0,T]; L^2(\Omega))$.

Să arătăm acum (6.10). Din (6.8) rezultă că

$$\begin{aligned} u_n^2(t) = \quad & \left(e^{-\lambda_n t} (u_0, e_n)_{L^2} + \int_0^t e^{-\lambda_n (t-s)} (f(s), e_n)\, ds \right)^2 \leq \\ & 2\left(e^{-2\lambda_n t} (u_0, e_n)_{L^2}^2 + \int_0^t e^{-2\lambda_n (t-s)} \int_0^t (f(s), e_n)^2\, ds \right) \leq \\ & 2e^{-2\lambda_n t} (u_0, e_n)_{L^2}^2 + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t (f(s), e_n)^2\, ds\,, \end{aligned} \tag{6.11}$$

pentru orice $t \in [0,T]$. Aplicând din nou identitatea lui Parseval obţinem

$$\|u_0\|_{L^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(u_0, e_n)_{L^2}|^2$$

şi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f(s), e_n)_{L^2}^2 = \|f(s)\|_{L^2}^2\,. \tag{6.12}$$

In plus, ipoteza $f \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ implică faptul că aplicaţiile

$$s \longmapsto (f(s), e_n)_{L^2} \qquad \text{şi} \qquad s \longmapsto \|f(s)\|_{L^2}$$

sunt continue pe intervalul $[0,T]$. De aici rezultă că

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t (f(s), e_n)_{L^2}^2 \, ds = \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} (f(s), e_n)_{L^2}^2 \, ds$$

este o serie uniform convergentă pe $[0,T]$, adică $u \in C([0,T]; L^2(\Omega))$.

Pasul 2: $u \in C((0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$.

Fie $\psi_n := (\lambda_n)^{-1/2} e_n$. Atunci familia (ψ_n) este ortonormală şi completă în $H_0^1(\Omega)$. Dezvoltând funcţia u în serie Fourier în raport cu această familie avem

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(t) \psi_n \,,$$

unde

$$\begin{aligned} \nu_n^2(t) = \quad & \lambda_n \left(e^{-\lambda_n t} (u_0, e_n)_{L^2} + \int_0^t e^{-\lambda_n (t-s)} (f(s), e_n)_{L^2} ds \right)^2 \leq \\ & 2\lambda_n \, e^{-2\lambda_n t} (u_0, e_n)_{L^2}^2 + 2 \int_0^t (f(s), e_n)_{L^2}^2 \, ds \,, \end{aligned}$$

pentru orice $t \in [0,T]$. Deci

$$\begin{aligned} & || \sum_{k=n}^{n+p} \nu_k(t) \psi_k ||_{H_0^1(\Omega}^2 = \sum_{k=n}^{n+p} \nu_k^2(t) \leq \\ & 2 \sum_{k=n}^{n+p} \lambda_k \, e^{-2\lambda_k t} (u_0, e_k)_{L^2}^2 + 2 \sum_{k=n}^{n+p} \int_0^t (f(s), e_k)_{L^2}^2 \, ds \,, \end{aligned} \tag{6.13}$$

pentru orice $t \in [0,T]$. Dar

$$2\lambda_k \, e^{-2\lambda_k t} \leq t^{-1} \, e^{-1} \,. \tag{6.14}$$

Din (6.13) şi (6.14) rezultă că seriile $\sum_{n \geq 1} \nu_n^2(t)$ şi $\sum_{n \geq 1} \nu_n(t) \psi_n$ sunt uniform convergente pe $[\delta, T]$, pentru orice $\delta > 0$. Prin urmare, $u \in C((0,T]; H_0^1(\Omega))$.

Pe de altă parte

$$||u(t)||^2_{H^1_0(\Omega)} = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n^2(t) \le 2\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\, e^{-2\lambda_n t}\,(u_0, e_n)^2_{L^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t (f(s), e_n)^2_{L^2} =$$
$$2\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\, e^{-2\lambda_n t}\,(u_0, e_n)^2_{L^2} + 2\int_0^t ||f(s)||^2_{L^2}\,, \tag{6.15}$$

pentru orice $t \in (0, T]$. De aici rezultă că

$$\int_0^T ||u(t)||^2_{H^1_0(\Omega)} dt \le \sum_{n=1}^{\infty} (u_0, e_n)^2_{L^2} + 2T\int_0^T ||f(t)||^2_{L^2(\Omega)} dt\,,$$

ceea ce arată că $u \in L^2(0, T; H^1_0(\Omega))$.

Pasul 3: $u \in C^1((0, T]; H^1_0(\Omega))$.

In acest caz vom folosi un argument asemănător, dar aplicat pentru seria derivată

$$v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t) e_n \qquad t \in (0, T]\,.$$

E suficient să demonstrăm că

$$v \in C((0, T]; H^1_0(\Omega)) \quad \text{şi} \quad \frac{du}{dt}(t) = v(t) \quad \forall t \in (0, T]\,.$$

Derivând în raport cu t în relaţia (6.8) găsim

$$u_n'(t) = -\lambda_n e^{-\lambda_n t} u_{0n} + f_n(0) e^{-\lambda_n t} + \int_0^t e^{-\lambda_n (t-s)} f_n'(s) ds \quad \forall t \in [0, T]\,. \tag{6.16}$$

Deci, pentru orice $t \in [0, T]$,

$$||\sum_{k=n}^{n+p} u_k'(t) e_k||^2_{L^2} = \sum_{k=n}^{n+p} \left(u_k'(t)\right)^2_{L^2} \le$$
$$||f(\cdot, 0)||^2_{L^2} + 2\sum_{k=n}^{n+p} \lambda_k^2 e^{-2\lambda_k t} (u_0, e_k)^2_{L^2} + \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t}(s), e_k\right)^2_{L^2} ds\,. \tag{6.17}$$

Din ipoteză,

$$\frac{\partial f}{\partial t} \in C([0, T]; L^2(\Omega))\,. \tag{6.18}$$

De asemenea, există $C > 0$ care nu depinde de k astfel încât pentru orice t,

$$\lambda_k^2 e^{-2\lambda_k t} \le C\,. \tag{6.19}$$

Din (6.17)-(6.19) rezultă că seria $\sum_{n\geq 1} (u_n'(t))^2$ este uniform convergentă pe orice interval $[\delta, T]$, cu $\delta > 0$, adică $v \in C((0,T]; L^2(\Omega))$.

Arătăm acum că $\frac{du}{dt} = v$. In acest sens observăm că

$$\left|\left|\frac{u(t+\varepsilon)-u(t)}{\varepsilon} - v(t)\right|\right|_{L^2}^2 =$$
$$\left|\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u_n(t+\varepsilon)-u_n(t)}{\varepsilon} - u_n'(t)\right)e_n\right|\right|_{L^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u_n(t+\varepsilon)-u_n(t)}{\varepsilon} - u_n'(t)\right)^2 . \tag{6.20}$$

Pe de altă parte, conform inegalităţii Cauchy-Schwartz, observăm că pentru orice t şi $t+\varepsilon$ din intervalul $(0,T)$ avem

$$\begin{aligned}\left(\frac{u_n(t+\varepsilon)-u_n(t)}{\varepsilon} - u_n'(t)\right)^2 = {} & \varepsilon^{-2}\left(\int_t^{t+\varepsilon}\left(u_n'(s)-u_n'(t)\right)ds\right)^2 \leq \\ & \varepsilon^{-1}\int_t^{t+\varepsilon}\left(u_n'(s)-u_n'(t)\right)^2 ds\,.\end{aligned} \tag{6.21}$$

Aplicând acum identitatea lui Parseval obţinem

$$\varepsilon^{-1}\int_t^{t+\varepsilon}\left(u_n'(s)-u_n'(t)\right)^2 ds = \varepsilon^{-1}\int_t^{t+\varepsilon}||v(s)-v(t)||_{L^2}^2 ds\,. \tag{6.22}$$

Din (6.20)-(6.22) rezultă că

$$\begin{aligned}\left|\left|\frac{u(t+\varepsilon)-u(t)}{\varepsilon} - v(t)\right|\right|_{L^2}^2 = {} & \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u_n(t+\varepsilon)-u_n(t)}{\varepsilon} - u_n'(t)\right)^2 = \\ & \frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon}||v(s)-v(t)||_{L^2}^2 ds \qquad \forall t > 0\,.\end{aligned} \tag{6.23}$$

Din faptul că aplicaţia $v : (0,T) \to L^2(\Omega)$ este continuă rezultă că

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon}||v(s)-v(t)||_{L^2}^2 ds \qquad \forall t > 0\,. \tag{6.24}$$

Din (6.23) şi (6.24) rezultă acum că, pentru orice $t \in (0,T]$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{u(t+\varepsilon)-u(t)}{\varepsilon} = v(t)\,,$$

adică $\frac{du}{dt} = v$.

Pasul 4: funcţia u este soluţie slabă a problemei (11). Pornim de la faptul că

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t) e_n \qquad \forall t \in (0,T]\,.$$

Deci

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) v(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t) \int_\Omega e_n(x) v(x) dx = \\
&-\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \, u_n(t) \int_\Omega e_n(x) v(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} (f(t), e_n)_{L^2} \cdot (v, e_n)_{L^2} = \\
&-\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \int_\Omega \nabla e_n(x) \cdot \nabla v(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} (f(t), e_n)_{L^2} \cdot (v, e_n)_{L^2} = \\
&-\int_\Omega \nabla u(x,t) \cdot \nabla v(x) dx + \int_\Omega f(x,t) v(x) dx\,,
\end{aligned} \tag{6.25}$$

pentru orice $t \in (0,T]$ şi pentru orice $v \in H_0^1(\Omega)$. Am folosit în (6.25) dezvoltările

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) e_n \qquad f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) e_n$$

precum şi identităţile

$$(u(t), v) = \int_\Omega \nabla u(x,t) \cdot \nabla v(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\,(e_n, v)_{L^2}$$

şi

$$(f(t), v)_{L^2} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,(v, e_n)_{L^2}\,.$$

Relaţia (6.25) exprimă faptul că u este soluţie slabă a problemei (6.4).

Pasul 5: Demonstrarea identităţii (6.5).

Prin înmulţire cu $u_n(t)$ în (6.7) obţinem

$$\frac{1}{2}\,\left(u_n^2(t)\right)' + \lambda_n \, u_n^2(t) = f_n(t)\, u_n(t)\,.$$

Integrând această egalitate pe $[0,t]$ şi sumând apoi după n obţinem

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \lambda_n \, u_n^2(s) ds = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (u_{0n})^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t f_n(s) u_n(s) ds\,. \tag{6.26}$$

Reamintim că

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(t) = ||u(t)||_{L^2}^2 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (u_{0n})^2 = ||u_0||_{L^2}^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \, u_n^2(s) = ||u(s)||_{H_0^1}^2 \qquad (f(s), u(s))_{L^2} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(s) u_n(s)\,.$$

Din (6.26) şi din cele 4 identităţi de mai sus rezultă cu uşurinţă relaţia (6.5).

Pasul 6: $u \in C([0,T]; H_0^1(\Omega))$ şi $\partial u/\partial t \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$.

Presupunem că $u_0 \in H_0^1(\Omega)$. Deoarece familia (ψ_n) formează o bază ortonormală în $H_0^1(\Omega)$ rezultă că, în baza identităţii lui Parseval,

$$||u_0||_{H_0^1}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \, (u_{0n})^2\,,$$

datorită faptului că

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n}\, u_{0n}\, \psi_n\,.$$

Seria

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n(t) \psi_n$$

este uniform convergentă pe $[0,T]$ în $H_0^1(\Omega)$, deci $u \in C([0,T]; H_0^1(\Omega))$. Pe de altă parte

$$\begin{aligned} &\left|\left|\frac{du}{dt}(t)\right|\right|_{L^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n'(t)\right)^2 \le \\ &2\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2\, e^{-2\lambda_n t}\, u_{0n}^2 + ||f(\cdot,0)||_{L^2}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \left(f_n'(s)\right)^2 ds\,. \end{aligned}$$

De aici rezultă că $du/dt \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$ şi, în plus,

$$\int_0^T \left|\left|\frac{du}{dt}\right|\right|_{L^2}^2 \le \|u_0\|_{H_0^1}^2 + \int_0^T \left|\left|\frac{\partial f}{\partial t}(s)\right|\right|_{L^2}^2 dt\,.$$

$\square$

6.2.1 Stabilitatea asimptotică a soluţiei slabe

Considerăm problema mixtă omogenă

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 \qquad \text{în } \Omega_T \\ u(x,0) = u_0(x) \qquad \forall x \in \Omega \\ u(x,t) = 0 \qquad \forall (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T)\,. \end{cases} \tag{6.27}$$

Notăm cu λ_1 prima valoare proprie a operatorului $(-\Delta)$ în $H_0^1(\Omega)$. Are loc următorul rezultat:

Teorema 30. *Fie $u_0 \in L^2(\Omega)$. Atunci soluţia slabă a problemei (6.27) satisface inegalitatea*

$$||u(t)||_{L^2} \leq e^{-\lambda_1 t}\, ||u_0||_{L^2} \qquad \forall t \geq 0\,.$$

Demonstraţie. Pornim de la dezvoltarea în serie Fourier

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) e_n\,,$$

unde coeficienţii u_n sunt daţi de formula

$$u_n(t) = e^{-\lambda_n t}\, u_{0n} + \int_0^t e^{-\lambda_n (t-s)}\, f_n(s) ds = e^{-\lambda_n t}\, (u_0, e_n)_{L^2}\,.$$

Rezultă că

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\, (u_0, e_n)_{L^2}\, e_n\,.$$

Aplicând acum identitatea lui Parseval obţinem

$$\begin{aligned} &||u(t)||_{L^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\lambda_n t}\, (u_0, e_n)_{L^2}^2 \leq \\ &e^{-2\lambda_1 t} \sum_{n=1}^{\infty} (u_0, e_n)_{L^2}^2 = e^{-2\lambda_1 t}\, ||u_0||_{L^2}^2 \qquad \forall t \geq 0\,. \end{aligned}$$

De aici rezultă în particular că $u(t) \to 0$ în $L^2(\Omega)$ dacă $t \to \infty$. $\square$

Teorema 31. *Dacă u este soluţia slabă a problemei (6.27) atunci, pentru orice $v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$,*

$$\left(\frac{du}{dt}(t), v(t)\right)_{L^2} + \int_\Omega \nabla_x u(t) \cdot \nabla_x v(t) dx = (f(t), v(t))_{L^2} \qquad a.p.t.\ t \in (0,T]\,. \tag{6.28}$$

Demonstraţie. Fie $v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Rezultă că $v(t) \in H_0^1(\Omega)$, deci

$$v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n}\, v_n(t)\, \psi_n\,,$$

unde $\psi_n = (\lambda_n)^{-1/2}\, e_n$.

Fie acum

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx \qquad u, v \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Scriind că u este soluţie slabă pentru problema (6.27) avem

$$\left(\frac{du}{dt}(t), e_n\right)_{L^2} + a(u(t), e_n) = (f(t), e_n) \qquad \forall n \geq 1\,.$$

Sumând aceste relaţii după n obţinem (6.28). $\square$

6.2.2 Principiul de maxim pentru soluţia slabă

Revenim la problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f \qquad \text{în } \Omega_T \\ u(x,0) = u_0(x) \qquad \forall x \in \Omega \\ u = 0 \qquad \text{pe } \Sigma_T\,, \end{cases} \tag{6.29}$$

unde $f : \Omega_T \to \mathbb{R}$ şi $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ sunt funcţii date.

Teorema 32. *Presupunem că $u_0 \in L^2(\Omega)$ şi $f \in C^1([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega_T)$. Atunci soluţia slabă a problemei (6.29) satisface*

$$\begin{aligned} &\min\{\operatorname*{ess\,inf}_\Omega\, u_0, 0\} + t \operatorname*{ess\,inf}_{\Omega_T} f \leq u(x,t) \leq \\ &\max\{\operatorname*{ess\,sup}_\Omega\, u_0, 0\} + t \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega_T} f \qquad a.p.t.\ (x,t) \in \Omega_T\,. \end{aligned} \tag{6.30}$$

Demonstraţie. Fie

$$M := \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega_T} f \qquad K := \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} u_0$$

şi

$$v(t) := \big(u(t) - K^+ - Mt\big)^+ \, .$$

E suficient să arătăm că $v = 0$ a.p.t. pentru a deduce prima inegalitate din (6.30), cealaltă deducându-se cu aceeaşi metodă.

Aplicând Propoziţia IX.5 şi Teorema IX.17 din Brezis [10] deducem că $v(t) \in H_0^1(\Omega)$, pentru orice $t \in [0,T]$. In plus, deoarece u este soluţie slabă, rezultă că $v \in C((0,T]; H_0^1(\Omega))$. Folosind funcţia $v(t)$ ca funcţie test în definiţia soluţiei slabe găsim

$$\int_\Omega u_t(x,t)\big(u(x,t) - K^+ - Mt\big)^+ dx + \int_\Omega \nabla u(x,t) \cdot \nabla\big(u(x,t) - K^+ - Mt\big)^+ dx = \int_\Omega f\big(u(x,t) - K^+ - Mt\big)^+ \qquad \forall t \in (0,T]\, . \tag{6.31}$$

Dar

$$\nabla\big(u(x,t) - K^+ - Mt\big)^+ = \begin{cases} \nabla u(x,t) & \text{dacă } u(x,t) - K^+ - Mt > 0 \\ 0 & \text{dacă } u(x,t) - K^+ - Mt \le 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(u(x,t) - K^+ - Mt\big)^+ = \begin{cases} u_t(x,t) - M & \text{dacă } u(x,t) - K^+ - Mt > 0 \\ 0 & \text{dacă } u(x,t) - K^+ - Mt \le 0\, . \end{cases}$$

Ţinând acum cont de descompunerea standard

$$u - K^+ - Mt = (u - K^+ - Mt)^+ - (u - K^+ - Mt)^-$$

şi de cele două relaţii de mai sus, egalitatea (6.31) conduce la

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega v^2 dx + 2\int_\Omega ||\nabla_x v||^2 dx \le 0 \qquad \text{a.p.t. } t \in (0,T)\, .$$

Această inegalitate atrage $v(x,t) = 0$ a.p.t. $(x,t) \in \Omega_T$, ceea ce încheie demonstraţia. □

Rezultatul de mai sus atrage următorul

Corolarul 6. *Fie $u_0 \in L^2(\Omega)$ şi $f \in L^\infty(\Omega_T)$. Fie u soluţia slabă a problemei (6.29). Au loc următoarele proprietăţi:*

(i) Dacă $u_0 \geq 0$ a.p.t. în Ω şi $f \geq 0$ în Ω_T atunci $u \geq 0$ a.p.t. în Ω_T;

(ii) Dacă $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ atunci $u \in L^\infty(\Omega_T)$ şi, în plus,

$$||u||_{L^\infty(\Omega_T)} \leq ||u_0||_{L^\infty(\Omega)} + T\,||f||_{L^\infty(\Omega_T)}\,.$$

Concluzia acestui rezultat derivă imediat din principiul de maxim (teorema 32).

6.3 Soluţii slabe pentru ecuaţia undelor

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă, mărginită şi $T > 0$. Reamintim notaţiile

$$\Omega_T := \Omega \times (0, \infty) \qquad \text{şi} \qquad \Sigma_T := \partial\Omega \times (0, T)\,.$$

Considerăm problema mixtă de tip Dirichlet pentru ecuaţia undelor

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f \qquad \text{în } \Omega_T \\ u(x,0) = u_0(x)\,;\ u_t(x,0) = u_1(x) \qquad \forall x \in \Omega \\ u(x,t) = 0 \qquad \forall (x,t) \in \Sigma_T\,, \end{cases} \tag{6.32}$$

unde $f = f(x,t) : \Omega_T \to \mathbb{R}$ şi $u_0, u_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ sunt funcţii date.

Dacă condiţia $u = 0$ în Σ_T se înlocuieşte cu $\frac{\partial u}{\partial \nu} = g$ pe Σ_T se obţine o problemă mixtă de tip Neumann pentru ecuaţia undelor.

Definiţia 12. *Fie $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ şi $u_1 \in L^2(\Omega)$. Funţia $u : \Omega_T \to \mathbb{R}$ se numeşte soluţie slabă a problemei (6.32) dacă sunt satisfăcute următoarele proprietăţi:*

(i) $u \in C^1([0,T];L^2(\Omega)) \cap C([0,T];H_0^1(\Omega))$;

(ii) Pentru orice $v \in H_0^1(\Omega)$, aplicaţia

$$[0,T] \ni t \longmapsto \int_\Omega u_t(x,t)v(x)dx$$

este absolut continuă şi, în plus,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t(x,t)v(x)dx + \int_\Omega \nabla_x u(x,t) \cdot \nabla_x v(x,t)dx = \\ \int_\Omega f(x,t)v(x)dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ şi a.p.t. } t \in [0,T]\,.$$

(iii) Avem

$$u(x,0) = u_0(x)\,, \quad u_t(x,0) = u_1(x) \qquad a.p.t.\ x \in \Omega\,.$$

Teorema 33. *Fie $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ şi $u_1 \in L^2(\Omega)$. Atunci problema mixtă (6.32) admite o unică soluţie slabă u care, în plus, verifică inegalitatea*

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dx + \int_\Omega ||\nabla_x u(x,t)||^2 dx \le \\ &C\left(||u_0||^2_{H_0^1} + ||u_1||^2_{L^2} + \int_0^t \int_\Omega f^2(x,s)dxds\right) \qquad \forall t \in [0,T]\,,\end{aligned} \tag{6.33}$$

unde C nu depinde de f, u_0 şi u_1.

Dacă $f = 0$ atunci soluţia u există pentru orice $t \in \mathbb{R}$ şi, în plus, este satisfăcută legea conservării energiei

$$\int_\Omega \left(|u_t(x,t)|^2 + ||\nabla_x u(x,t)||^2\right) dx = Const. \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,. \tag{6.34}$$

Dacă, în plus, $f \in C^1([0,T];L^2(\Omega))$, $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ şi $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ atunci

$$u \in C^1([0,T];L^2(\Omega)) \cap C^2([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T];H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \tag{6.35}$$

şi

$$u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t) \qquad \forall t \in [0,T],\ a.p.t.\ x \in \Omega\,.$$

Demonstraţie. Presupunem că am demonstrat deja existenţa precum şi proprietatea (6.33). De aici rezultă imediat unicitatea soluţiei. Intr-adevăr, dacă u^1 şi u^2 ar fi soluţii ale problemei (6.32) atunci funcţia $u := u^1 - u^2$ verifică (6.32) pentru $f = u_0 = u_1 = 0$. Aplicând acum inegalitatea (6.33) rezultă că $u_t = 0$ şi $\nabla u = 0$ adică $u =$ Const. în Ω_T. Aplicând acum faptul că $u = 0$ pe Σ_T obţinem $u = 0$ în Ω_T, adică $u^1 = u^2$.

Pasul 1: existenţa soluţiei. Aplicăm metoda lui Fourier de separare a variabilelor şi căutăm soluţia sub forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) e_n(x) \qquad (x,t) \in \Omega \times (0,T)\,,$$

unde (e_n) este o bază ortonormală în $L^2(\Omega)$. Introducând această expresie a lui u în ecuaţia undelor obţinem

$$\begin{cases} u_n''(t) + \lambda_n u_n(t) = f_n(t) \qquad t > 0 \\ u_n(0) = u_{0n} \\ u_n'(0) = u_{1n}\,, \end{cases} \tag{6.36}$$

unde u_{0n} (resp. u_{1n} şi f_n) sunt coeficienţii Fourier ai lui u_0 (resp. u_1 şi f) în raport cu baza (e_n), adică

$$u_{0n} = (u_0, e_n)_{L^2} \qquad u_{1n} = (u_1, e_n)_{L^2} \qquad f_n(t) = \int_\Omega f(x,t) e_n(x) dx\,.$$

Rezolvând problema (6.36) obţinem

$$u_n(t) = u_{0n} \cos\sqrt{\lambda_n} t + \frac{u_{1n}}{\sqrt{\lambda_n}} \sin\sqrt{\lambda_n} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t f_n(s) \sin\sqrt{\lambda_n}(t-s) ds\,. \tag{6.37}$$

Pasul 2: $u \in C([0,T]; H_0^1(\Omega))$.

Fie $\psi_n = \frac{e_n}{\sqrt{\lambda_n}}$. Aşadar

$$u(t) = \sum_{n=1}^\infty \sqrt{\lambda_n}\, u_n(t)\, \psi_n\,.$$

E suficient să arătăm că seria

$$\sum_{n=1}^\infty \lambda_n\, u_n^2(t) = ||u(t)||^2_{H_0^1}$$

este uniform convergentă pe intervalul $[0,T]$.

Intrucât $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ avem

$$u_0 = \sum_{n=1}^\infty (u_0, \psi_n)_{H_0^1}\, \psi_n = \sum_{n=1}^\infty \sqrt{\lambda_n}\, u_{0n}\, \psi_n\,.$$

Deci

$$||u_0||^2_{H_0^1} = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n\, u_{0n}^2\,.$$

De asemenea, tot în baza identităţii lui Parseval,

$$||u_1||_{L^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} u_{1n}^2 \,.$$

In plus, conform inegalităţii lui Cauchy-Schwarz, pentru orice $t \in [0, T]$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^t f_n(s) \sin \sqrt{\lambda_n}(t-s) ds \right|^2 \leq T \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t f_n^2(s) ds = T \int_0^T ||f(s)||_{L^2}^2 ds \,.$$

Rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \, u_n^2(t)$ e majorată de seria

$$C \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n u_{0n}^2 + u_{1n}^2 + T \int_0^T f_n^2(s) ds \right) =$$
$$C \left(||u_0||_{H_0^1}^2 + ||u_1||_{L^2}^2 + \int_0^T \int_\Omega f^2(x,s) ds dx \right) \,.$$

De aici rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \, u_n^2(t)$ este uniform convergentă şi $u \in C([0,T]; H_0^1(\Omega))$. De asemenea, pentru orice $t \in [0, T]$,

$$||u(t)||_{H_0^1}^2 \leq C \left(||u_0||_{H_0^1}^2 + ||u_1||_{L^2}^2 + \int_0^T \int_\Omega f^2(x,s) ds dx \right) \,. \qquad (6.38)$$

Pasul 3: $u \in C^1([0,T]; L^2(\Omega))$.

E suficient să arătăm că seria derivată

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t) e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\sqrt{\lambda_n} u_{0n} \sin \sqrt{\lambda_n} t + u_{1n} \cos \sqrt{\lambda_n} t + \int_0^t f_n(s) \cos \sqrt{\lambda_n}(t-s) ds \right) e_n$$

este uniform convergentă pe $[0, T]$. Acest lucru este echivalent cu a demonstra că seria $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n'(t))^2$ converge uniform. Acest lucru este însă evident, căci seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n u_{0n}^2 + u_{1n}^2 + T \int_0^T f_n^2(s) ds \right)$$

este uniform convergentă pe intervalul $[0, T]$ către

$$||u_0||_{H_0^1}^2 + ||u_1||_{L^2}^2 + T \int_0^T \int_\Omega f^2(x,s) dx ds \,.$$

Rezultă de aici că $u \in C^1([0,T]; L^2(\Omega))$ şi

$$||u_t(t)||_{L^2}^2 \leq C \left(||u_0||_{H_0^1}^2 + ||u_1||_{L^2}^2 + \int_0^t \int_\Omega f^2(x,s) dx ds \right) \qquad \forall t \in [0, T] \,.$$

De aici şi din (6.38) rezultă că

$$\int_\Omega u_t^2 dx + \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dx \leq C \left(||u_0||^2_{H_0^1} + ||u_1||^2_{L^2} + \int_0^t \int_\Omega f^2(x,s) ds dx \right). \tag{6.39}$$

In plus,

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^\infty u_n(0) e_n(x) = \sum_{n=1}^\infty u_{0n} e_n(x) = u_0(x)$$

şi

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^\infty u_n'(0) e_n(x) = \sum_{n=1}^\infty u_{1n} e_n(x) = u_1(x)\,.$$

Pasul 4: u este soluţie slabă. Folosim următorul rezultat auxiliar.

Lema 6. *Fie $g_n : [0,T] \to \mathbb{R}$ un şir de funcţii absolut continue cu proprietatea că seria $\sum_{n=1}^\infty g_n(t)$ este convergentă către o funcţie g, pentru orice $t \in [0,T]$. In plus, presupunem că există o funcţie $h \in L^1(0,T)$ astfel încât*

$$\sum_{n=1}^\infty |g_n'(t)| \leq h(t) \qquad a.p.t.\ t \in (0,T)\,. \tag{6.40}$$

Atunci funcţia g este absolut continuă pe $[0,T]$ şi, în plus,

$$g'(t) = \sum_{n=1}^\infty g_n'(t) \qquad a.p.t.\ t \in (0,T)\,.$$

Demonstraţia lemei. Folosind relaţia (6.40), ipoteza $h \in L^1(0,T)$, teorema convergenţei dominate precum şi faptul că derivata unei funcţii absolut continue este în L^1 obţinem că seria $\sum_{n=1}^\infty g_n'(t)$ este convergentă a.p.t. către o funcţie din L^1 şi, în plus,

$$\int_0^t \sum_{n=1}^\infty g_n'(s) ds = \sum_{n=1}^\infty \int_0^t g_n'(s) ds = g(t) - g(0) \qquad \forall t \in [0,T]\,. \tag{6.41}$$

Rezultă că funcţia g este absolut continuă pe $[0,T]$ şi

$$g'(t) = \sum_{n=1}^\infty g_n'(t) \qquad \text{a.p.t. } t \in [0,T]\,,$$

ceea ce încheie demonstraţia lemei. □

Revenim acum la demonstraţia teoremei şi aplicăm lema 6 funcţiei

$$\Phi(t) := \int_\Omega u_t(x,t)v(x)dx$$

pentru $v \in H_0^1(\Omega)$ fixat. Observăm că

$$\Phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t)\,(v,e_n)_{L^2} =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\sqrt{\lambda_n}\,u_{0n}\sin\sqrt{\lambda_n}t + u_{1n}\cos\sqrt{\lambda_n}t + \int_0^t f_n(s)\,\cos\sqrt{\lambda_n}(t-s)ds\right)(v,e_n)_{L^2}\,.$$

Deci

$$\Phi'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t)\,(v,e_n)_{L^2} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,(v,e_n)_{L^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n u_n(t)\,(v,e_n)_{L^2}\,.$$

Aplicând inegalitatea Cauchy-Schwarz obţinem

$$|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,(v,e_n)_{L^2}| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(t)dt\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}(v,e_n)^2\right)^{1/2} = ||f(t)||_{L^2}\cdot||v||_{L^2}$$

şi

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n u_n(t)\,(v,e_n)_{L^2}\right| \le \left|\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_n}\,u_n(t)\,(v,e_n)_{H_0^1}\right| \le$$
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n u_n^2(t)\right)^{1/2}\ ||v||_{H_0^1} \le ||v||_{H_0^1}\cdot||u(t)||_{H_0^1}\,.$$

Aplicând lema 6 deducem că funcţia Φ este absolut continuă şi

$$\Phi'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,(v,e_n)_{L^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n u_n(t)\,(v,e_n)_{L^2}\,.$$

Deci

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t(x,t)v(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}(f(t),e_n)_{L^2}\,(v,e_n)_{L^2} - \left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)e_n, v\right)_{H_0^1} =$$
$$\int_\Omega f(x,t)v(x)dx - \int_\Omega \nabla_x u(x,t)\cdot\nabla v(x)dx \qquad \text{a.p.t. } t\in[0,T]\,.$$

Pasul 5: Arătăm că dacă $f \in C^1([0,T];L^2(\Omega))$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ şi $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ atunci $u \in C^1([0,T];H_0^1(\Omega))$.

E suficient să arătăm că seria

$$u_t(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t) e_n =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\sqrt{\lambda_n}\, u_{0n} \sin \sqrt{\lambda_n} t + u_{1n} \cos \sqrt{\lambda_n} t + \int_0^t f_n'(t-s) \cos \sqrt{\lambda_n} s ds \right) e_n \tag{6.42}$$

este uniform convergentă pe $[0, T]$. In acest scop se repetă argumentele de la Pasul 2, utilizând ipotezele de regularitate cu privire la u_0, u_1 şi f.

Pasul 6: Legea conservării energiei şi concluzia.

Să presupunem că $f = 0$. Din relaţia

$$u_n''(t) + \lambda_n u_n(t) = 0 \qquad \forall t > 0$$

rezultă prin înmulţire cu u_n şi integrare că

$$\frac{1}{2}\, \left(u_n'(t)\right)^2 + \lambda_n u_n^2(t) = \text{Const.} \qquad \forall t > 0\,.$$

Deci

$$\frac{1}{2}\, \left(u_n'(t)\right)^2 + \lambda_n u_n^2(t) = \frac{1}{2}\, u_{1n}^2 + \lambda_n u_{0n}^2 \qquad \forall t > 0\,.$$

Rezultă că

$$\frac{1}{2}\, ||u_t(t)||_{L^2}^2 + ||u(t)||_{H_0^1}^2 = \frac{1}{2}\, ||u_1||_{L^2}^2 + ||u_0||_{H_0^1}^2 \qquad \forall t > 0\,,$$

adică tocmai legea conservării energiei (6.34).

In acest caz funcţia $u(t)$ se poate extinde pe semiaxa negativă prin relaţia

$$u(x,t) = -u(x,-t) \qquad \forall t \le 0$$

iar funcţia $u : \Omega \times \mathbb{R}$ rămâne soluţie a ecuaţiei undelor. $\square$

Bibliography

[1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] S. Agmon, A. Douglis şi L. Nirenberg, Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **8** (1955), 503-538.

[3] S. Agmon, A. Douglis şi L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, *Comm. Pure Appl. Math.* **12** (1959), 623-727 şi **17** (1964), 35-92.

[4] V. I. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Grundlehren Math. Wiss., vol. 250, Springer-Verlag, 1983.

[5] V. Barbu, *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems*, Kluwer Academic Publishers, 1998.

[6] L. Bers, F. John şi M. Schechter, *Partial Differential Equations*, Interscience Publishers, New York, London, Sydney, 1964.

[7] F. Bethuel, H. Brezis şi Fr. Hélein, *Ginzburg-Landau Vortices*, Birkhäuser, Boston, 1994.

[8] P. Biler şi T. Nadzieja, *Differential Equations: A Collection of Exercises, Problems, Theorems, Examples and Counterexamples*, Marcel Dekker Inc., 1994.

[9] E. Bombieri, E. DeGiorgi şi E. Giusti, Minimal cones and the Bernstein problem, *Invent. Math.* **7** (1969), 243-268.

[10] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson, Paris, 1992.

[11] H. Brezis şi F. Browder, Partial differential equations in the 20th century, *Advances in Mathematics*, (1998).

[12] C. Carathéodory, *The Calculus of Variations and Partial Differential Equations of First Order*, Chelsea, 1982.

[13] C. Chester, *Techniques in Partial Differential Equations*, McGraw-Hill, 1971.

[14] G. Chilov, *Analyse mathématique, fonctions de plusieurs variables réelles*, Editions Mir, Moscou, 1975.

[15] R. Courant şi D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics I, II*, Interscience, Willey, New York, 1962.

[16] E. DeGiorgi, Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari, *Mem. Accad. Sc. Torino, C. Sc. Fis. Mat. Natur.* **3** (1957), 25-43.

[17] E. DiBenedetto, *Partial Differential Equations*, Birkhäuser, Boston Basel Berlin, 1995.

[18] G. Duvaut şi J.-L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1976.

[19] Yu. V. Egorov şi M.A. Shubin, *Foundations of the Classical Theory of Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[20] I. Ekeland şi R. Temam, *Convex Analysis and Variational Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1976.

[21] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.

[22] G. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton University Press, Princeton, 1976.

[23] A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice-Hall, 1964.

[24] A. Friedman, *Partial Differential Equations*, Holt, Rinehart, Winston, 1969.

[25] P. R. Garabedian, *Partial Differential Equations*, Wiley, New York, 1964.

[26] M. Giaquinta, *Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlinear Elliptic Systems*, Princeton University Press, 1983.

[27] B. Gidas, W. M. Ni şi L. Nirenberg, Symmetry and related properties via the maximum principle, *Comm. Math. Phys.* **68** (1980), 209-243.

[28] D. Gilbarg şi N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[29] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*, Yale Univ. Press, 1923.

[30] E. Hebey, *Sobolev Spaces on Riemannian Manifolds*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1996.

[31] E. Hopf, Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, *Sitz. Ber. Preuss, Akad. Wissensch. Berlin, Math. Phys. Kl.*, **19** (1927), 147-152.

[32] E. Hopf, On S. Bernstein's theorem on surfaces $z(x, y)$ of non-positive curvature, *Proc. Amer. Math. Soc.* **1** (1950), 80-85.

[33] E. Hopf, A remark on linear elliptic differential equations of second order, *Proc. Amer. Math. Soc.* **3** (1952), 791-793.

[34] V. Iftimie, *Ecuaţii cu derivate parţiale*, Reprografia Universităţii din Bucureşti, 1980.

[35] F. John, *Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[36] J. Jost, *Postmodern Analysis*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1998.

[37] J. Kevorkian, *Partial Differential Equations, Analytical Solution Techniques*, Brooks/Cole, 1989.

[38] D. Kinderlehrer şi G. Stampacchis, *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*, Academic Press, 1980.

[39] N. V. Krylov, *Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Hölder Spaces*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 12, Amer. Math. Soc., 1996.

[40] O. Ladyzhenskaya, *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics*, Springer-Verlag, New York, 1985.

[41] P. Lax şi A. N. Milgram, Parabolic Equations, în *Contributions to the Theory of Partial Differential Equations*, Ann. Math. Studies 33, Princeton Univ. Press, 1954, 167-190.

[42] E. Lieb şi M. Loss, *Analysis*, American Mathematical Society, 1997.

[43] J.-L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non-linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

[44] J.-L. Lions şi E. Magenes, *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications I-III*, Springer-Verlag, New York, 1972.

[45] J. D. Logan, *Applied Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[46] A. Lotka, *Principles of Mathematical Biology*, Dover, New York, 1956.

[47] N. Mihăileanu, *Istoria matematicii*, vol. 2, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1981.

[48] S. G. Mihlin, *Ecuaţii liniare cu derivate parţiale*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1983.

[49] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, 1967.

[50] L. Nirenberg, Variational and topological methods in nonlinear problems, *Bull. Amer. Math. Soc.* **4** (1981), 267-302.

[51] O. A. Oleinik, On properties of solutions of certain boundary problems for equations of elliptic type, *Mat. Sb. (New Series)* **30** (1952), 695-702.

[52] M. Pinsky, *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems with Applications*, McGraw-Hill, 1991.

[53] M. H. Protter şi H. F. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1967.

[54] M. Rădulescu şi S. Rădulescu, *Teoreme şi probleme de analiză matematică*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.

[55] M. Reed şi B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, 4 vols., Academic Press, New York, 1972-1979.

[56] M. Renardy şi R. C. Rogers, *An Introduction to Partial Differential Equations*, Texts in Applied Mathematics, Vol. 13, Springer-Verlag, New York, 1996.

[57] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1976.

[58] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, 1973.

[59] L. Schwartz, *Théorie des distributions I, II*, Hermann 1950, 1951.

[60] J. Serrin, On the Harnack inequality for linear elliptic equations, *J. Analyse Math.* **4** (1955/56), 292-308.

[61] R. E. Showalter, *Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations*, Pitman, 1977.

[62] J. Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[63] S. L. Sobolev, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Pergamon Press 1964; Dover 1989.

[64] S. L. Sobolev, *Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*, Izdat. Leningrad Gos. Univ., 1950; Trans. Math. Monographs 7, Amer. Math. Soc., 1963.

[65] P. N. de Souza şi J.-N. Silva, *Berkeley Problems in Mathematics*, Problem Book in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[66] R. Sperb, *Maximum Principles and Their Applications*, Academic Press, 1981.

[67] G. Stampacchia, *Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Presses Univ. Montreal, 1966.

[68] W. A. Strauss, *Partial Differential Equations, An Introduction*, Wiley, New York, 1992.

[69] M. Taylor, *Partial Differential Equations*, Vol. I-III, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[70] D. W. Thoe şi E. Zachmanoglou, *Introduction to Partial Differential Equations with Applications*, Dover, 1986.

[71] F. Trèves, *Basic Linear Partial Differential Equations*, Academic Press, 1975.

[72] A. Tveito şi R. Winther, *Introduction to Partial Differential Equations. A Computational Approach*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[73] V. S. Vladimirov, *Ecuaţiile fizicii matematice*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1980.

[74] V. S. Vladimirov et al., *Culegere de probleme de ecuaţiile fizicii matematice*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1981.

[75] M. Willem, *Analyse fonctionnelle élémentaire*, Cassini, 2003.

[76] J. Wloka, *Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, New York, 1987.

[77] W. Ziemer, *Weakly Differentiable Functions*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.